La transposition didactique du concept de fonction. Comparaison entre les systèmes d'enseignement français et palestinien

Nadia Amra

L'UNIVERSITE Paris 7 – DENIS DIDEROT

Ecole doctorale "Savoirs scientifiques:
épistémologie, histoire des sciences, didactique des disciplines"

THESE DE DOCTORAT

Spécialité: DIDACTIQUE DES MATHEMATIQUES

Présentée par
Nadia AMRA

LA TRANSPOSITION DIDACTIQUE DU CONCEPT DE FONCTION

Comparaison entre les systèmes d'enseignement français et palestinien

Thèse soutenue le 15 Janvier 2004 devant la commission d'examen

Jury :

Michèle **Artigue**	Professeur Université Paris 7 **Présidente**
Yves **Chevallard**	Professeur IUFM de Marseille **Rapporteur**
Jean-Luc **Dorier**	Professeur IUFM de Lyon **Rapporteur**
Marie-Jeanne **Perrin-Glorian**	Professeur IUFM Nord-Pas-de-Calais **Directrice de thèse**

L'UNIVERSITE Paris 7 – DENIS DIDEROT

Ecole doctorale "Savoirs scientifiques: épistémologie, histoire des sciences, didactique des disciplines"

THESE DE DOCTORAT

Spécialité: DIDACTIQUE DES MATHEMATIQUES

Présentée par
Nadia AMRA

LA TRANSPOSITION DIDACTIQUE DU CONCEPT DE FONCTION

Comparaison entre les systèmes d'enseignement français et palestinien

Thèse soutenue le 15 Janvier 2004 devant la commission d'examen

Jury :

Michèle **Artigue**	Professeur Université Paris 7 **Présidente**
Yves **Chevallard**	Professeur IUFM de Marseille **Rapporteur**
Jean-Luc **Dorier**	Professeur IUFM de Lyon **Rapporteur**
Marie-Jeanne **Perrin-Glorian**	Professeur IUFM Nord-Pas-de-Calais **Directrice de thèse**

Remerciements

Je voudrais exprimer ma plus profonde gratitude à Marie-Jeanne Perrin-Glorian qui a dirigé mon travail en conjuguant patience et exigence. Ses questions pertinentes et ses conseils, son aide lors de la lecture détaillée et la correction minutieuse des chapitres de la thèse m'ont été précieux et ont permis à ce travail d'aboutir. Je lui suis également très reconnaissante pour sa gentillesse, son soutien constant durant ces longues années de travail et sa compréhension des moments difficiles que j'ai eu à traverser.

Je remerciement sincèrement Jean-Luc Dorier et Yves Chevallard d'avoir accepté de se rendre disponibles pour être rapporteurs de cette thèse ainsi que pour toute l'attention qu'ils lui ont accordé.

Je suis très reconnaissante à Michèle Artigue qui a accepté de présider ce jury.

Merci à mes parents, qui, bien qu'étant loin, ont toujours été si proches ; qu'ils trouvent ici un témoignage de mon amour pour eux.

Merci à Majdi qui m'a soutenu tout au long de ces années par ses encouragements constants, sa grande discrétion et sa présence auprès de Dalia et Rime. Ce travail lui doit beaucoup.

A Dalia et Rime

A tous les écoliers et écolières de Palestine

Sommaire

Introduction

La notion de transposition didactique m'est apparue bien théorique quand elle nous a été présentée au cours du D.E.A., et je ne pensais pas que je serais assez vite amenée à y être personnellement confrontée dans mon activité d'enseignante. C'est quand je suis partie m'installer en Palestine, en 1994, qu'une telle occasion allait s'offrir. A mon arrivée, et parce que je ne maîtrisais pas la langue arabe écrite, il m'a été donné d'enseigner à des élèves de 10ème, en langue anglaise, un programme de mathématiques américain. C'est alors que j'ai été profondément surprise par la façon dont l'objet fonction y était abordé : les fonctions, y faisaient partie intégrante de l'algèbre et étaient présentées en liaison avec la notion de relation, alors que l'aspect variation n'y était pas du tout pris en considération. J'ai voulu alors savoir ce que ces élèves faisaient en classe de mathématique arabe, et la lecture rapide du manuel de l'époque (toujours en vigueur), m'a révélé que les contenus de l'enseignement sur la fonction ainsi que la progression adoptée dans les deux enseignements était très proches, et profondément différentes de l'approche adoptée dans l'enseignement français. Cela m'a d'autant interpellée que j'avais enseigné pendant plusieurs années en classe de seconde française et que, ayant personnellement été formée dans les écoles françaises, j'avais du mal à concevoir une approche de la notion de fonction occultant la notion de variation ; cette différence fondamentale entre les deux approches se résumait à une notion de didactique des mathématiques : celle de transposition didactique.

Pourquoi une comparaison ?

Cette constatation est à la source même des premières motivations qui ont abouti à cette recherche. Il y a là bien sûr un intérêt culturel certain du fait de notre double origine, française et palestinienne, sur lequel se greffe un souci de mère pour l'enseignement qui va être inculqué à sa fille puisque nous avons fait le choix de vivre en Palestine ; mais au-delà de cette motivation culturelle, nous avons souhaité nous donner les moyens de **répondre à la question de la caractérisation de l'objet fonction dans chacun des deux systèmes d'enseignement français et palestinien.**

Notre idée de départ a été alors de comparer l'enseignement de ce concept dans les classes de seconde française et 10ème palestinienne, soit la classe de base pour l'introduction d'un concept général de la fonction dans les deux pays, mais aussi avant l'enseignement explicite de l'analyse. Mais, le fait que la conception de la fonction en tant que loi de variation n'était envisagée dans le système d'enseignement palestinien, qu'au niveau de la classe de 12ème et uniquement par l'intermédiaire du théorème liant sens de variation et signe de la dérivée, nous a obligée pour que la comparaison soit opérante, à élargir notre étude pour inclure la classe de première S française et les classes de 11ème et 12ème scientifiques palestiniennes, tout en continuant à limiter notre objet d'étude à ce qui précède l'analyse.

Ce regard critique que nous portons sur l'organisation des programmes de mathématiques palestiniens s'inscrit par ailleurs dans un cadre plus général de réorganisation de l'ensemble des programmes enseignés en Palestine enclenchée en 1994, et qui a abouti en 1996 à la publication par le P. C. D. C[1] du "Comprehensive plan for the development of The First Palestinian Curriculum for General Education". Ce plan comprend à la fois l'évaluation des programmes en vigueur, et la présentation d'un plan pour une éducation répondant aux aspirations nationales des palestiniens, après la reconnaissance par la communauté internationale du droit du peuple palestinien à l'auto-détermination. Ce souci pour le développement d'un curriculum national palestinien s'explique par des raisons spécifiques à l'histoire des palestiniens : l'éducation des palestiniens a toujours été décidée et supervisée par des autorités non palestiniennes ; il s'est agit successivement du Mandat Britannique, suivi après 1948 des autorités jordaniennes et égyptiennes suite au découpage du territoire de Palestine. Après l'occupation israélienne de la Cisjordanie et de la Bande de Gaza en 1967, l'éducation dans les territoires occupés palestiniens a été placée sous la direction d'un gouverneur militaire (israélien) chargé de l'éducation, mais les programmes continuaient d'être décidés respectivement par la Jordanie et par l'Egypte.

Notre allusion à un rapprochement certain entre l'enseignement de la fonction en Palestine, et en Amérique, du moins du point de vue des contenus, vise essentiellement à pointer le fait que les programmes spécifiques à ce petit pays du Tiers-Monde n'existent pas de façon isolée, mais s'inscrivent dans le cadre d'une l'influence culturelle plus large prenant racine dans les spécificités historiques, mais aussi socio-politiques contemporaines de cette région du monde. Devant cette réalité, l'idée d'une comparaison avec l'enseignement français présente également l'attrait d'œuvrer à réduire quelque peu l'isolement que subissent les Palestiniens en leur présentant une autre expérience culturelle que celles auxquelles ils se réfèrent habituellement.

Dans le cadre de cette réorganisation générale des programmes palestiniens, l'idée d'une comparaison entre l'enseignement des fonctions en France et en Palestine émane d'une volonté d'éclairer les difficultés spécifiques à chacun des deux systèmes d'enseignement (ou partagés par eux deux), en tant que conséquences des différentes organisations des contenus. Mais cette première lecture du manuel palestinien a également fait ressortir des spécificités palestiniennes sur le plan des méthodes pédagogiques utilisées : notamment, le manuel palestinien ne semblait pas s'appuyer sur une présentation des notions privilégiant le sens à donner aux notions à installer, et basée autant que possible sur l'intuition des élèves, sur laquelle insistent fortement par contre les instructions officielles françaises. Or cette présentation des contenus, ou ces méthodes pédagogiques adoptées, nous apparaissent intrinsèquement liées à la volonté d'aborder le concept de fonction de telle ou telle façon : par exemple, introduire le concept de la fonction en tant que loi de variation du côté français alors

[1] Palestinian Curriculum Development Center

que les outils offerts par le théorème liant dérivée et sens de variation, ne sont pas disponibles imposent, en quelque sorte une présentation de la fonction sur une base intuitive ; par opposition, occulter l'essence intuitive liée à l'aspect loi de variation, ne peut se concevoir que par une vision traditionnelle de l'enseignement où les concepts sont institutionnalisés et où les savoir-faire sont des applications de ceux-ci.

Il nous est apparu en conséquence, que même si notre étude s'intéresserait en priorité à l'organisation des contenus, elle ne pourrait ignorer complètement l'aspect pédagogique de chacun des deux enseignements dans la mesure où la présentation du savoir, contribue également, avec le savoir lui-même, à forger les connaissances des élèves.

Notre projet est alors de caractériser la fonction en tant qu'objet d'enseignement dans chacun des deux systèmes d'enseignement et de nous interroger sur les connaissances qui en résultent chez les élèves, soit :

- Quel objet fonction existe-t-il de part et d'autre ? Comment son enseignement est-il organisé du point de vue des contenus visés et des principales méthodes pédagogiques adoptées ?
- Puisque l'aspect loi de variation n'est pas abordé dans l'enseignement palestinien lors de l'introduction de la fonction, quel aspect de la fonction est donc présenté ? Comment s'opère le passage ensuite vers l'aspect loi de variation ?
- Puisque l'aspect loi de variation semble être le premier aspect visé dans l'enseignement français, comment est-il abordé en l'absence des moyens offerts par le théorème liant sens de variation et dérivée ? Comment évolue par la suite cet objet fonction après l'introduction de la notion de dérivée ? Y a-t-il, dans l'enseignement français une prise en compte d'un aspect du concept de fonction autre que celui de loi de variation ?
- Quelles sont à l'issue de ces enseignements respectifs les connaissances que l'on peut supposer être celles des élèves ? Que représente pour eux l'objet fonction ? Que sont-ils capables de faire avec l'objet fonction ?

Le cadre théorique naturel pour cette étude était celui de la transposition didactique, enrichi récemment en une théorie anthropologique du didactique mais nous avons complété notre travail en intégrant des aspects issus d'autres cadres théoriques et d'autres recherches. C'est ce que nous préciserons dans le premier chapitre de cette thèse, après une réflexion sur le concept de fonction, notamment à partir de son histoire. Nous pourrons alors définir plus précisément la problématique. Dans un deuxième chapitre, nous exposons de façon plus précise notre méthode d'analyse des programmes, des manuels et des exercices/problèmes de ces manuels par lesquels nous étudierons le rapport institutionnel à l'objet fonction. Ces deux chapitres constituent la première partie de notre travail. La deuxième est consacrée à la détermination du rapport institutionnel aux fonctions dans les deux institutions à travers l'analyse des programmes et manuels. Enfin, la troisième partie porte sur la partie expérimentale du travail : l'élaboration et les résultats d'un questionnaire proposé à des élèves de première française et de 12ème palestinienne. En conclusion, la comparaison des enseignements et des réponses des élèves nous aideront à dégager quelques perspectives concernant l'enseignement des fonctions au lycée. Nous reviendrons sur la présentation de l'ensemble de la thèse à la fin du premier chapitre.

PARTIE A

PROBLEMATIQUE

CADRE THEORIQUE ET METHODOLOGIE GENERALE

CHAPITRE I

PROBLEMATIQUE ET CADRE THEORIQUE

Avant de préciser le cadre théorique utilisé, nous rappelons quelques repères historiques concernant le développement du concept de fonction, repères qui nous serons utiles par la suite pour revenir sur la problématique et définir plus précisément notre objet d'étude.

1. Historique et analyse du concept

1.1 Historique du concept

Pour l'étude de la transposition didactique du concept de fonction, il nous a semblé nécessaire de commencer par présenter un aperçu de l'évolution historique de ce concept. Un aperçu, car il n'est pas question ici de faire une étude épistémologique et historique approfondie de la fonction, mais plutôt d'insister sur le fait que le concept de fonction, comme beaucoup d'autres concepts mathématiques, n'est pas brusquement apparu un jour dans la forme que nous lui connaissons, mais qu'il a varié au cours de l'histoire, et que les premières définitions de la fonction mettaient l'accent sur des caractéristiques qui ne sont plus celles qui apparaissent dans les définitions modernes de ce concept. Nous souhaitons donc, dans notre historique, mettre l'accent sur cette évolution, et sur l'ensemble des questionnements qui lui ont donné lieu, et qui ont provoqué cette évolution. Nous employons le terme "fonction" pour décrire des activités humaines qui se rattachent à ce concept bien avant qu'il n'apparaisse explicitement. Pour cette étude, nous avons utilisé principalement les travaux de Youschkevitch (1976), Dahan – Dalmedico (1986), Sierpinska (1992), René de Cotret (1989) et Noguès (1993).

La fonction chez les anciens

Les traces du concept de fonction apparaissent déjà en des temps très reculés, dans l'Antiquité, quelque 2000 ans avant JC, chez les Babyloniens, d'où nous sont parvenus des tables sexagésimales de carrés et racines carrées, de cubes et racines cubiques. Beaucoup plus tard, entre le IV ème siècle avant JC et le II ème siècle avant JC, sous le règne des Séleucides, les astronomes babyloniens utilisent deux nouvelles fonctions tabulées, la "step-function" (la fonction en escalier) et la "linear-zigzag-function" (la fonction affine par morceaux). En fait, ces premières fonctions, toutes exprimées sous forme de tables, avaient été créées en astronomie, dans un but pratique ; elles servaient à la compilation des mouvements de certains astres.

La fonction chez les Grecs

Plus tard, apparaissent chez les Grecs, de nouvelles formes du concept de fonction. A côté des nouvelles fonctions qu'ils établissent, par ailleurs toujours sous forme tabulée, il faut souligner les tentatives, quoique limitées, des Pythagoriciens pour déterminer les lois les plus simples en acoustique, *"tentatives typiques de la recherche de l'interdépendance quantitative de diverses quantités physiques"* [Youschkevitch, p.10]. Plus tard, mais quoique à une échelle limitée, d'autres moyens de représenter certaines relations fonctionnelles apparaissent : Dans la théorie des coniques, les "symptômes[2]" sont décrits verbalement alors que les courbes de troisième et quatrième degré et les quelques autres courbes algébriques connues des mathématiciens grecs étaient définies au moyen de constructions géométriques ou mécaniques particulières.

Outre cette variété de représentations qu'introduisent les Grecs de la période de l'Antiquité, on leur doit également des calculs de grandeurs et quelques études de limites : *"les fonctions furent tabulées en utilisant l'interpolation linéaire, et, dans les cas les plus simples, furent découvertes des limites de quotient de deux quantités infiniment petites, comme, par exemple, la limite de sin x / x quand x tend vers 0."* [ibid., p.12].

Cependant, malgré leur contribution indiscutable au développement du concept de fonction, leur utilisation du concept reste implicite. La fonction est utilisée en tant qu'outil implicite pour la résolution de problèmes particuliers, il n'y a pas de conception générale de la notion de fonction. En effet, non seulement il n'y a pas chez eux, *"...de mots équivalents au terme de fonction, mais encore (il manque) une allusion à cette idée plus abstraite et plus générale qui unifie des dépendances concrètes séparées, entre des quantités ou des nombres sous quelque forme que ce soit (description verbale, graphe, table; ...)"* [ibid., p.13-14]. Rien ne permet donc de penser que les fonctions étudiées par les Grecs étaient interprétées comme des exemples particuliers de relations fonctionnelles.

Par ailleurs, si l'on ne peut pas affirmer que les idées de changement et de quantité variable étaient étrangères à la pensée grecque, il n'en reste pas moins que la notion même de variable n'a pu se développer à cette époque. **Ceci transparaît dans la dichotomie des représentations de fonctions qui s'expriment verbalement ou par des graphiques particuliers pour ce qui est des lois de dépendance entre quantités physiques ou sous forme de tables conçues comme des relations entre des ensembles discrets de quantités constantes pour ce qui est de la dépendance entre des nombres. Cette dichotomie due à l'absence d'une théorie suffisante des nombres permettant d'unifier les études quantitatives et qualitatives a entravé longtemps la création du concept de variable, et donc de variable dépendante, notion clé du premier concept général de fonction.**

---

2 Un symptôme d'une section conique donnée, représente pour chaque point de la courbe donnée une seule et même dépendance fonctionnelle entre sa demi-corde y et le segment x du diamètre conjugué avec la corde, les extrémités de ce segment étant le point d'intersection du diamètre avec la corde et le sommet correspondant [Youschevitch, 1976, p.11]

René De Cotret montre comment c'est justement l'unification des représentations qualitatives et quantitatives des fonctions qui, vers la fin du Moyen Age, a permis de concevoir les valeurs de la variable, non pas en tant que valeurs isolées des phénomènes étudiés, mais en les intégrant dans le concept de grandeur variable, et a permis enfin de concevoir la fonction comme l'expression d'une relation entre deux éléments variables.

C'est seulement, vers la fin du 14ème siècle, en Europe, qu'apparaît une notion de fonction sous une forme plus générale. Avec l'intérêt nouveau marqué pour l'étude de phénomènes naturels comme la chaleur, la lumière, la densité, la distance, la vitesse, etc ...vus, non plus comme des phénomènes isolés, mais d'une façon plus générale, comme des "qualités" ou "formes" qui peuvent posséder des degrés d'intensité, et qui changent en relation avec la quantité de matière, de temps, se développe la "doctrine de l'intensité des formes", et sa partie la plus importante, la cinématique (où les qualités sont étudiées en relation avec le temps). Dans ce cadre, Oresme occupe une place de première importance, car il propose une représentation géométrique de ces fonctions, où justement la qualité (principalement la vitesse) est représentée en relation avec le temps. Les représentations d'Oresme témoignent d'une idée de variation continue qu'il explicite d'ailleurs en écrivant : "*Toute chose mesurable, excepté les nombres, est imaginée dans une manière de quantité continue.*" (Nicole Oresme, 1320 - 1382). Mais comme Oresme, précise Youschkevitch, interprète les nombres à l'image des Grecs comme étant un ensemble d'unités, le numérique n'est pas lié à ces représentations graphiques dont la description des propriétés reste essentiellement verbale.

On peut donc parler au 14ème siècle, de la conscience d'une idée générale de fonction (même si chacune d'entre elles est désignée par un terme particulier), de variation continue, et de quantité variable dépendante. Cependant, les représentations de fonctions restent essentiellement qualitatives (les fonctions sont décrites soit verbalement, soit par un graphe), et l'absence du quantitatif dans ces représentations freine le développement du concept de fonction.

La véritable révolution dans ce domaine se produira avec Descartes. Bien sûr, il y eut d'abord l'introduction des mesures quantitatives dans l'étude des qualités, grâce à l'invention de nouveaux instruments de mesure, la création de l'Algèbre symbolique de Viète, et l'extension du concept de nombre. Les premiers développements du concept de nombre ont permis d'abord, grâce d'ailleurs au développement du symbolisme algébrique d'unifier nombre discret et quantité continue, et ont fait que les nombres ont pu commencé à être porteurs du caractère de continuité. Descartes appliquant alors l'Algèbre symbolique à la Géométrie va faire apparaître clairement, grâce aux équations, l'idée de dépendance entre deux variables x et y : *"pour la première fois et d'une façon complètement claire, est soutenue l'idée qu'une équation en x et y est un moyen pour introduire une dépendance entre des* *quantités variables de manière à permettre le calcul des valeurs de l'une d'elles correspondant aux valeurs données de l'autre."* [ibid., p.25]

C'est ainsi qu'est apparue une nouvelle façon de représenter les fonctions, non plus seulement par une description verbale, par un graphe ou encore une table, mais analytiquement, par le moyen de formules et d'équations. Par ailleurs, la méthode analytique a l'avantage de tendre à l'unification des différentes représentations de fonctions, en particulier des courbes et des représentations analytiques. Mais puisque la notion de fonction reste fortement attachée à l'étude de courbes dans un contexte général de géométrie analytique, il semble que la distinction entre la *variable indépendante* et ses *variables dépendantes* ne soit pas clairement établie. C'est en particulier le point de vue de Sierpinska qui estime que même chez Newton cette distinction n'est pas claire, de même que l'importance de l'univocité n'apparaîtra que bien plus tard.

Par ailleurs avec Descartes, les fonctions qui peuvent s'exprimer sous cette forme nouvelle se limitent aux fonctions algébriques (obtenues par des opérations algébriques simples), et c'est la découverte, au milieu du 17ème siècle, de la manière de développer des fonctions en série entière qui a rendu possible la représentation analytique de toutes les relations fonctionnelles exprimées à l'époque. Une nouvelle ère dans l'histoire des mathématiques s'ouvre, où la fonction en tant qu'expression analytique occupe la place centrale en conférant à son étude le statut de véritable calcul. Cette nouvelle méthode de représentation de fonctions s'étend rapidement à d'autres branches mathématiques, en particulier celle du calcul infinitésimal qui commence véritablement à prendre forme. Néanmoins, les nouveaux concepts de fonctions, et les définitions correspondantes ne parviennent pas à se débarrasser de leur "carapace" géométrique ou mécanique, en liaison avec les problèmes qui leur ont donné lieu. C'est ainsi que Newton propose une conception mécanique du calcul infinitésimal, qu'il a commencé à développer en 1664-1665. Celle-ci se ramène à la résolution des deux principaux problèmes du calcul infinitésimal, la différentiation et l'intégration qui sont vus respectivement comme la détermination de la vitesse d'un mouvement étant donnée la loi de la distance et la détermination de la distance connaissant la vitesse du mouvement. Leibniz, de son côté, arrive à ces mêmes résultats à partir de considérations géométriques.

Jusque là, il n'y a toujours pas de terme général pour représenter l'idée de dépendance entre variables, ni bien sûr de définition explicite de ce concept mathématique. La première définition de la sorte apparaît avec Bernoulli, qui présente la fonction comme une expression analytique : *"on appelle fonction d'une grandeur variable une quantité composée de quelque manière que ce soit de cette grandeur variable et de constantes"*[Bernoulli (1718), d'après Youschkevitch, p.35]. Cette définition est fondamentale dans le sens où elle impose la fonction en tant qu'expression analytique, ainsi qu'une nouvelle façon de considérer non seulement les fonctions mais également les concepts de base du calcul infinitésimal qui vont perdre leur formulation géométrique ou mécanique, au profit d'une formulation algébrique.

Le développement ultérieur essentiel du concept de fonction est amené par Euler. Certes, la définition qu'il propose, en 1748, ne dépasse pas le cadre de celle donnée par Bernoulli : *"Une fonction de quantité variable est une expression analytique composée de quelque manière que ce soit, de cette quantité et de nombres ou de quantités constantes"* [Euler (1748), d'après Youschkevitch, p.36]. Cependant, et pour la première fois parallèlement à cette définition, il définit également les concepts de constante et de variable, ainsi que les méthodes permettant d'obtenir des expressions analytiques de fonctions, ce qui conduit à une première classification des fonctions. Pour lui, les fonctions peuvent être obtenues par des opérations algébriques, des opérations transcendantes comme les opérations trigonométriques, logarithmiques, exponentielles, et d'autres opérations fournies par le calcul intégral. Les fonctions peuvent être implicites, explicites, paramétriques ou encore obtenues à partir de l'inverse d'une autre fonction, les fonctions peuvent être aussi bien uniformes (une image) que multiformes (plusieurs images). Il ramène enfin toutes ces différentes méthodes d'expression de fonctions à une seule expression analytique dont il pense que *"la forme universelle (...) est une série entière infinie de la forme : $A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + \dots$"* [ibid., p.38].

Par ailleurs, comme le concept de fonction est toujours lié, à cette époque, à l'étude analytique des courbes, les fonctions sont donc essentiellement analytiques dans le sens d'Euler qui distingue les "vraies" fonctions, données par une seule expression analytique sur tout le domaine de la variable qu'il appelle "fonctions continues", des autres fonctions "discontinues" ou "mixtes" dont l'expression analytique varie sur le domaine de la variable.

Cependant, à ce stade de l'évolution du concept de fonction, et justement, du fait de la force du symbolisme algébrique (ou analytique), Euler et les mathématiciens de cette époque, ont tendance à identifier la fonction avec son expression analytique. Cette identification est d'ailleurs très claire dans la définition proposée. Nous reviendrons sur le problème que pose cette identification dans notre paragraphe 4, avec les travaux de Sfard. Pour l'instant, nous en retenons la puissance du rôle des différents moyens de représenter une fonction, tantôt moteur du développement d'une conception plus générale de la fonction, tantôt au contraire frein de ce développement, les modes de représentations de fonctions apparaissent jouer un rôle primordial dans la conceptualisation de cette notion.

C'est en s'attaquant au célèbre problème des cordes vibrantes en physique mathématique (où sont étudiées les vibrations infiniment petites d'une courbe finie, homogène, fixée à ses deux extrémités), à l'origine d'une longue controverse entre les mathématiciens de l'époque, qu'Euler va percevoir l'existence d'autres fonctions qui ne peuvent être classées ni comme "continues", ni comme "mixtes" (toujours au sens d'Euler) et qui ne peuvent tout simplement pas être exprimées de façon analytique. Il propose alors, en 1755, une nouvelle définition de la fonction sur la base d'une correspondance arbitraire entre des paires d'éléments, chacun d'eux appartenant à son propre ensemble de valeurs des quantités variables : *"Si certaines quantités dépendent d'autres quantités de telle manière que si les autres changent, ces quantités changent aussi, alors on a l'habitude de nommer ces quantités fonctions de ces dernières; (...) Si, par conséquent, x désigne une quantité variable, alors toutes les autres quantités qui dépendent de x de n'importe quelle manière ou qui sont déterminés par x, sont appelées fonctions de x."* [Euler (1755), d'après Youschkevitch, p.49]

Malgré cette nouvelle définition donnée sous une forme aussi générale et abstraite que possible, Euler continue à ne considérer que les fonctions analytiques. Par ailleurs, les fonctions, à ce stade ne sont pas encore univoques. Cependant, cette définition eut un effet positif sur le développement ultérieur des mathématiques en ce qu'elle amena l'étude des classes de fonctions, à commencer par la classe des fonctions "continues" et la classe des fonctions "mixtes", étude qui commença par la tentative de caractériser les propriétés particulières à chacune des classes. L'étude des classes de fonctions a été primordiale pour le développement du concept de fonction comme le souligne Sierpinska : *"The need to extend the notion of function beyond those expressed analytically did not appear in history before it was time to formulate general theorems on large classes of relationships between variables, and to organise results obtained for particular functions."* [Sierpinska, p.46] C'est ici que la théorie générale des fonctions analytiques qui se développera au 19 e siècle avec Cauchy, Rieman et Weisstrass prend ses racines.

La notion de continuité du point de vue d'Euler est critiquée par Cauchy (en 1780) qui montre, sur un exemple très simple, qu'une fonction qui apparaît comme discontinue peut être réécrite de façon à apparaître continue : il s'agit de la fonction égale à x si x 0, et à -x si x < 0, qui peut également être notée rac (x^2) pour - < x < + . Fourier (en 1807) soutient, dans le même sens, qu'il est possible de représenter par des séries trigonométriques non seulement des fonctions continues mais aussi des fonctions discontinues. Cauchy propose alors une nouvelle conception de la continuité qui n'est plus subordonnée à l'unicité de l'expression analytique de la fonction, et l'étude de la classe des fonctions continues va prendre ainsi un nouveau départ. Les travaux des mathématiciens de l'époque sur les séries trigonométriques contribuent, en élargissant la classe des fonctions exprimables analytiquement, à préciser les concepts d'intégration, de convergence et de sommation de séries.

Cette nouvelle conception de la continuité rend caduque la définition traditionnelle de la fonction comme expression analytique, la définition générale de la fonction d'après Euler est alors de plus en plus largement utilisée. Les célèbres mathématiciens du 19ème siècle que sont Fourier, Lobatchevsky, et Dirichlet travaillent sur cette nouvelle conception de la fonction. Lobachevsky en 1834, et Dirichlet en 1837 aboutissent à des définitions de la fonction qui sont directement inspirées de la définition générale d'Euler. Quoique ces définitions libèrent, de façon tout à fait claire, le concept de fonction de celui de fonction analytique, elles se restreignent aux fonctions continues. Cela ne semble pas être dû à l'absence d'intuition, chez ces mathématiciens, concernant la possibilité d'étendre cette définition aux fonctions discontinues, preuve en est l'exemple de fonction discontinue en chaque point de l'intervalle 0 x 1 : *"f(x) = 0 pour les valeurs rationnelles de x et f(x) = 1 pour les valeurs irrationnelles de x"*, que l'on doit à Dirichlet. Il semble tout simplement que *"la classe de fonctions enfin clairement identifiée, la classe de fonctions continues prenait un intérêt considérable"* [explication de Medvedev cité par Youschkevich, p.61].

C'est le mathématicien Hankel qui va œuvrer à diffuser largement cette conception de la fonction en proposant en 1870 une définition affranchie du concept de continuité, à laquelle il donnera le nom de Dirichlet :

> *"On dit que y est fonction de x si à chaque valeur de x d'un certain intervalle correspond une valeur bien définie de y sans que cela exige pour autant que y soit définie sur tout l'intervalle par une expression mathématique explicite de x."* [Hankel, d'après Youschkevich, p.61].

Soulignons la puissance de généralisation de cette définition du fait de l'insistance mise sur l'arbitraire de la correspondance entre deux valeurs. Cependant cette définition générale de la fonction se restreint néanmoins aux fonctions définies entre ensembles de nombres. Effectivement, à cette époque et jusqu'au début du 20ème siècle, ce sont essentiellement les fonctions numériques et à variable réelle ou complexe qui sont étudiées.

Ainsi, une très longue période allant de la définition générale de Euler de 1755, à sa vulgarisation, puis à son adoption dans les manuels d'enseignement de l'analyse vers la fin du 19ème siècle - début du 20ème siècle, a été nécessaire pour que le concept de fonction s'affranchisse de sa représentabilité analytique et soit conçu comme une correspondance arbitraire univoque. L'étude des classes de fonctions s'intensifie, classes maintenant déterminées à partir des propriétés des fonctions (continues, différentiables, à variations bornées, discontinues en certains points, ...).

Mais l'évolution du concept de fonction n'est pas encore terminée, et le 20ème siècle amène des polémiques très vives car cette définition, malgré les très larges possibilités qu'elle ouvre pour le développement de la théorie des fonctions, entraîne des difficultés logiques. En effet, les mathématiciens du 20ème siècle, en but à des questionnements concernant les fondements des concepts mathématiques, rejettent la définition de Dirichlet comme n'étant pas assez rigoureuse et, sur la base de la théorie des ensembles, Bourbaki, propose en 1939, une définition de la fonction en tant qu'ensemble de couples ordonnés. Cette conception généralisatrice de la fonction permet, d'une part, d'élargir la classe des fonctions considérées en analyse standard, et ce, notamment à la suite de la réponse positive donnée par Lebesgue à la question de savoir si on peut *"considérer comme parfaitement définies et données des fonctions dont on ne saurait calculer la valeur pour chaque valeur donnée de la variable avec une approximation fixée"* [Noguès, p.7]. Elle permet également, d'autre part, de lier logiquement les différentes branches mathématiques où intervient ce concept, l'analyse classique certes, mais aussi l'analyse fonctionnelle, où les fonctions considérées sont elles-mêmes éléments d'ensembles, la géométrie (avec les projections et transformations dans le plan entre autres), l'algèbre dans l'étude des structures algébriques (de groupes, d'espaces vectoriels, par exemple, etc).

La longue, et turbulente histoire du concept de fonction, fait ressortir la difficulté d'une conceptualisation générale de la notion de fonction. Les deux aspects principaux que renferme ce concept (loi de dépendance entre deux variables et loi arbitraire), mais aussi l'utilisation implicite de la fonction pendant de longs siècles, sont intimement liés d'une part à différentes façons de la représenter (principalement à l'aide de tables, graphiques et formules), mais aussi à différents problèmes mettant en jeu la notion de fonction (notamment des problèmes d'origine géométrique et mécanique). L'histoire fait en particulier ressortir que l'unification des différentes représentations possibles de la fonction, et surtout l'unification des graphiques et des équations, a joué un rôle primordial dans la conceptualisation de la fonction en tant que loi de variation ; puis que la conception de la fonction dans une forme plus générale est due principalement, à la décontextualisation du concept relativement aux problèmes qui lui ont donné naissance, ainsi qu'à son affranchissement relativement à ses divers modes de représentations. C'est partant de ces considérations que nous estimons que les différents aspects de la fonction, les différentes représentations qui en sont possibles, aussi bien que les problèmes permettant de mettre en jeu la fonction, ou plus généralement les cadres dans lesquels peuvent apparaître cette notion, forment un tout qui s'équilibre au sein d'une organisation donnée de l'enseignement de la fonction et en fait sa spécificité.

C'est donc pour permettre l'étude de chacune des deux organisations, française et palestinienne, de l'enseignement de la fonction, et faire ressortir l'équilibre interne de chacune d'elle, que nous allons revenir dans la suite de ce premier chapitre, sur les différents éléments pouvant influencer cette organisation. Il est en effet nécessaire de préciser chacun de ces éléments, et de les intégrer dans le cadre théorique général que nous avons choisi pour mener cette étude. Nous commencerons par la caractérisation, à des fins d'enseignement, des deux aspects conceptuels que renferme la notion de fonction.

1.2 Analyse du savoir, la fonction objet mathématique et objet culturel

Pour l'étude de la transposition didactique de la notion de fonction il nous faut d'abord caractériser le savoir constitutif de la notion de fonction, soit le contenu mathématique et culturel et social de la notion de fonction, car ce sont ces savoirs qui font l'objet d'une transposition dans l'enseignement. Nous baserons notre analyse du savoir concernant la notion de fonction sur l'historique ci-dessus. Remarquons d'abord que cette évolution historique peut grossièrement se caractériser en trois étapes essentielles: premièrement, la période s'étendant de l'antiquité jusqu'à Descartes au 18ème siècle, deuxièmement la période allant de Descartes jusqu'au début du 19ème siècle, troisièmement enfin, la période moderne.

La première période est, nous l'avons vu, une période où l'idée de fonction n'est pas encore *conceptualisée*, la fonction est utilisée en tant qu'outil implicite dans la résolution de problèmes particuliers. Soulignons qu'à la fin de cette période cependant, et grâce notamment à une représentation adéquate due à Oresme, une notion générale de la fonction commence à prendre forme mettant en avant la notion de *quantité variable* et de *dépendance*, ces deux notions s'exprimant sous forme géométrique et mécanique.

La deuxième période, voit la caractérisation de la fonction en tant que relation de dépendance entre deux variables par Descartes à l'aide de la représentation algébrique (ou plus largement analytique). Ainsi les notions de *dépendance* et de *variable* sont clairement identifiées, même s'il n'y a pas encore de terme général pour désigner la fonction, et que les fonctions exprimables de la sorte sont relativement limitées. Le début de cette période prolonge la période précédente en ce que le concept de fonction est profondément rattaché aux problèmes géométriques et mécaniques qui lui ont donné naissance. Puis, les formulations analytiques prenant le dessus sur les formulations géométriques et mécaniques, les premières définitions apparaissent où la fonction est confondue avec son expression analytique. On peut remarquer la place centrale de la notion de variable dans ces définitions (se reporter aux définitions de Bernoulli et d'Euler). L'écrasante majorité des fonctions étudiées durant toute cette époque est d'origine analytique et c'est, entre autres, l'élargissement graduel de la classe des fonctions analytiques, qui va permettre l'émergence de définitions de la fonction plaçant véritablement cette notion à un niveau conceptuel.

La troisième période est enfin celle où s'impose le concept de fonction comme correspondance arbitraire. Si la première définition de la sorte apparaît avec Euler en 1755, nous ne faisons débuter cette période que plus tard, soit vers le début du 19ème siècle, quand cette conception de la fonction est effectivement largement admise dans le milieu mathématicien, et c'est le nom de Dirichlet qui lui est couramment rattaché. Les fonctions analytiques occupent toujours une place prépondérante mais la classe des fonctions étudiées s'est élargie et concerne maintenant les fonctions numériques à variables réelles ; par ailleurs l'intérêt de l'étude de fonction s'est déplacé et porte essentiellement sur les classes de fonctions. La dernière phase de l'évolution du concept de fonction débute alors qui va se terminer avec la vision moderne de la fonction sur la base de la théorie des ensembles à laquelle se rattache le nom de Bourbaki.

Fonction, loi de variation, et fonction, loi ensembliste

Les deux définitions générales de la fonction liées à cette troisième période sont essentielles pour nous et notre étude de la transposition didactique de ce concept : elles caractérisent en effet les deux modes d'appréhension de la fonction, le premier mode d'appréhension étant lié à la définition de Dirichlet, et le deuxième à la définition de Bourbaki. Les adjectifs premier et deuxième renvoient, bien sûr, à leur ordre d'apparition au cours de l'évolution historique du concept. Si les définitions du type de celle de Bourbaki, ou qui s'en inspirent, sont celles consacrées par l'enseignement de la fonction depuis le milieu du 20ème siècle dans beaucoup de pays, beaucoup de voix s'élèvent parmi les spécialistes pour critiquer cet état de fait, considérant qu'une définition du type de celle de Dirichlet serait plus adaptée à l'enseignement et permettrait une approche beaucoup plus intuitive et pratique du concept de fonction. Examinons de plus près les caractéristiques que renferment, du point de vue de l'enseignement, ces deux types de définition :

La définition de Dirichlet *"si une variable x est reliée à une variable y de telle façon que, quelle que soit la valeur numérique assignée à x, il existe une loi selon laquelle une valeur unique de y est déterminée, alors y est dite fonction de la variable indépendante x."* (cf le paragraphe précédent), s'est donc vue remplacée dans l'enseignement, vers le milieu de ce siècle par la **définition moderne donnée sous la forme** :

> *"une fonction f de A dans B est une relation qui à tout élément x de A associe au plus un élément y de B"* ou, sous la forme *"une fonction f de A dans B est un sous-ensemble du produit cartésien A x B tel que pour chaque x appartenant à A il y a au plus un y appartenant à B tel que (x, y) appartienne à f"*.

Si nous avons lié les deux dernières définitions présentées, comme relevant du même mode d'appréhension, il nous faut souligner que tout dépend bien sûr, pour la première d'entre-elles, du sens qui est donné au mot *relation* ; dans la définition que nous avons énoncée, nous supposons que le terme de relation aura préalablement été présenté comme un ensemble de couples ordonnés et que relation et fonction y sont donc liées dans cet esprit. Nous verrons que c'est précisément ainsi que sont définies les fonctions dans l'enseignement palestinien. Il ne s'agit donc pas, ici, d'une idée de la relation pris dans un sens informel de correspondance, auquel cas cette définition serait plutôt à rapprocher de celle de Dirichlet.

En examinant de plus près la définition de Dirichlet, on peut remarquer, outre le fait que la correspondance n'est envisagée qu'entre des ensembles de nombres, que cette correspondance est établie selon une loi bien définie (une *règle de correspondance* même si celle-ci n'est pas forcément analytique), et que cette loi lie deux variables entre elles, l'une dépendant de l'autre. Cette définition renferme donc trois aspects : *l'aspect moderne de correspondance univalente* mais également celui de *variation* et de *dépendance*. L'idée de dépendance y est clairement exprimée par les termes *reliée* et *variable (in)dépendante*, mais aussi indirectement par la *loi (de correspondance)*. L'idée de variation, elle, apparaît implicitement par l'utilisation du mot *variable*, mais elle est également intimement liée à l'idée de *dépendance* car comme le souligne René De Cotret *"le seul moyen de s'apercevoir qu'une chose dépend d'une autre est de les faire varier chacune à leur tour afin de constater quel effet a la variation. Mais tant (...) qu'il n'y aura pas de variation, il sera presque impossible de savoir s'il y a dépendance."* [René De Cotret, p.117] Nous verrons que la définition de la fonction que propose le manuel français de 2nde que nous avons retenu, peut être rapprochée de la définition de Dirichlet.

Le concept de fonction, selon son premier mode d'appréhension, était largement suffisant dans les milieux mathématiciens, jusqu'au début du 20ème siècle, étant donné les types de fonctions utilisées, essentiellement numériques à variables réelles, et l'origine mécanique et plus généralement, physico-mathématique, des problèmes considérés. Cette conception de la fonction se rattache plus facilement aux phénomènes réels connus, permet de les modéliser et donc de mieux les comprendre. En résumé, le premier mode d'appréhension de la fonction se traduit par sa perception en tant que *loi de variation*.

Dans les définitions plus modernes, inspirées de celle de Bourbaki, il est possible de constater que des trois aspects constitutifs de la notion qu'étaient la correspondance, la dépendance et la variation, seul l'aspect de correspondance a été retenu. Nous n'insisterons pas sur la propriété d'univalence qui apparaît déjà dans la définition de Dirichlet. La fonction dans son évolution s'est donc départie des idées de variation, de dépendance et même de règle de correspondance pour ne conserver que l'idée de correspondance. Cette correspondance traduit l'accent mis sur l'idée d'arbitraire, arbitraire qui porte à la fois sur les deux ensembles d'éléments en jeu et sur la relation entre eux. En effet, les deux ensembles peuvent être quelconques et pas seulement des ensembles de nombres, la relation, elle, n'est plus nécessairement une règle bien définie. En résumé, le deuxième mode d'appréhension de la notion de fonction se traduit par sa conception en tant que *loi ensembliste*.

Ainsi, la définition de Bourbaki, qui généralise la conception de la fonction selon Dirichlet a fait disparaître les traits de la fonction qui en semblaient caractéristiques. Non que ces traits ne soient plus appropriés à la fonction, loin de là, mais ces traits ne sont plus représentatifs de toutes les fonctions possibles mais seulement d'une certaine classe de fonctions. Maîtriser un concept dans son sens le plus général, ne doit pas exclure la possibilité de mettre en œuvre une vision plus restrictive de ce concept qui peut être mieux adaptée pour une étude donnée. Le mathématicien, lui, est capable de concevoir la fonction selon ce sens plus restrictif, si son travail l'exige. A ce propos, René De Cotret cite Niel et Shuard : *"Unfortunately, the idea of functional dependence has been totally eliminated from this formal definition of function. In the process of generalisation, the rule which was the essential idea of the function has vanished. Enquiries among mathematicians... (show that) ... It is only when they need the logic of an axiomatic development that working mathematicians discard the idea of a rule in favour of a subset of A x B."* [Niel et Shuard d'après René De Cotret, p.118]. Dans le même sens, Sierpinska doute que le choix de présenter la fonction selon son deuxième mode d'appréhension aux élèves de lycée soit justifié par des raisons didactiques ou épistémologiques [Sierpinska, p.49] et estime qu'une introduction de la fonction selon le premier mode d'appréhension serait plus judicieux.

Mais la fonction est également objet culturel et social. C'est, d'une part, l'un des concepts mathématiques les plus utilisés en dehors des mathématiques. En tant qu'outil de modélisation des relations de dépendance entre des phénomènes de la nature ou de la société, elle est présente aussi bien en physique, chimie, économie qu'en géographie, sociologie, pour ne citer que ces matières. L'enseignement actuel ne peut donc en faire l'impasse. Outre son utilisation dans tous les domaines scientifiques, il ne faut pas négliger, d'autre part, sa présence dans l'expérience quotidienne de tout individu. Non seulement dans notre expérience quotidienne et, dès notre plus jeune âge, de tous les phénomènes liés au mouvement (vitesse, accélération, etc....) du fait de la diversité des moyens de transport modernes mais même dans nos activités de tous les jours les plus anodines (prix / quantité quand nous faisons nos courses, nos cotisations à la sécurité sociale relativement à nos revenus, ...). Soulignons cependant, que dans l'expérience individuelle de la notion de fonction, celle-ci n'apparaît pas, en général, de façon explicite. Le terme même de fonction est rarement employé; on dira plutôt que tel phénomène est *lié* à tel autre, ou *dépend* de tel autre. Cette utilisation de la fonction rappelle donc l'utilisation de la fonction telle que nous l'avons vue dans la première période historique, soit une utilisation intuitive et pratique précédant sa conceptualisation.

L'importance de la notion de fonction, sa présence dans des disciplines diverses, permettant de l'exploiter à des fins didactiques dans le but de monter le lien possible entre les mathématiques et les autres disciplines enseignés, mais aussi permettant de rattacher son étude à des problèmes pratiques afin d'en éclairer le sens, alimente la polémique, plus peut-être que cela n'est le cas pour d'autres concepts, sur la façon la mieux appropriée pour introduire ce concept. Les caractéristiques des deux modes d'appréhension de la fonction, mis en relief, nous voudrions étudier les choix fait, dans chaque système d'enseignement, pour les aborder et les coordonner.

2. Cadre théorique

2.1 Transposition didactique, approche anthropologique et problématique écologique

Le concept de transposition didactique est un concept bien connu en didactique des mathématiques. Introduit en 1985 par Chevallard, il vise à pointer l'écart qui existe entre le savoir savant et le savoir à enseigner, et entre le savoir à enseigner et le savoir enseigné. A ce stade, il s'agit d'un concept théorique, qui n'a pas véritablement de visée pratique mais qui donne une conscience épistémologique quant aux concepts enseignés. Plusieurs recherches ont ensuite utilisé cet objet pour des études précises, on peut citer celle de Conne [Conne, 1981] qui montre à travers des observations de classe la distance entre "l'objet à enseigner" et "l'objet enseigné", et celle de Tavignot [Tavignot, 1993] qui le suit "à la trace" sur un contenu particulièrement précis, la symétrie orthogonale en classe de sixième française ainsi que celle de Chevallard avec Johsua sur la distance[3].

Le cadre théorique que constitue l'approche anthropologique développé plus tard par Chevallard [Chevallard, 1992] va englober et généraliser le concept de transposition didactique. Avant de ressituer la transposition didactique dans la théorie de l'anthropologie cognitive, il nous semble nécessaire de présenter quelque peu cette dernière. Notons pour commencer que le qualificatif d'*anthropologique* n'est pas sans raison. Sa raison première est que la théorie anthropologique *"situe l'activité mathématique, et donc toute autre activité qui lui serait liée, dans l'ensemble des activités humaines et des institutions sociales"* [Chevallard, 1999, p.91]. Ce qui conduit, quand on adopte cette approche à négliger toutes frontières institutionnelles à l'intérieur desquelles "il est pourtant d'usage de se tenir", et donc à questionner ce qui est généralement présenté comme "allant de soi, quasi naturel et en fin de compte obligé." [ibid., p.91]

Chevallard base sa théorie sur la notion d'objet. Il considère que "tout est objet". Le savoir mathématique, en particulier, en est un, qui nous intéresse justement dans la transposition didactique. Deux autres types d'objets sont essentiels dans cette théorie, les personnes (notées X) et les institutions (notées I). Un objet O existe dès lors qu'une personne ou qu'une institution reconnaît cet objet comme existant pour elle, ou de façon plus précise s'il existe *un rapport personnel* de X à O (noté R(X,O)) ou *institutionnel* de I à O (noté R(I,O)). Ainsi, *un objet n'existe* que parce qu'il est connu d'une personne (ou d'une institution), il n'existe *qu'en tant qu'objet de connaissance.* Si l'on a parlé jusque là de *personne* autant que d'*institution,* il faut préciser le rôle central que joue l'institution dans cette théorie. Puisque l'institution peut être n'importe quoi, la personne ou le personnage social que nous sommes ne va se définir que par rapport aux diverses institutions auxquelles il appartient, ainsi tout rapport personnel à un objet dépendra d'une façon ou d'une autre du rapport qui existe entre

---

3 "La transposition didactique, du savoir savant au savoir enseigné avec un exemple de transposition didactique" par Yves Chevallard et Marie-Alberte Joshua, 1991, Editions la Pensée Sauvage, Grenoble.

cet objet et l'institution à laquelle se réfère la personne. Et c'est dans ce cadre que nous en revenons à la théorie de la transposition didactique.

Il nous faut tout d'abord parler de la notion de savoir, qui est tout de même le principal objet d'étude dans la théorie de la transposition didactique. Les savoirs sont des objets qui peuvent être appris ou enseignés, et ne peuvent être connus (donc ne peuvent devenir des objets de connaissance) sans avoir été appris. Le terme apprentissage renvoie au terme institution dans le sens où un apprentissage ne peut se faire qu'au sein d'une institution, l'institution étant bien sûr prise ici au sens large qu'elle a dans la théorie de l'anthropologie cognitive. Les savoirs peuvent être utilisés, et pour exister doivent être produits. Ainsi, tout savoir S, du point de vue de sa genèse sociale, a un habitat originaire, soit l'institution qui l'a produit. Sa présence dans une autre institution implique qu'il y ait eu transposition de ce savoir, de son habitat originaire dans cette autre institution. Par ailleurs, connaître un savoir dans une institution donnée I, signifie avoir développé un rapport personnel au savoir conforme à un certain rapport au savoir dans l'institution. **Le concept de transposition didactique d'un savoir, en particulier celui de la fonction en classes de lycée français et palestinien, dans le cadre plus général de l'anthropologie cognitive, nous permet donc de nous interroger sur le rapport au savoir fonction de chacune des deux institutions que sont le lycée français et le lycée palestinien d'une part, et de nous interroger sur la signification que revêt connaître le concept de fonction pour les élèves des lycées français, et palestiniens.**

Mais justement comment analyser ce savoir (fonction) et le rapport à ce savoir dans les deux institutions qui nous intéressent ? Cette question nous amène à considérer un deuxième postulat de base de la théorie anthropologique: "*toute* activité humaine régulièrement accomplie peut être subsumée sous un modèle *unique*, que résume le mot de *praxéologie.*" [ibid., p.92] Le savoir mathématique entrant dans le cadre des activités humaines en ce qu'il est *conçu* dans la sphère savante, *reconçu* pour la sphère scolaire (par justement la transposition didactique), *enseigné* (par les enseignants) et *appris* (par les élèves), qui sont autant d'activités humaines, peut également être analysé sur la base de sa praxéologie.

On parle de praxéologie mathématique, ou d'organisation mathématique, quand la praxéologie examinée sert de modèle à une activité mathématique. Une praxéologie, et donc une praxéologie mathématique, se détermine par les tâches ou types de tâches, les techniques, les technologies et les théories qui la constituent. Nous nous baserons davantage sur [Chevallard, 1999] pour présenter les notions clés que sont celles de praxéologie, tâche, technique, technologie et théorie. En effet, si elles sont déjà présentes dans [Chevallard, 1995] elles s'y inscrivent dans un cadre qui dépasse largement nos besoins puisque Chevallard présente là un modèle très théorique d'analyse de l'activité du professeur de mathématiques. En cela, le second article nous parait plus éclairant, car quoique présentant un cadre toujours général d'analyse des *pratiques enseignantes*, il adopte néanmoins un point de vue moins théorique, et se soucie en particulier de la méthode d'utilisation de sa théorie pour l'étude d'un thème précis. Ainsi, il y propose pour étudier les pratiques enseignantes relatives à un certain thème d'étude mathématique, de distinguer la réalité mathématique qui peut se construire dans une classe mathématique où l'on étudie ce thème, de la manière dont peut se construire l'étude de ce thème. La *réalité mathématique* n'est autre qu'une *praxéologie mathématique* ou organisation mathématique alors que la *manière de l'étudier* est une *praxéologie didactique*. Or, **la praxéologie mathématique relative au thème d'étude de la fonction est justement l'objet de notre intérêt et c'est à travers l'étude de cette praxéologie que nous nous proposons d'étudier l'objet fonction dans les lycées français et palestiniens.**

Une praxéologie mathématique se définit, nous l'avons dit, par le système de tâches, ou types de tâches, mathématiques qui la composent. Une *tâche* t, ou un type de tâches T, est une activité relativement bien circonscrite. Pour nous il s'agira par exemple de *déterminer le domaine de définition d'une fonction donnée*, d'*étudier les variations d'une fonction donnée*, etc. Mais pour qu'une tâche t, ou qu'un type de tâches T, puisse exister, il faut qu'existe une manière de l'accomplir, une *technique*. Ainsi, la praxéologie relative à la tâche t précise une technique τ relative à t. Elle contient donc un bloc pratico-technique [t/ τ] (ou [T/ τ]) que Chevallard identifie à ce que l'on nomme couramment un *savoir-faire*.

Concernant la notion de technique quelques remarques sont à faire : Une technique ne réussit que sur une partie des tâches du type T auquel elle est relative ; cette partie se nomme la *portée* de la technique. En ce sens, une technique peut être supérieure à une autre parce qu'elle réussit sur une partie plus grande de tâches de type T. C'est ce que nous étudierons lorsque plusieurs techniques se trouvent proposées pour la réalisation d'une même tâche, et en particulier, lorsqu'une technique introduite relativement à une tâche, à un niveau scolaire donné vient prendre la place, parce que plus performante, d'une technique introduite à un niveau scolaire inférieur. Notons enfin qu'une technique n'est pas nécessairement algorithmique malgré "une tendance assez générale à l'algorithmisation" [Chevallard, 1999, p.93].

De façon similaire, pour qu'une technique τ existe, il faut qu'elle puisse être justifiée par un discours rationnel sur la technique, ce discours rationnel est appelé la *technologie*, notée θ, de la technique. Cette fonction de justification qui consiste à assurer que la technique donne bien ce qu'elle est prétendue donner, n'est cependant pas la seule fonction d'une technologie. Une technologie a ainsi deux autres fonctions celle de d'explication de la technique, qui consiste à expliquer pourquoi la technique donne ce qu'elle donne, et celle de production de techniques. Ces trois fonctions sont inégalement remplies pour une technologie donnée. En général, en mathématiques, la première fonction l'emporte sur les deux autres, mais même avec cette première fonction, il n'est pas toujours facile de distinguer une technologie. Ainsi, insiste Chevallard, il nous faut admettre comme un fait d'observation qu'une technique relative à une tâche donnée "est toujours accompagnée d'au moins un embryon ou, plus souvent encore, d'un vestige de technologie. En nombre de cas même, certains éléments technologiques sont intégrés dans la technique" [ibid., p.94].

Par exemple, la technique qui consiste à *regarder l'élément présent à l'autre bout d'une* flèche pour *déterminer l'image d'un élément* par une fonction exprimée dans le registre du diagramme sagittal, illustre le cas d'une technique qui intègre certains éléments de la technologie. D'ailleurs, la technique se confond presque, pour cette tâche, avec la technologie. Technologie qui est ici la définition d'image. Ce qui n'est pas le cas de la tâche de *détermination des variations d'une fonction*, si la fonction f concernée est donnée par une expression algébrique et si la technique consiste, par exemple, à étudier le signe de la dérivée f'. En effet, pour appliquer cette technique, il faut *déterminer f', étudier le signe de f', traduire le signe de f' en termes de variations de f.* Ici, les différentes étapes de la technique, en particulier les deux premières, tendent à distinguer la technique de la technologie qui se rapporte essentiellement à la troisième étape (relation entre signe de f et variations de f'). Mais nous reviendrons sur ces exemples dans le chapitre II.

Par ailleurs dans une institution donnée, si une seule technique existe relativement à une tâche particulière, alors cette technique ne nécessite plus de justification voire ne relève plus d'une technologie évidente. La technologie a alors tendance à se faire oublier. Notons enfin qu'en mathématique le niveau technologique est le plus souvent constitué d'un ensemble de définitions ou de théorèmes. Au niveau qui nous intéresse, c'est le plus souvent un seul théorème ou une seule définition qui justifie la technique. A un niveau plus élevé, on peut avoir toute une partie de théorie. Par exemple pour étudier une suite ou une limite, on a le choix entre plusieurs techniques et on peut avoir une technique pour les organiser et choisir celle qui est la plus adaptée au problème posé.

Au-dessus de la technologie, on passe encore à un niveau supérieur de justification-explication-production, celui de la *théorie*, Θ, qui est à la technologie ce que la technologie est à la technique. Bien sûr, on pourrait imaginer d'autres niveaux de justification mais Chevallard estime que ce modèle à trois niveaux technique, technologique et théorique est suffisant pour rendre compte de l'activité à analyser [ibid., p.94]. D'ailleurs, note-t-il, "La théorie, terre d'élection des truismes, tautologies et autres évidences, est même souvent évanouissante : la justification d'une technologie donnée est, en bien des institutions, traitée par simple renvoi à une autre institution, réelle ou supposée, censée détenir une telle justification. C'est là le sens classique du "On démontre en mathématiques... du professeur de physique", ou encore du "On a vu en géométrie..." du professeur de mathématiques d'autrefois" [ibid., p.94-95]. Pour conclure, la théorie est rarement apparente et d'autant plus rarement que le niveau d'enseignement est élémentaire. Aussi pour ce qui concerne notre étude nous n'aurons probablement pas à considérer ce niveau.

Ainsi, autour d'un type de tâche T, on trouve (au moins) une technique, τ, une technologie, θ, et une théorie, Θ, le tout constitue une praxéologie (ou organisation), notée [T/ τ / θ / Θ], qualifiée de *ponctuelle* parce que relative à un seul type de tâches. De la même façon que le bloc pratico/technique [T/ τ] s'identifie à un savoir-faire, le bloc technologico/théorique [θ / Θ] s'identifie à un savoir. Cependant, d'après Chevallard, dans une institution donnée, on ne rencontre que rarement des praxéologies ponctuelles : une théorie répond généralement de plusieurs technologies, dont chacune répond à son tour de plusieurs techniques, chacune d'elles à son tour utilisée pour plusieurs types de tâches. A chaque niveau d'organisation correspond une appellation : de l'organisation ponctuelle, on passe à l'organisation locale centrée autour d'une seule technologie, puis à l'organisation régionale centrée autour d'une seule théorie. "*Or le passage d'une praxéologie ponctuelle (relative à T) à une praxéologie locale met en avant la technologie θ, de la même façon que le passage ultérieur à une praxéologie régionale portera au premier plan la théorie Θ. Dans les deux cas la visibilité du bloc du savoir s'accroît au détriment de celle du savoir-faire*" [ibid., p.96]. Ce qui a tendance à diminuer le savoir-faire relativement au savoir, et à le faire apparaître comme une *simple application* de celui-ci, et qui peut expliquer pourquoi, comme le note Chevallard, on désigne généralement par savoir la praxéologie [T/ τ / θ / Θ] toute entière ou même une partie de celle-ci. C'est ainsi que l'enseignement courant organise souvent la présentation des connaissances par l'exposé du savoir, puis par l'utilisation de ce savoir à travers les savoir-faire correspondants. Ceci peut encore s'expliquer, pense Chevallard, du fait que si "le type de tâches T précède *génétiquement* (du point de vue de la genèse du savoir), le bloc [θ / Θ] (lequel se construit alors comme moyen de produire et de justifier une technique τ appropriée à T), il n'en reste pas moins que, structuralement, le savoir [θ / Θ] permet d'engendrer τ (pour T donné)" [ibid., p.96].

Si nous ne sommes pas directement concernés par la genèse du savoir, et des savoir-faire correspondants, à laquelle la théorie de l'anthropologie didactique nous permet également de réfléchir, nous étudierons par contre l'organisation des objets du savoir dans chacun des deux systèmes d'enseignement palestinien et français, en faisant ressortir s'il y a lieu les praxéologies ponctuelles et locales (les praxéologies régionales ne relevant pas de ce niveau d'enseignement), et comparerons les savoirs mis en avant ici et là, ainsi que les savoir-faire visés ici et là.

Perspective écologique

C'est dans ce cadre global que le questionnement écologique nous semble à propos. D'abord, et pour commencer, il n'était pas absent, souligne Artaud, des premières études sur les processus transpositifs, et la théorie de la transposition didactique identifiait déjà trois grands ensembles de conditions permettant aux mathématiques d'exister dans le système d'enseignement : "premièrement, les mathématiques enseignées doivent être compatibles avec leur environnement social, en particulier avec la sphère de production des mathématiques et avec l'institution des parents. Deuxièmement, les mathématiques enseignées doivent pouvoir être présentées séquentiellement, les notions mathématiques se succèdent sur l'axe temporel linéaire du temps mathématique (la chronogenèse). Troisièmement, elles doivent définir deux rapports institutionnels, l'un en position de professeur, l'autre en position d'élève (topogenèse)" [Artaud, 1998, p.102]. De façon équivalente, le processus même de transposition didactique, soit de *transfert* du savoir d'une institution à une autre est intimement lié au point de vue écologique. En effet, le savoir mathématique dans chacune des institutions où il se trouve, dans l'institution de production des mathématiques (sphère savante), dans la noosphère (sphère où le savoir mathématique est manipulé à des fins de transposition), dans la sphère scolaire (où le savoir est enseigné) est soumis à des conditions spécifiques dont le respect lui permet de se maintenir en vie. Et son transfert d'une institution à une autre impose sa manipulation et sa transformation (on parle alors de transposition), seules garantes de son maintien en vie dans l'institution où il est destiné.

Ensuite, la théorie plus générale de l'anthropologie didactique est également propice au questionnement écologique. Mieux, la description de toute activité humaine, et donc de l'activité mathématique en particulier, à l'aide du modèle praxéologique s'inscrit très nettement dans une perspective écologique. Pour analyser un savoir mathématique dans une institution donnée selon cette théorie, il faut déterminer l'organisation mathématique, soit le système de tâches, techniques, technologies et, éventuellement, théories, qui le décrit. Or, une fois ce système déterminé, on se rend compte de l'existence de certains types de tâches et de l'absence d'autres. *Pourquoi tel type de tâches existe-t-il et pas tel autre ?* est assurément un questionnement d'ordre écologique. En fait, les tâches constitutives d'un système donné établissent entre elles l'équilibre écologique nécessaire à leur maintien en vie. Nous avons vu par ailleurs, qu'une tâche ne peut *exister*, selon cette théorie, que si elle est accompagnée d'une technique pour l'accomplir, elle-même ne pouvant être amenée à *exister* que par l'*existence* d'une technologie, puis par celle d'une théorie. Cet emploi répété du terme existence est de nouveau intrinsèquement lié à ce même questionnement écologique.

Ici, la thèse de Rajoson, "l'analyse écologique des conditions et des contraintes dans l'étude des phénomènes de transposition didactique : trois études de cas", soutenue en 1988, nous semble très éclairante. Nous nous référons au même article de Artaud citant Rajoson. Cette thèse a pour nous l'avantage d'avoir utilisé explicitement l'approche écologique dans l'examen de savoirs mathématiques particuliers, et nous éclaire dans la pratique sur cette approche même s'il s'agit dans les trois cas de questions de non-existence. C'est la première étude de cas qui nous intéresse : En examinant pourquoi le problème de Moivre, en tant que type de tâches, n'existe pas dans l'enseignement secondaire, Rajoson est amené à déterminer les organisations mathématiques nécessaires à sa vie. En effet, pour que vive le problème de Moivre dans l'enseignement secondaire, il faut qu'y vivent également, une technique (au moins) pour le résoudre et une technologie relative à cette technique, le niveau théorique étant négligé par Rajoson. Cette nécessité répond même, pour lui, à une loi (écologique), la loi du "tout structuré", selon laquelle un objet ne peut vivre de façon isolée mais au sein d'une organisation, organisation qui est généralement inégalement développée. Par ailleurs, par cette même loi, un objet mathématique ne peut vivre tout seul mais en association avec un ensemble d'autres objets. C'est ainsi que pour recréer dans l'enseignement secondaire, par transposition didactique, un écosystème propice à la vie du problème de Moivre, à partir des écosystèmes où il vit déjà, il faut que, également, soient amenés à vivre d'autres objets mathématiques coexistant généralement avec le problème de Moivre, ainsi que leurs organisations mathématiques. Tout cela est soumis à quelques conditions didactiques propres à l'enseignement secondaire, comme par exemple, la suivante : "pour que l'existence d'une technologie soit justifiée au sein d'un écosystème didactique, elle doit pouvoir justifier plusieurs systèmes [type de tâches/technique], ou alors être associée à un type de tâches emblématique des mathématiques enseignées" [ibid., p.114]. Rajoson conclut en montrant l'impossibilité de recréer, dans l'enseignement secondaire, les écosystèmes existant ailleurs, soit parce que les organisations mathématiques relatives au problème de Moivre font appel à des techniques et technologies inadaptées au niveau de l'enseignement secondaire, soit parce que les autres objets qu'il faudrait amener à vivre sont en trop grand nombre et qu'il est donc impossible de les transposer tous à la fois, soit encore pour l'impossibilité de faire respecter la condition didactique concernant la technologie, ci-dessus mentionnée.

Notre problème contrairement à celui de Rajoson porte sur une question d'existence. Nous souhaitons déterminer quelles sont les conditions qui ont amené à faire vivre le concept de fonction dans les deux *écosystèmes* différents que sont l'enseignement secondaire français et l'enseignement secondaire palestinien. Notre souci est donc celui d'examiner les possibilités d'existence et les manières d'exister du concept de fonction dans l'enseignement secondaire. Pour cela, nous allons déterminer les différents objets qui sont amenés à vivre par l'enseignement du concept de fonction, ainsi que les organisations mathématiques dans lesquelles ils vont se trouver impliqués. Les objets d'enseignement liés au concept de fonction, les relations entre eux, la façon dont ils sont sollicités dans les organisations mathématiques sont en effet caractéristiques d'un environnement donné (une classe de lycée donnée dans un système d'enseignement donné).

Ainsi, et c'est là qu'elle nous paraît performante pour l'étude de la transposition didactique, la problématique écologique nous permet de nous concentrer sur les objets du savoir du point de vue de leur logique interne, logique qui dépasse, nous rappelle la théorie de la transposition didactique, celle voulue par les acteurs du processus de transposition, et qui donne une vie propre et indépendante à ce savoir. Elle va nous permettre de nous interroger sur la *vie propre* du *savoir fonction*, en posant et en répondant aux questions suivantes : **comment, sous quelles formes est amené à vivre cet objet fonction dans les deux systèmes d'enseignement différents auxquels nous nous intéressons ? Autrement dit, étant donné les conditions de présentation du concept de fonction dans chacun des deux systèmes d'enseignement, quel objet est-il amené à vivre dans chaque cas ? Entre les deux, quelles ressemblances, quelles différences, et pourquoi?**

2.2 Les aspects sémiotiques dans l'activité mathématique

Aucune des deux lignes d'analyse, de Duval et de Chevallard, ne saurait être négligée pour l'étude du sémiotique dans l'activité mathématique. Bien que très éloignées, toutes deux s'inspirent de la théorie linguistique, et resituent le sémiotique par rapport au conceptuel dans l'activité mathématique en refusant de n'y voir qu'une activité secondaire qui ne mériterait pas, par conséquent, d'être davantage prise en compte dans l'enseignement des mathématiques.

2.2.1 Chevallard et le sémiotique

Chevallard se place, pour l'étude du sémiotique également, dans le cadre global de l'approche anthropologique. Son souci étant toujours, quand il analyse l'activité mathématique, de la réinsérer dans l'ensemble des activités humaines. Il présente d'ailleurs très clairement sa théorisation du sémiotique comme étant le dernier niveau de développement de son approche anthropologique [Bosch, Chevallard, 1999]. Les différents stades de sa théorie de l'anthropologie cognitive, ont déjà été détaillés plus haut, mais nous y revenons rapidement pour mieux introduire son point de vue du sémiotique.

S'étant d'abord intéressé aux questions de transposition didactique, il a ressenti le besoin d'élargir ce champ d'analyse par la problématique écologique. Elle-même s'est trouvée inscrite plus tard dans le cadre de l'approche anthropologique. Le savoir mathématique, que l'on veut analyser en tant que forme particulière de connaissance, l'est maintenant en tant que *"fruit de l'action humaine institutionnelle : C'est quelque chose qui se produit, s'utilise, s'enseigne ou, plus généralement, se transpose dans les institutions"* [Bosch, Chevallard, 1999, p.83].

La notion d'organisation praxéologique va permettre d'étudier cette action humaine institutionnelle ou encore ces pratiques institutionnelles à travers un postulat : *Toute pratique institutionnelle se laisse analyser en un système de tâches*, tâches qui seront elles-mêmes analysées par un système de techniques/ technologies/ théorie.

Ainsi la question de la nature des objets mathématiques, en particulier la question de la nature des concepts et des notions visés par l'enseignement des mathématiques, pour nous celle de la *nature* du *concept de fonction* va se trouver posée différemment. Puisqu'un concept est un objet et qu'un objet n'existe nous dit Chevallard que "dès lors qu'existent des institutions et des personnes qui entretiennent des *rapports* à cet objet. La question de la "nature" de l'objet renvoie ainsi au *problème de la description des pratiques institutionnelles où l'objet est engagé*, problème auquel il faut répondre en termes d'*organisations praxéologiques.*" [Bosch, Chevallard, 1999, p.88]. On est alors renvoyé à la question de la nature des composants de l'organisation praxéologique : de quoi se compose une tâche, une technique, une technologie, une théorie ? Comment décrire la mise en œuvre d'une technique (technologie, théorie) ? Comment la reconnaître ?

Or, considérer les mathématiques comme une activité humaine pousse à les classifier, comme le sont habituellement toutes les activités humaines, selon la dichotomie manuelle/intellectuelle. Avec toute la péjoration que comporte généralement le qualificatif de *manuel* par opposition à celui d'*intellectuel* dans notre civilisation occidentale. Chevallard part de ce constat, par rapport auquel il va se positionner, pour pouvoir répondre à la question de la nature des objets mathématiques.

Les mathématiques sont, ainsi, spontanément considérées comme une activité intellectuelle :

> "...on y travaillerait surtout "avec la tête", à l'aide d'outils notionnels, de raisonnements, d'idées, d'intuitions, et de très peu d'éléments matériels. [...] Les autres objets, sinon matériels, du moins *sensibles*, qu'activent le mathématicien (écriture, formalismes, graphismes, mots, discours, etc.) peuvent parfois jouir d'une certaine spécificité : ils ne sont pourtant supposés intervenir dans son activité qu'en tant que *signes*, occupant la place d'autres objets qu'ils *représenteraient*." [Bosch, Chevallard, 1999, p.89].

Et le mot clé est lancé: *représenter*. Ainsi, l'idée couramment admise est qu'en mathématiques, ce qui est important est au-delà des mots, figures et symboles employés pour faire des mathématiques. La position de Chevallard là-dessus est très claire :

> "...il convient, au contraire, d'examiner la manière dont *l'activité mathématique est conditionnée par les instruments matériels, visuels, sonores et tactiles qu'elle met en jeu.*" [ibid., p.90].

C'est pour analyser, selon ce point de vue, l'activité mathématique que les termes d'ostensif et de non ostensif vont être introduits.

> "D'un côté, il y a les objets que je nomme *ostensifs*, tels un nom, une notation, un graphe, ou encore un schéma gestuel, qui peuvent être *réellement présents* et que l'on peut *effectivement manipuler* dans leur matérialité. D'un autre côté, il y a les objets *non ostensifs*, que je nomme aussi *émergents*, et que l'on peut effectivement *évoquer* à l'aide

d'objets ostensifs. Lorsque le mathématicien dit qu'il manipule la fonction logarithme, c'est en vérité certains des objets ostensifs associés qu'il manipule" [Chevallard, 1995-1996, p.50].

Une nouvelle terminologie donc, mettant l'accent sur les sens (physiques), pour se distancer de cette vision péjorative, de la culture occidentale en général, concernant le sémiotique. Vision d'ailleurs partagée par l'idéologie linguistique courante qui tend à établir le primat du *signifié* (concept) par rapport au *signifiant* (lettres, symboles, etc.), et reprise en mathématiques quand celles-ci sont considérées comme une langue (formelle).

Chevallard insiste particulièrement sur la nécessité de prendre ses distances vis à vis de la vision de la culture occidentale, et critique la théorie linguistique courante en estimant qu'elle ne s'applique pas dans sa totalité aux mathématiques, car l'activité mathématique en tant qu'activité humaine ne peut être pensée uniquement en termes de langage. Aussi la relation signifiant/signifié, doit-elle être rééquilibrée au sein de l'activité mathématique, en accordant au signifiant sa juste valeur par rapport au signifié.

On comprend alors que la dichotomie habituelle signifiant/signifié ne soit pas reprise dans la distinction ostensif/non ostensif. Bien au contraire, entre les deux s'installe une véritable dialectique, car l'un ne peut exister que par rapport à l'autre.

Les deux exemples suivants éclairciront cette dialectique : Quand, pour résoudre l'équation $2^x = 10$, on dit qu'on utilise le *logarithme* (sous-entendu, le non ostensif qu'est la notion de logarithme), ce sont en réalité des mots et des notations (des ostensifs) qui sont effectivement manipulés. Inversement, l'on pense ne manipuler que des objets ostensifs, en écrivant par exemple $2 + 3 = 5$; cependant, aussi simple que soit cette manipulation, elle ne peut s'effectuer sans l'intervention de *certains objets non ostensifs spécifiques, telle la notion d'addition*. (Pour plus de détails sur ces deux exemples voir [Bosch, Chevallard, 1998, p.91-92].)

Cette dialectique, Bosch et Chevallard l'expriment en affirmant que la *co-activation d'ostensifs et de non ostensifs* est toujours présente dans l'activité mathématique. Elle se retrouve à tous les niveaux d'activité (niveau technique mais aussi technologico-théorique). Il ne faudrait pas penser par conséquent que la manipulation d'ostensifs relève du niveau technique et que le recours à des objets non ostensifs tiendrait du niveau de la justification (technologico/théorique).

Par ailleurs, comme pour affirmer davantage l'importance à accorder aux ostensifs dans l'activité mathématique, Bosch et Chevallard vont distinguer, pour les objets ostensifs, une *valence* *instrumentale* et une *valence sémiotique*. C'est dans ce sens que les ostensifs doivent être considérés comme de véritables *instruments sémiotiques*, la valence instrumentale d'un instrument sémiotique permettant de *faire* et la valence sémiotique permettant de *voir ce qui est fait*. Les valences instrumentale et sémiotique de l'ostensif lui confèrent donc une double fonction, celle d'instrument et celle de signe.

La prise en compte de la valeur du sémiotique selon Chevallard dans l'étude des organisations praxéologiques impliquerait que soient repérés les ostensifs et les non ostensifs présents aux différents niveaux de ces organisations, que soit prise en compte la dialectique entre ces ostensifs et non ostensifs, et également, que l'accent soit mis sur les différentes valences des ostensifs utilisés. Il s'agit là d'une analyse très fine du travail sémiotique car se préoccupant spécifiquement de la fonction du signe.

Or notre travail se situe, par sa problématique, à un niveau d'analyse différent nous semble-t-il. Notre idée première était, rappelons-le, de procéder à une comparaison de deux systèmes d'enseignement, autour d'un même concept, celui de fonction, à travers leurs organisations praxéologiques respectives. En voulant examiner les tâches à exécuter ici et là, nous avons été frappée par l'importance que prenaient les types de représentations à travers lesquels s'exprimaient les fonctions. D'une part, parce que les représentations apparaissant au tout début de l'enseignement des fonctions diffèrent selon que l'on considère l'enseignement palestinien ou bien l'enseignement français. D'autre part, parce que les techniques de résolution semblent être déterminées ou au moins fortement influencées par ces représentations : c'est parce que *tels* modes de représentation ont été choisis pour présenter la fonction aux élèves que les tâches se résolvent selon *telles* techniques !

Il nous a fallu alors nous interroger sur la manière selon laquelle nous aurons à prendre en compte les différents *registres ostensifs* du *non ostensif* que constitue la notion de fonction (pour reprendre la terminologie de Chevallard), dans les organisations praxéologiques de chacun des deux systèmes d'enseignement, palestinien et français.

Certes, Bosch et Chevallard s'intéressent aux *registres ostensifs* mais utilisés pour mettre en œuvre une même technique. Ils distinguent alors le registre de l'oralité, le registre de la trace (qui inclut graphisme et écritures), le registre de la gestualité, enfin le registre de la matérialité quelconque (où prennent place les objets ostensifs qui ne relèvent d'aucun des registres précédents). Et ils montrent à travers divers exemples (voir les pages 96-98 de [Bosch, Chevallard, 1998]) comment ces différents registres sont activés à des degrés divers selon la technique qui les réunit.

A titre d'exemple, si nous voulions distinguer les différents registres sollicités dans la technique de résolution de la tâche de *détermination de l'image d'un élément par une fonction exprimée dans le registre de diagramme sagittal*, il nous faudrait considérer :

- le registre visuel, pour repérer par la vue, l'ensemble de départ de la fonction, puis à l'intérieur de cet ensemble, l'élément concerné,
- le registre visuel encore (voire gestuel par l'utilisation d'un crayon que l'on déplacerait le long de la flèche), pour suivre la flèche qui part de cet élément,
- le registre de l'oralité, pour lire l'élément, qui est l'image recherchée, au bout de la flèche,
- le registre de la trace enfin, pour écrire cet élément.

On admettra aisément que la première leçon sur la notion de fonction, si cette fonction est présentée sous forme de diagramme sagittal, puisse être ainsi exposée au tableau par le professeur.

Ainsi, les registres dont parle Chevallard apparaissent clairement comme des registres sensoriels : ce sont les différents aspects sensoriels qu'il faut coordonner pour produire une représentation ou pour l'interpréter. Nous retenons des travaux de Chevallard et Bosch le lien indissoluble entre ostensifs et non ostensifs. Cependant, dans l'étude que nous envisageons, nous nous plaçons à un niveau plus global qui ne nécessite pas d'analyser les modes sensoriels de production ou d'utilisation de la représentation. D'ailleurs, notre méthode d'étude s'appuiera essentiellement sur des analyses de manuels ou de copies d'élèves qui ne donnent pas accès aux autres sens que la vue.

En revanche, l'existence de plusieurs représentations pour un même objet est un point important à considérer pour notre problématique. Aussi, ne souhaitant pas distinguer un ostensif (de la fonction), du registre sensoriel dans lequel cet ostensif est travaillé, avons-nous pensé que la notion de registre de représentation sémiotique de fonction telle que Duval la définit serait plus adaptée à ce niveau de notre analyse dans la mesure où il lie la notion de registre à l'existence de règles de formation des représentations indépendamment des modes sensoriels de production.

Il convient, à ce stade de présenter les registres de représentation selon Duval.

2.2.2 Duval et le sémiotique

Duval, lui aussi, s'intéresse au sémiotique dans l'activité mathématique et si son analyse s'inspire fortement de la théorie linguistique, sa motivation tient néanmoins de la psychologie cognitive. Dans ce cadre général, il cherche à caractériser le fonctionnement cognitif de la pensée humaine, en général, et celui de la pensée mathématique en particulier car "l'apprentissage des mathématiques n'en constitue qu'un champ privilégié d'étude" [Duval, 1993, p.4].

D'emblée, il souligne ce qu'il appelle *le paradoxe cognitif de la pensée mathématique.* Ce paradoxe tient au fait que les objets mathématiques ne sont pas directement accessibles par la perception mais seulement à travers des représentants et que, seule la distinction entre un objet mathématique et sa représentation peut garantir son appréhension qui ne peut-être que conceptuelle : "d'une part, l'appréhension des objets mathématiques ne peut être qu'une appréhension conceptuelle et, d'autre part, c'est seulement par le moyen de représentations sémiotiques qu'une activité sur des objets mathématiques est possible" [ibid., p.2].

Ainsi, la distinction entre un objet mathématique (conceptuel) et sa représentation devient un des points stratégiques pour la compréhension des mathématiques, car "toute confusion entraîne, à plus ou moins long terme, une perte de compréhension et les connaissances acquises deviennent vite inutilisables hors de leur contexte d'apprentissage (...)" [ibid., p.1].

Or, pense Duval, ce paradoxe cognitif est négligé dans l'enseignement des mathématiques car beaucoup plus d'importance est accordée aux représentations mentales qu'aux représentations sémiotiques. Remarquons en passant qu'un rapprochement, peut-être fait ici avec la critique, chez Chevallard, de la dichotomie intellectuel / manuel. Duval introduit alors les termes de *sémiosis* et de *néosis* pour désigner respectivement *l'appréhension, ou la production, d'une représentation sémiotique* et *l'appréhension conceptuelle d'un objet*, et affirme que la "*néosis est inséparable de la sémiosis"* [ibid., p.4]. Il en ressort que tout enseignement mathématique doit être organisé de façon à prendre en compte cette forte liaison entre sémiosis et néosis, et en particulier, ne doit pas négliger la sémiosis, en tant qu'opération cognitive, par rapport à la néosis :

"Etant donnée la nécessité des représentations sémiotiques pour certaines fonctions cognitives fondamentales et l'implication réciproque des représentations mentales et des représentations sémiotiques, il semble tout aussi légitime au contraire : il n'y a pas de néosis sans sémiosis, c'est la sémiosis qui détermine les conditions de possibilité et d'exercice de la sémiosis." [Duval, 1995, p.4]

Pour analyser la sémiosis, et les différentes activités cognitives qui en sont constitutives, Duval a recours au cadre général de la théorie linguistique. D'abord il va se soucier de rééquilibrer la relation représentant/représenté. Il se base sur la théorie Sausurienne du signe qui, si elle distinguait le signifiant du signifié, les unifiait dans la notion de signe : "La distinction signifiant/signifié est toujours seconde par rapport à l'unité ou à la totalité du signe. Cette unité constitue la signification du signe, ou sa relation intrinsèque de signification" [Duval et coll. citant Saussure, 1998, p.20]. Ainsi, pour les auteurs, "le signifiant ne peut donc être défini comme une trace matérielle (...). Le signifiant est une valeur qui se détermine par rapport à d'autres signifiants, cette détermination oppositive constituant un signifié lequel est, lui aussi, une valeur intrinsèque à un système sémiotique particulier" [Duval et coll., 1998, p.21].

Les termes *représentant, représenté, signe*, ainsi introduits, il en vient à la notion de *registre de représentation,* car Duval ne s'intéresse pas aux signes pris de façon isolée, mais aux signes à l'intérieur du système sémiotique qui les caractérise et qui permet de les travailler :

“Les représentations sémiotiques sont des productions constituées par l'emploi de signes appartenant à un système de représentation qui a ses propres contraintes de signifiance et de fonctionnement” [Duval, 1993, p.3].

Pour qu'un système de représentation puisse être considéré comme un registre de représentation, il doit permettre les trois activités cognitives fondamentales liées à la sémiosis :

- "La formation d'une représentation identifiable comme une représentation dans un registre donné [...]
- Le traitement d'une représentation est sa transformation dans le registre même où elle a été formée. [...]
- La conversion d'une représentation est la transformation de cette représentation en une représentation d'un autre registre en conservant la totalité de cette représentation ou une partie seulement du contenu de la représentation initiale." [ibid., p.41-42]

Remarquons cependant que Duval ne signale pas que, dans le cas d'un traitement, on passe souvent d'une représentation d'un objet à la représentation dans le même registre d'un autre objet lié à celui-là par des propriétés spécifiques du contenu. Les règles du traitement sont justifiées par des propriétés du contenu représenté. En revanche, la conversion fait passer d'une représentation d'un objet à une représentation du même objet dans un autre registre de représentation. En général, dans un traitement le référent change alors qu'il reste le même dans une conversion. Cette remarque nous semble pourtant éclairer l'importance de l'articulation des registres de représentation pour la compréhension des objets mathématiques représentés.

Duval souligne que de ces trois activités, si celle de formation est correctement prise en compte dans l'enseignement, celle de traitement ne l'est pas toujours alors qu'aucune place véritable n'est accordée à celle de conversion. Or, souligne-t-il le problème de la conversion des représentations, largement méconnu par l'enseignement, mérite une attention toute particulière.

Cette attention, il la justifie en émettant l'hypothèse que : “La compréhension d'un contenu conceptuel repose sur la coordination d'au moins deux registres de représentation, et cette coordination se manifeste par la rapidité et la spontanéité de l'activité cognitive de conversion” [ibid., p.15]. Cette affirmation est reprise dans [Duval et coll., 1998]. Les auteurs y critiquent le modèle piagétien pour décrire l'intelligence, et proposent de le remplacer par un nouveau modèle: " (...) il ne s'agit plus de coordonner des schèmes sensori-moteurs, coordination dont la théorie de Piaget a fait la base du développement de l'intelligence, mais de coordonner des systèmes sémiotiques de représentation" [ibid., p.11].

En effet, le passage d'un registre de représentation sémiotique à un autre présente un caractère crucial non seulement pour la compréhension du concept concerné par les différentes représentations, mais aussi pour la maîtrise du fonctionnement de chacun des registres. Cependant, cette coordination entre différents registres n'est en aucun cas naturelle aussi observe-t-on à tous les niveaux d'enseignement un "cloisonnement des registres de représentation chez la très grande majorité des élèves". Pour expliquer ce phénomène, Duval se base sur les notions de *congruence* et de *non-congruence sémantique* entre différentes représentations d'un même objet, et présente aussi trois critères de congruence qui peuvent également déterminer un degré de non-congruence. Ainsi, une conversion entre deux registres n'est triviale que dans le cas de congruence entre le registre de départ et le registre d'arrivée, par suite, plus le degré de non-congruence est élevé et plus la conversion devient complexe.

De nombreux travaux se sont inspirés de ces perspectives développées par Duval. Certains, se sont intéressés à l'activité de *traitement* en tant qu'activité négligée par l'enseignement dans les registres où les traitements ne sont pas uniquement de type calcul. Duval cite d'ailleurs deux thèses celles de Padilla Sanchez et de Lémonidis et insiste tout particulièrement sur la deuxième [Duval, 1993, p.22]. Celles-ci se sont intéressées au registre des figures géométriques en remarquant que, malgré le rôle heuristique évident des figures en géométrie, l'enseignement des mathématiques néglige l'apprentissage des traitements propres à ce registre. Chacune de ces deux études se centre sur une opération particulière de ce registre des figures pour l'enseignement d'un domaine spécifique de géométrie, et s'interroge sur les possibilités de traitement figuratif de l'opération géométrique considérée.

D'autres travaux se sont plutôt intéressés à l'activité de *conversion* entre registres. Notons le travail de Pavlopoulou sur les débuts de l'apprentissage de l'algèbre linéaire, tel que le présente Alves Dias dans sa thèse, ainsi que celui de Alves Dias elle-même [Alves Dias, 1998]. Il s'agit d'un exemple de coordination de registres en algèbre linéaire qui se centre sur l'apprentissage de quelques notions particulières pour un niveau de première année de DEUG : celles de vecteurs, de combinaison linéaire, de dépendance et d'indépendance linéaire dans R^2 et R^3 [ibid., p.35].

Pavlopoulou distingue trois registres différents :

- le registre graphique (G) où un vecteur est représenté par une flèche dans R^2 et R^3.
- le registre de l'écriture symbolique (S) : où un vecteur est représenté par la combinaison linéaire de deux ou trois vecteurs de R^2 et R3, en particulier ceux de la base canonique.

- le registre des tableaux (T) : où un vecteur est représenté par une matrice colonne avec deux ou trois lignes (R^2 ou R^3, représentation d'un vecteur par ses coordonnées) [ibid., p.36].

Après avoir remarqué suite à l'étude de différents manuels d'enseignement des débuts de l'algèbre linéaire, que "les problèmes de conversion entre registres ne sont pas posés explicitement en termes d'apprentissage" [ibid., p.36], Alves Dias organise des séquences didactiques dans le but de favoriser, justement, la coordination des registres identifiés et d'en étudier l'impact cognitif sur les élèves. Pour ce faire, elle s'attache à analyser les différents registres de représentation distingués afin d'identifier les traits sémiotiques relatifs à chacun d'eux et de permettre la mise en relation des traits spécifiques des différents registres.

Nous ne nous centrerons pas, dans notre travail, sur l'activité de conversion. Nous n'envisageons pas en effet, de réaliser des ingénieries didactiques visant une meilleure prise en compte de la sémiosis dans les deux systèmes d'enseignement qui nous intéressent. Cependant les fonctions mettent en jeu plusieurs systèmes de représentation sémiotique. Pour analyser différents enseignements sur les fonctions, il y a lieu de s'intéresser aux divers systèmes de représentation utilisés.

Notons, justement le travail de Gutzman-Retamal [Gutzman-Retamal, 1989] : Toujours inscrit dans la perspective d'analyse de Duval et bien qu'il se centre sur l'activité de conversion, ce travail a retenu notre attention pour plusieurs raisons.

D'abord, parce qu'elle s'y intéresse également au concept mathématique de fonction. Sa recherche ne concerne, cependant, que les débuts de l'enseignement de la fonction puisqu'elle étudie une classe de troisième: Il n'est pas question à ce niveau d'introduire la notion générale de fonction numérique mais d'appréhender quelques types particuliers de fonction, notamment les fonctions affines.

Ensuite, parce qu'elle y fait un état des lieux de l'organisation de l'enseignement de la fonction en classe de 3ème par rapport aux différentes représentations qui en sont possibles. Gutzman-Retamal a dans un premier temps cherché à distinguer puis à présenter les principaux registres de représentation utilisés pour représenter le concept de fonction en classe de 3ème française. Elle retient :

- le registre algébrique,
- le registre graphique,
- le registre de programmation,
- le registre des tableaux.

Le langage naturel, quoique pouvant également constituer un registre, n'est pas considéré dans son étude sur le même plan que ceux retenus et ci-dessus cités. En raison de "sa nature très complexe et trop large" [Gutzman-Retamal, 1989, p.232], elle retient essentiellement son rôle de communication et donc de liaison entre les différents registres possibles.

Gutzman-Retamal conjecture qu'une meilleure prise en compte des aspects sémiotiques dans l'enseignement, et en particulier des activités de passage d'un registre à un autre, ne peut qu'aboutir à de meilleures performances des élèves. C'est dans ce but qu'elle compare, à travers un questionnaire prenant en compte les objectifs les plus classiques dans les études de fonctions, des élèves ayant suivi un enseignement traditionnel sur les fonctions, et des élèves ayant suivi un enseignement expérimental, selon la *démarche logo*, fortement axé sur le registre de programmation dans le traitement des fonctions et des équations de droite.

Le questionnaire se limite aux seules fonction qui sont au programme, linéaires, affines ou affines par morceaux et teste "la reconnaissance de fonctions à partir de situations particulières", "la manipulation de la fonction" essentiellement à travers des changements de registres et enfin, "l'application de la fonction aux équations de droites et aux propriétés de proportionalité" en tant que principaux objectifs d'enseignement à ce niveau scolaire [ibid., p.230].

Nous retenons pour notre recherche la notion de registre de représentation telle que la définit Duval et telle qu'elle est utilisée dans plusieurs travaux. Nous retenons plus particulièrement cette dernière recherche pour sa classification des registres de représentation de la notion de fonction même s'il faudra lui rajouter d'autres registres présents dans l'environnement du lycée, aussi bien du côté français que du côté palestinien, et absents en classe de troisième française. Par ailleurs, les objectifs d'enseignement qu'elle souligne et teste à travers son questionnaire seront en partie pris en compte, dans notre propre questionnaire, quoique resitués par rapport à notre cadre théorique.

Mais l'attention que nous allons accorder aux registres de représentation ne doit pas nous faire perdre de vue notre question principale, celle de la transposition didactique de la notion de fonction et donc des connaissances qui en résultent chez les élèves. Les registres de représentation nous intéresseront donc, mais au sein des organisations praxéologiques dont ils sont partie intégrante. Ils nous intéresseront pour autant qu'ils puissent nous informer, dans un premier temps, sur le mode d'appréhension de la notion de fonction dans les systèmes d'enseignement étudiés et, dans un deuxième temps, sur les pratiques concernant le concept de la fonction qu'ils induisent chez les élèves.

Or l'approche anthropologique [Bosch et Chevallard, 1998] propose de substituer à la problématique du sens de l'activité mathématique des élèves et du sens des connaissances qu'ils acquièrent, la problématique des conditions de vie et de développement d'organisations praxéologiques à la fois produits et facteurs de cette activité.

Il nous semble, quant à nous, intéressant d'articuler les deux problématiques dans notre étude de la transposition didactique du concept de fonction. Nous nous proposons de le faire en étudiant, d'une part, la présentation de la notion de fonction à travers les différentes organisations praxéologiques constitutives de son enseignement et, d'autre part, le sens potentiellement véhiculé par ces organisations et que développeront les élèves de par leur activité sur ces organisations.

C'est dans cette optique que nous en revenons aux registres de représentation. Nous avons déjà souligné que les registres de représentation utilisés pour définir la fonction étudiée déterminent pour une bonne part les techniques selon lesquelles les tâches sont résolues. Ainsi, l'activité des élèves sur les fonctions se réalise à travers les registres de représentation de ces fonctions. Mais d'un autre côté, les registres de représentation apparaissant dans une organisation praxéologique relative à la notion de fonction sont également indicateurs du mode d'appréhension choisi pour présenter cette notion. La transposition didactique du concept de fonction relativement à un mode d'appréhension impose, nous semble-t-il, le recours, conscient ou inconscient d'ailleurs, de la part des concepteurs de programmes et manuels, à certains registres de représentation plutôt qu'à d'autres, et donc le recours à certaines techniques de résolution pour une tâche donnée plutôt qu'à d'autres. Cette remarque ne peut manquer de refléter à quel point sont liés modes d'appréhension et registres de représentation.

2.3 Notion de cadre et statut outil / objet des concepts mathématiques

L'introduction en didactique des mathématiques de ces notions est due à Douady [Douady, 1986] qui dans un souci pédagogique s'interroge sur l'activité du mathématicien qu'elle cherche à transposer dans le domaine didactique. De son analyse épistémologique, il ressort que "une part importante de l'activité du mathématicien consiste à poser des questions et à résoudre des problèmes" et, de cette activité, elle retient deux points en particulier:

- Le double statut de tout concept mathématique : le statut outil et le statut objet avec, le plus souvent dans la production, une antériorité de l'outil sur l'objet. En effet, le mathématicien résout les problèmes à l'aide d'outils mathématiques. Ces outils sont généralement implicites au départ, c'est-à-dire qu'ils correspondent à une procédure qui se justifie par un concept en cours d'élaboration, ils deviennent ensuite explicites. Ils correspondent alors à la mise en œuvre intentionnelle d'un concept pour résoudre le problème. Peu à peu, et pour les besoins de la transmission à la communauté scientifique, les outils mathématiques ainsi créés sont décontextualisés, formulés de la façon la plus générale possible. Le concept acquiert alors le statut d'objet et va pouvoir s'intégrer au corps des connaissances déjà constituées. Le terme objet se réfère à "l'objet culturel ayant sa place dans un édifice plus large qui est le savoir savant à un moment donné, reconnu socialement." [ibid., p.9]

- Le fonctionnement global d'un concept mathématique se fait à l'intérieur d'un (ou plusieurs) cadre(s) mathématique(s). Le *cadre* est "constitué des objets d'une branche mathématique, des relations entre les objets, de leurs formulations éventuellement diverses et des images mentales associées à ces objets et à ces relations." [ibid., p.11] Un même concept mathématique est amené à fonctionner dans différents cadres. Chacun de ces cadres détermine un environnement conceptuel et technique spécifique qui y caractérise le fonctionnement du concept. Le mathématicien, dans son activité de résolution de problèmes, a recours à *des changements de cadres*. Il effectue un changement de cadres pour un problème donné, à chaque fois qu'il le transporte d'un cadre à un autre. La traduction du problème d'un cadre dans un autre permet de le poser autrement: "Le *changement de cadres* est un moyen d'obtenir des formulations différentes d'un problème qui, sans être nécessairement équivalentes, permettent un nouvel accès aux difficultés rencontrées et la mise en œuvre d'outils et de techniques qui ne s'imposaient pas dans la première formulation. (...) Quoi qu'il en soit, les traductions d'un cadre dans un autre aboutissent souvent à des résultats non connus, à des techniques nouvelles, à la création d'objets mathématiques nouveaux, en somme à l'enrichissement du cadre originel et des cadres auxiliaires de travail " [ibid., p.11].

C'est à la fois le double statut des concepts mathématiques et l'activité de changement de cadres que R. Douady va transposer dans l'enseignement afin que celui-ci puisse *intégrer dans son organisation des moments où la classe simule une société de chercheurs en mathématique*, au lieu d'utiliser la méthode *j'apprends, j'applique*, actuellement principalement utilisée, même en pédagogie active ou par objectifs. Douady cherche ainsi à modifier la signification même de l'apprentissage en donnant davantage de responsabilité aux élèves et en mettant en œuvre, du point de vue mathématique, les caractères essentiels des notions. Elle propose pour ce faire, de réorganiser l'enseignement autour de problèmes convenablement choisis où s'enclenchent *la dialectique outil-objet* et *les jeux de cadres*. La dialectique outil-objet et les jeux de cadres sont la traduction didactique du *double statut du concept mathématique* et des *changements de cadres*, c'est-à-dire qu'ils correspondent à un usage de ces processus, provoqué à l'initiative de l'enseignant.

Nous retiendrons principalement de cette théorie la notion de cadre, que nous souhaitons associer à celle de registre de représentation sémiotique au sens de Duval. Par rapport à la notion de registre qui concerne plus particulièrement la façon de travailler les différentes représentations symboliques associées à un concept, celle de cadre concerne le fonctionnement général d'un concept dans ses relations avec d'autres concepts du même cadre ou de cadres différents. Nous pensons donc que l'adoption d'une ligne d'analyse en termes de cadres et de registres associés, plutôt que l'adoption exclusive de l'une ou l'autre ligne d'analyse, serait plus éclairante quant au mode d'appréhension de la notion à enseigner et aux rapports fondamentaux à cette notion que l'on veut installer. En effet, l'analyse en termes de cadres nous permettra de pointer les interactions entre des domaines mathématiques différents qui sont prises dans l'enseignement, notamment dans les problèmes proposés aux élèves. La notion de registre, le plus souvent relativisée à un cadre, nous permettra d'analyser les différentes représentations des objets mathématiques concernés et de voir comment le passage de l'une à l'autre est pris en compte dans l'enseignement. Un même registre sémiotique peut cependant intervenir dans des cadres différents : c'est le cas du registre des expressions algébriques qui est utilisé de la même manière dans le cadre des équations et inéquations et dans celui des fonctions ; cela peut rendre plus difficile la distinction des activités correspondantes.

Mais nous serons également attentive au statut outil ou objet selon lequel les notions mathématiques sont impliquées dans un enseignement donné dans la mesure où cela nous apparaît constituer un indicatif des méthodes pédagogiques adoptées : ainsi, un enseignement où les nouvelles notions sont souvent introduites selon leur statut outil est significatif d'un enseignement qui se soucie de la construction du sens des notions mathématiques chez les élèves, alors qu'un enseignement qui insiste davantage sur le statut objet de ces notions est un enseignement plus classique qui ne prend pas à sa charge la construction du sens chez les élèves.

Nous allons utiliser l'approche anthropologique de Chevallard, et plus précisément l'analyse en termes de praxéologies mathématiques, pour caractériser les activités mathématiques concernant les fonctions dans les deux enseignements. Les analyses en termes de cadres et de registres, ainsi que celles en termes d'outil/objet des notions enseignées, préciseront certaines caractéristiques de ces activités et des techniques mises en œuvre à cette occasion, de même qu'elles seront le reflet des méthodes pédagogiques adoptées.

Avant de revenir plus précisément sur notre problématique et sur les méthodes de recherche utilisées, nous examinons maintenant quelques travaux antérieurs portant sur l'enseignement et l'apprentissage des fonctions.

3. Travaux existants sur les fonctions

De nombreux travaux existent sur le concept de fonction. Nous en avons retenu quelques-uns, soit pour leur portée assez générale, soit parce qu'ils portent sur l'enseignement des fonctions au niveau qui nous intéresse. Quelques lignes pour les situer.

La fonction vue en tant que processus / objet

Nous nous référerons ici tout particulièrement aux travaux pionniers de Dubinsky et Sfard.

Dubinsky [Breiddenbach et all, 1992] fortement influencé par les théories piagétiennes, développe une théorie hiérarchique de la connaissance mathématique qu'il nomme abstraction réfléchissante. Cette théorie définit plusieurs stades conceptuels dans le développement cognitif individuel non seulement d'un concept mathématique mais également de modes de raisonnement comme le raisonnement par récurrence. Nous présenterons ces différents stades en nous appuyant pour les éclaircir sur l'exemple du concept de fonction.

Le premier stade est le stade d'*action* où le nouvel objet (la fonction pour ce qui nous concerne) en construction est conçu comme une manipulation mentale ou physique d'objets réitérables. A ce stade l'élève est capable par exemple de substituer des valeurs dans une expression algébrique et de la calculer mais en le faisant, il distingue chacune des étapes de son calcul au lieu de considérer le calcul comme un seul bloc. De même, l'élève pourrait être capable de réaliser une composition de fonctions données par des expressions algébriques, mais ne pourrait le faire dans des situations plus générales si les domaines des fonctions données sont des intervalles disjoints ou si les fonctions ne sont pas exprimées algébriquement.

Quand l'action peut être envisagée comme un tout, transformant un objet donné en un autre objet, sans distinction des différentes étapes de la transformation, l'action a été intériorisée en *processus*. Le processus est alors le deuxième stade de l'évolution du concept dans l'esprit de l'élève. A ce stade l'élève peut combiner plusieurs processus entre eux ou inverser un processus. C'est alors que les notions d'injection et de surjection, par exemple, deviennent plus accessibles pour l'élève.

Quand le processus peut être transformé par une action, il a été *encapsulé* et devient à son tour un *objet*. Cependant Dubinsky ne manque pas de souligner que ce stade une fois atteint, il est souvent nécessaire en mathématique de faire un retour en arrière pour faire fonctionner le concept en tant que processus. Aller de l'objet au processus se réalise par *dé-encapsulation*.

Dubinsky souligne la difficulté d'atteindre le stade d'objet, et estime clairement qu'il ne le sera pas dans la phase d'enseignement scolaire voire même au début du cycle universitaire et c'est en ce sens qu'il se penche sur la caractérisation du stade de processus en tant que stade supérieur de développement du concept de fonction possible à atteindre à ce niveau d'enseignement. Il estime qu'il est en général difficile de distinguer les deux stades d'action et de processus, car la plupart des étudiants sont en transition du stade d'action au stade de processus. La question à poser pour un étudiant donné est donc à quelle distance sur le chemin de la transition action / processus se trouve t-il ? Pour répondre à cette question, il teste un groupe de 22 étudiants sur leur capacité à reconnaître une fonction dans des situations mathématiques très variées. Ceux-ci ont suivi un enseignement expérimental mis au point dans le but de développer leurs conceptions de la fonction en tant que processus, et fortement basé dans ce but sur l'utilisation de l'ordinateur et du langage de programmation ISETL. L'analyse de leur réponses lui a permis d'isoler quatre facteurs [Dubinsky, 1992, p.86-87] dont l'examen, chez un étudiant donné, doit permettre de juger de l'ampleur de la progression réalisée vers le stade de processus :

1. la restriction sur ce qu'est une fonction. Les trois principales restrictions envisagées sont : (a) la restriction de la manipulation : pour avoir une fonction, il faut pouvoir réaliser des manipulations explicites. (b) la restriction quantitative : une fonction ne peut mettre en relation que des nombres. (c) la restriction de la continuité : restriction concernant les graphiques de fonctions.
2. La sévérité de la restriction.
3. La capacité à construire de façon autonome un processus pour exprimer une fonction à partir d'une situation où rien n'est explicite.
4. La condition d'unicité de l'image envisagée correctement car les élèves ont tendance à confondre cette condition avec la propriété d'injection.

Ces facteurs, constituent en fait les difficultés résistantes des élèves face au concept de fonction, nous les prendrons particulièrement en considération lors de l'élaboration de notre questionnaire et verrons comment nous les intégrerons dans notre approche davantage portée sur les cadres et registres.

Sfard [Sfard, 1992] se place dans le cadre de la psychologie cognitive et cherche à refléter sur le plan individuel de l'évolution des connaissances, des hypothèses faites à partir de son étude historique et épistémologique de l'évolution de différents concepts algébriques dont celui de nombre, d'ensemble, et bien sûr celui de fonction qui nous intéresse tout particulièrement. Elle fait l'hypothèse que les concepts mathématiques présentent un aspect dual *opérationnel* et *structurel*, et que l'aspect opérationnel précède, en général, l'aspect structurel tant dans le développement cognitif du sujet, que dans le développement historique du concept. Dans [Sfard, 1992], elle insiste tout particulièrement sur l'évolution du concept de fonction.

L'histoire de l'évolution du concept de fonction commence véritablement, pour elle, vers la fin du 17ème siècle. Non pas que ce concept fut inexistant avant, elle reconnaît au contraire sa présence implicite depuis des temps anciens. Cependant cette longue période où la fonction n'a été utilisée qu'en tant qu'application implicite ne relève pas de sa théorisation. Notons que sa description de l'évolution historique de ce concept du 17ème siècle à nos jours concorde pour l'essentiel avec celle proposée par Youschkevitch sur laquelle nous nous sommes essentiellement appuyée dans la première partie. L'histoire du concept de fonction ne commence donc pour elle qu'avec les premières tentatives de formulation d'un concept général de la fonction englobant toutes les fonctions analytiques de l'époque. Justement ces premières définitions de la fonction (cf définitions de Bernoulli et d'Euler, paragraphe 1) qui confondaient fonction et expression analytique de fonction, reflètent précisément, à son avis, une conception de la fonction en tant que processus opérationnel. Cette conception, Sfard la repère d'après son analyse historique, avant une conceptualisation générale de l'idée de variable : "Bernoulli's and Euler algebraic definitions leaned on the concept of variable. Initially, both variable and constant were probably conceived as not much more than signs on paper. Identified with symbols, the variables seemed already to be real object on which processes (functions) could be performed (...) It didn't take long before Euler himself realised that (...) his simple "analytic expression" could not work." [ibid., p.62]. Si la définition proposée par la suite par Euler, qui constitue une première définition de la fonction en tant que loi de variation traduit encore à son avis une approche opérationnelle de la fonction, L'appréhension de la fonction comme un procédé de calcul d'une variable à partir d'une autre apparaît être un troisième mode de d'appréhension de la fonction, plus primitif, que son appréhension en tant que loi de variation.

Les deux stades opérationnel et structurel sont pour Sfard deux stades d'évolution de tout concept mathématique mais aussi deux façons différentes d'appréhender le même concept. Le stade opérationnel correspond à un point de vue dynamique et renvoie à la notion de processus, le stade structurel correspond à un point de vue statique et renvoie à la notion d'objet. Une fois le stade structurel atteint pour un concept donné, ce concept devient un objet à part entière qui peut à son tour être impliqué en tant que processus dans la *structuralisation* d'un nouveau concept de niveau supérieur. Cette vision de l'évolution des concepts crée une hiérarchisation des mathématiques très clairement exprimée chez Sfard : "the claims and examples presented here implies the view of mathematics as a hierarchy in which what appears to be a process at one level must be transformed into a full-fledged abstract object at a higher level to become a building block of more advanced mathematical constructs" [ibid., p.64].

Cependant, si le stade structurel correspond à un niveau plus évolué de la conceptualisation chez l'apprenant, atteindre le stade structurel ne signifie pas l'abandon de la conception opérationnelle. Au contraire, les termes de *processus* et d'*objet* doivent être compris comme *"les différentes facettes de la même chose, plutôt que comme des composantes totalement distinctes, séparées de l'univers mathématique.[4]"* [ibid., p.60]. Sfard insiste donc fortement sur la dualité de ces deux aspects du concept mathématique en constatant que l'activité mathématique se fonde souvent sur des alternances fréquentes entre ces deux conceptions. C'est l'accent plus fortement marqué sur la dualité processus / objet chez Sfard relativement à Dubinsky, qui situe probablement l'essentiel de la différence entre ces deux théories, leur vision du passage entre les deux stades processus et objet étant similaire.

[4] "different facets of the same thing rather than as totally distinct, separate components of the mathematical universe."

Concernant l'exemple de la fonction, cette dualité, d'après Sfard, apparaît dans les différentes définitions qui en existent. Certaines indiquent une conception très nette de cette notion en tant que processus opérationnel et d'autres montrent la fonction comme une relation statique. Mais il n'y a pas que les définitions véhiculées par le registre verbal ou symbolique qui font ressortir cette dualité. En fait les différents registres utilisés pour représenter le concept de fonction ne sont pas neutres vis-à-vis de ces deux aspects du concept. Le registre graphique présentant la fonction comme un tout, en donne une approche plutôt structurelle alors que le registre algorithmique ou de l'informatique, qui met l'accent sur le calcul permettant de transformer une variable en une autre, en donne une approche opérationnelle. Le registre algébrique peut être interprété de façon opérationnelle si l'accent est mis sur le calcul, mais il peut également être interprété structurellement si l'accent est mis sur la relation statique liant les deux variables entre elles. Soulignons en passant que ces remarques sur les différents registres utilisés pour représenter la fonction sont pour nous d'une grande importance étant donnée l'attention que nous leur accorderons dans notre travail.

Le passage de la conception opérationnelle à la conception structurelle se réalise, chez Sfard, en trois étapes principales, l'intériorisation, la condensation et la réification :

L'étape d'intériorisation se caractérise par la manipulation de nouveaux processus. L'apprenant va se familiariser avec les nouvelles actions liées à cette manipulation qu'il conçoit pour l'instant de façon détaillée. Il va par exemple pouvoir manipuler les formules algébriques de fonctions, substituant des valeurs numériques à la variable pour calculer la variable dépendante. Lorsque ces processus seront intériorisés, il aura acquis l'idée de variable et de dépendance fonctionnelle.

L'étape de condensation ressemble fortement à celle d'intériorisation, cependant l'apprenant est capable de considérer les différentes séquences de calcul du processus comme un tout. Il se réfère au processus plutôt en termes d'entrée-sortie, il les a *condensés*. Comme la fonction se conçoit à ce niveau comme un tout sans distinction de valeurs spécifiques, il peut étudier une fonction, tracer son graphe, associer globalement des fonctions et des représentations graphiques, combiner des couples de fonctions, déterminer la réciproque d'une fonction, voire même dériver et intégrer une fonction.

L'étape de réification constitue, elle, un véritable saut qualitatif par rapport aux deux étapes précédentes. Le concept peut alors être appréhendé comme un objet à part entière car il est maintenant dégagé du processus qui l'a produit. Il prend son sens dans le fait qu'il fait partie d'une certaine catégorie. Alors les propriétés de cette catégorie et les relations entre ses différents représentants peuvent être étudiées. De nouveaux problèmes peuvent alors être envisagés où le nouvel objet réifié est impliqué dans de nouveaux processus tels, pour l'objet réifié fonction, les équations différentielles et fonctionnelles par exemple.

Comme Dubinsky, Sfard ne manque pas de souligner la difficulté à atteindre ce niveau structurel. Elle se montre d'ailleurs plutôt pessimiste là-dessus et estime qu'il ne sera probablement jamais atteint par la plupart des élèves ou étudiants. Deux raisons principales sont avancées, l'une étant que la réification apparaît comme la généralisation indispensable de notions interprétées en termes de processus bien connus. Cette généralisation même, oblige dans la caractérisation de l'objet, à l'abandon des processus qui lui donnaient jusque là toute sa signification. La deuxième raison étant que la réification ne peut avoir lieu bien souvent que simultanément avec l'intériorisation d'un nouveau processus de niveau supérieur. C'est en effet, entre autres, la manipulation à travers des processus de ce concept en tant qu'objet indépendant qui doit stimuler la prise de conscience de l'objet en question, or comment manipuler un processus de niveau supérieur avant la réification de l'objet de niveau inférieur qui s'y trouve impliqué ? Pour reprendre l'exemple cité dans le paragraphe précédent, comment envisager les équations où l'inconnue est une fonction avant que la fonction ne soit conçue comme un objet indépendant ? Sfard voit là un véritable cercle vicieux. Autrement dit, l'hypothèse de hiérarchisation mathématique pose problème dans le développement cognitif de l'individu.

Sortir de ce cercle vicieux, du point de vue pédagogique est d'autant plus difficile que, selon Sfard, l'enseignement de tout nouveau concept mathématique se devrait de commencer par une présentation opérationnelle de ce concept et que la présentation structurelle ne doit se faire qu'après une durée d'apprentissage suffisamment longue et en tout cas pas avant que cela ne soit vraiment nécessaire. En effet, même si le niveau structurel n'est pas toujours atteint, développer chez l'apprenant des conceptions opérationnelles va dans le bon sens car ces conceptions ne représenteront pas un obstacle pour l'apprentissage éventuel ultérieur de conceptions structurelles. Alors que de viser un enseignement d'emblée structurel, comme cela se fait couramment, risque de provoquer chez l'apprenant des conceptions pseudo-structurelles qui, elles, entraveront sérieusement toute possibilité d'évolution future.

Mais alors la dialectique entre les deux aspects structurels et opérationnels ne sera que rarement à portée de l'apprenant et en tout cas uniquement après que le stade structurel soit atteint. Il nous semble que la difficulté de prendre en compte dans un enseignement donné, cette hiérarchisation dans le développement cognitif des concepts mathématiques du fait du cercle vicieux qu'elle induit, ainsi que la dialectique processus / objet, expliquent en grande partie les développements plus récents de la théorie de Sfard davantage axés sur la dimension sémiotique de l'activité mathématique [Sfard, 2000].

Malgré les apports incontestables de ces recherches que Artigue a soulignés dans [Artigue, 1998, p.242], leurs fondements sur la base de théories cognitives rend leur utilisation difficile dans l'analyse institutionnelle des programmes et manuels que nous nous proposons de mener. Relativement, par exemple, à la dialectique outil-objet de Douady, que l'on pourrait trop vite identifier à la dialectique processus/objet, il ne faut pas oublier que ces deux dimensions chez Douady sont à considérer du point de vue du fonctionnement des objets mathématiques dans les problèmes, alors que les dimensions processus et objet, chez Sfard ou Dubinsky, ont trait aux conceptions des élèves ou étudiants.

Cependant nous retiendrons quelques points de ces recherches :

- La difficulté d'atteindre le statut objet. En conséquence, ce qu'il nous faut attendre que les élèves sachent faire, se situera essentiellement au niveau que Sfard identifie comme l'intériorisation et la condensation de l'objet mais pas au niveau de la réification.
- Nous accorderons une attention particulière à l'aspect processus de la fonction en tant qu'aspect à la source de "certains dysfonctionnement de stratégies d'enseignement ne ménageant pas un espace suffisant pour le développement de la dimension processus des objets de l'analyse" [ibid., p.242]. Nous mettrons en évidence cet aspect processus de la fonction, s'il apparaît, dans les programmes et manuels étudiés, aux côtés des deux aspects que nous avons identifiés à partir de l'évolution historique du concept de fonction : l'aspect loi de variation, et l'aspect loi ensembliste.
- Nous nous inspirerons des tests qui y apparaissent, ainsi que des erreurs typiques répertoriées quant à l'appréhension de la notion de fonction, pour la constitution et l'analyse de notre questionnaire dans le chapitre 5.

Une approche différente, quoique relevant également de la théorie cognitive, est celle des obstacles épistémologique de Sierpinska.

Les obstacles épistémologiques chez Sierpinska

La théorie de la connaissance mathématique de Sierpinska [Sierpinska, 1992] se situe également dans le cadre général de la théorie cognitive et se fonde sur l'analyse historique du développement des concepts mathématiques. Sa vision de l'évolution historique d'un concept se centre sur les obstacles épistémologiques qui ont entravé son développement, aussi estime-t-elle que l'évolution d'un concept chez un individu ne peut être comprise qu'en termes de dépassement de ces obstacles. Chaque dépassement d'obstacle étant lié à *un acte de compréhension* dont elle distingue quatre catégories :

- *l'acte d'identification* qui consiste à distinguer un objet parmi d'autres,
- *l'acte de discrimination* (entre deux objets) qui permet non seulement de distinguer les différences entre deux objets donnés mais aussi de déterminer les propriétés de chacun d'eux,
- *l'acte de généralisation* qui est une prise de conscience de la possibilité d'étendre le champ d'application, et enfin

- *l'acte de synthèse* qui est la perception des liens entre des faits que l'on considérait comme isolés. En conséquence les faits, propriétés, relations, objets, etc. s'organisent comme un tout consistant.

Ces actes de compréhension s'organisent selon une certaine hiérarchie au sommet de laquelle se situent les actes de généralisation et surtout de synthèse. Ils ne peuvent se produire qu'après plusieurs actes d'identification et de discrimination, et vont permettre à leur tour des actes d'identification et de discrimination d'objets nouveaux.

Les obstacles épistémologiques ne peuvent selon elle être évités : L'enseignement doit donc les prendre en compte. En se basant sur l'étude historique du développement du concept de fonction, elle identifie les actes de compréhension qui construisent le concept de fonction dans l'esprit de l'individu au début de son enseignement. Notre but n'est pas de les énumérer tous, car cela conduirait alors à reproduire l'article, nous nous contenterons d'en exposer six qui nous apparaissent comme les plus pertinents relativement à l'étude du concept de fonction que nous souhaitons réaliser :

- *l'acte d'identification des changements observés dans le monde* en tant que problèmes pratiques à résoudre qu'elle considère comme l'un des premiers actes que l'enseignement doit prendre en compte. Elle pense que les fonctions devraient être présentées d'abord, comme des moyens créés par l'homme pour comprendre les changements qui se produisent dans le monde, comme des modélisations de liens (relations) entre objets changeants. Les élèves doivent d'abord comprendre la fonction comme un outil de description et de prévision des changements dans le monde réel. Elle estime même que cette vision de la fonction doit précéder toute définition mathématique élémentaire. Nous faisons un parallèle entre ces changements à étudier en tant que problèmes pratiques et l'activité sur les situations fonctionnelles dans l'enseignement français qui nécessite un certain travail de modélisation.
- Un autre acte parmi les premiers actes de compréhension est *l'acte d'identification de ce qui change*, et non pas seulement de *comment les choses changent*, ce qui permet de mettre l'accent sur les ensembles en jeu dans le concept de fonction et de rencontrer la notion de variable. Cet acte de compréhension va faciliter le suivant.
- L'*acte de discrimination entre deux modes de pensée mathématique*, le mode algébrique en termes de quantité connue et quantité inconnue, et le mode fonctionnel en termes de variables et constantes. En effet, les élèves conçoivent, jusque là, les équations en termes de quantités connues et quantités inconnues à déterminer, dans le cadre des fonctions elles devront être conçues en terme de variables et de constantes.
- Toujours en relation avec la notion de variable, se situe *l'acte de discrimination entre la variable dépendante et la variable indépendante*. L'élève doit comprendre que ces variables

sont asymétriques puisque l'une est indépendante, que l'autre dépend d'elle, et qu'en fait la variable indépendante détermine la variable dépendante de façon unique.

- Un autre acte de compréhension déterminant dans la construction de ce concept est *la discrimination entre le concept de fonction et les différentes représentations possibles de ce concept.* Cet acte de compréhension joue un rôle de toute importance dans l'assimilation du concept de fonction. Il faut varier les représentations de fonction (expression algébrique, graphe, tableau de valeurs, situation fonctionnelle, autres), et faire comprendre aux élèves qu'elles se valent toutes, dans le sens où aucune d'elles *n'est* la fonction, mais seulement une de ses représentations, et qu'il n'y a pas de prépondérance d'une représentation sur une autre, c'est le contexte du problème posé qui décide du choix de la représentation à faire. L'élève doit donc faire la différence entre la fonction et la représentation de la fonction. Ceci est un obstacle de taille, car l'auteur précise, qu'il se pourrait bien que cet acte ne se produise qu'après que le concept général de fonction ne soit synthétisé.
- Or, l'acte de compréhension que constitue la *synthèse du concept de la fonction* est très difficile à atteindre. Déjà historiquement des siècles d'évolution ont été nécessaires pour que naisse une définition telle que celle de Dirichlet, aussi l'auteur pense-t-il, comme nous l'avons vu dans notre historique de la fonction, qu'il est fortement déconseillé de donner au début d'un enseignement sur les fonctions, une définition de la notion de fonction plus élaborée que celle de Dirichlet. Ceci dans le but de proposer aux élèves la définition la plus proche possible de leurs manipulations du concept.

Nous retiendrons tout particulièrement, dans la théorie de Sierpinska, la position cruciale de l'assimilation de la notion de variable dans la construction du concept de fonction et le statut donné à la capacité de reconnaître une fonction en variant les registres, capacité significative, pour elle, du degré d'assimilation du concept de fonction puisque cette capacité est liée à la synthétisation du concept.

Même si les deux approches de Sfard et Sierpinska se centrent à la fois sur l'épistémologie et le cognitif, et si leur problématique se soucie d'une approche intuitive en liaison au sens à donner au concept à enseigner, elles sont irréductibles l'une par rapport à l'autre.

En effet, Sierpinska rattache les débuts de l'enseignement de la fonction à ce que nous avons appelé les situations fonctionnelles, et à la pratique des registres algébrique et graphique dans l'objectif de faire saisir les ruptures entre l'algèbre installée et le cadre fonctionnel à construire, ce qui doit aider à la construction de la conception de variable et de dépendance fonctionnelle. Sfard, elle, insiste sur la forme de manipulation du concept, qui doit être opérationnelle, algorithmique, et n'accorde pas d'attention particulière aux situations fonctionnelles. Ces deux approches différentes, qui impliquent une organisation différente de l'enseignement de la fonction, traduisent un souci assez général chez les chercheurs qui se sont penchés sur le concept de la fonction : Quel(s) aspect(s) de la fonction privilégier dans un premier temps ? à quelles définitions se référer ? comment envisager son évolution ? Un souci que résume très bien Perrin-Glorian [Perrin-Glorian, 1999b, p.15]: "L'articulation de différentes conceptions autour d'un concept à multiples facettes peut-il se faire dans un apprentissage par adaptation sur un temps raisonnable ?"

Faut-il enseigner la fonction en la rattachant à ses problèmes d'origine ou sur la base d'un formalisme plus moderne ?

Une autre étude, présentant quelques similarités avec celle de Sierpinska dans la mesure où l'auteur s'intéressant également aux conceptions des élèves, se base sur l'analyse historique du concept de fonction pour justifier de la nécessité d'introduire la fonction en la rattachant aux problèmes qui lui ont donné naissance, est celle de René de Cotret [René de Cotret, 1989]. Cette étude a particulièrement attiré notre attention parce qu'elle a involontairement dévoilé les limites d'une telle approche dans l'enseignement. L'auteur montre à travers l'étude historique qu'elle réalise, que si les caractéristiques premières du concept de fonction étaient les notions de variation et de dépendance alors que la notion de correspondance n'était qu'implicite, les définitions modernes qui sont celles actuellement proposées aux élèves, ne retiennent plus que la notion de correspondance. Or les notions de variation et de dépendance sont plus intuitives et plus pratiques, et donc plus faciles à mettre en scène dans des situations à des fins d'enseignement. Elle propose alors de fournir à l'élève les moyens de construire la notion de fonction à partir de son sens initial, et réalise dans ce but des situations mettant en jeu le mouvement en tant que relation distance / temps dans la mesure où "c'est dans l'étude du mouvement que l'idée de variable dépendante et donc de fonction est née". En testant les conceptions des élèves à propos du concept de fonction à travers ces situations, elle est obligée de constater la difficulté de trop nombreux élèves à percevoir le mouvement comme une relation distance / temps. Il lui faut bien conclure donc que *"les conceptions du mouvement qu'ont plusieurs enfants sont si controversées qu'elles ne permettent pas de voir les conceptions relatives à la fonction, le problème se situant avant, au niveau de la compréhension du mouvement lui-même"* [ibid., p.125].

Cette étude met en lumière, à notre sens, la difficulté de rattacher l'enseignement d'un concept aux situations et problèmes d'origine. L'expérience de René de Cotret soulève le problème de la place à donner aux situations fonctionnelles dans l'enseignement des fonctions et des moyens à utiliser pour les aborder. En particulier si elles apparaissent incontournables dans la conceptualisation de la fonction comme loi de variation[5] cette interprétation ne va pas de soi, y compris même pour certaines lois naturelles comme la vitesse, l'accélération (et autres) que les enseignants ont pourtant tendance à considérer comme évidentes aussi ne s'attardent-ils généralement pas sur la phase précédant la modélisation. Ces remarques rejoignent celles d'un physicien lors de la conférence sur le statut de la

[5] Pour plus de détails à ce sujet, se référer au mémoire de D.E.A de D. Pihoué "L'entrée dans le mode de pensée fonctionnel en classe de seconde", juin 1996.

réforme du calculus aux Etats-unis, que rapporte Thompson [Thompson, 1994, p.29]: *"Whether having had calculus or not, my students are as innocent as new-born babes' about acceleration and velocity".* Thompson conclut sur ce point dans son article que l'activité mathématique sur les situations fonctionnelles devrait être conjointement liée à une nouvelle façon d'observer les phénomènes naturels qui nous entourent afin que les élèves réussissent à se débarrasser de leur regard souvent pré-scientifique sur le monde.

Plus nuancée est la position de Noguès [Noguès, 1993] qui montre à travers son étude que les élèves français d'aujourd'hui souffrent d'un défaut de conceptualisation de ce qui est à la source même du concept de fonction : la correspondance arbitraire. Sans négliger le rôle primordial d'une activité mathématique basée sur la diversité des registres de représentation dans l'appropriation des concepts mathématiques, elle estime cependant que cette activité ne doit pas se réaliser aux dépens d'un formalisme suffisant pour permettre aux élèves de se constituer un réseau conceptuel structurant leurs connaissances et leur permettant de catégoriser les objets qu'ils manipulent, de même qu'elle ne suffit pas à contrebalancer l'effet négatif d'une étude de la notion de fonction limitée à des cas trop particuliers de fonctions. Or les programmes et surtout les manuels actuels, d'après son analyse, présentent manifestement cette tendance.

C'est dans le but de confirmer sa thèse qu'elle va tester les conceptions des élèves. Elle choisit pour cela de leur proposer de reconnaître 5 situations fonctionnelles, puis en mettant à leur disposition une définition de la fonction *suffisamment large*, leur donne la possibilité de modifier leurs réponses. Les résultats obtenus sont pour elle concluants quant à l'intérêt d'envisager l'enseignement de la fonction sans en limiter excessivement ni le cadre conceptuel d'étude, ni les exemples de fonctions étudiées, tout en maintenant la tendance actuelle basée sur l'intégration de divers registres de représentation.

De nombreux autres auteurs se sont intéressés aux défauts de conceptualisation des élèves que soulignent Noguès, nous ne citerons que Vinner [Vinner, 1993], Even [Even,1993]et Wilson [Wilson, 1994] qui montrent la *distance* entre les conceptions des élèves concernant la notion de fonction, et la définition moderne de fonction qui leur est enseignée. Si Vinner explique cette distance à l'aide d'un modèle cognitif de construction des concepts mathématiques à travers les notions de "concept-definition" et de "concept-image", Even et Wilson se contentent pour l'essentiel de la mettre en évidence. Ces dernières recherches qui ne nous apportent rien de nouveau sur le plan théorique ont cependant l'intérêt de relever ou de confirmer les conceptions erronées des étudiants sur le concept de fonction grâce aux questionnaires qu'elles réalisent.

Ces différents travaux que nous venons de présenter sont certes éloignés de nos préoccupations dans la mesure où ils adoptent, pour la plupart, une approche de type essentiellement cognitif, mais elles mettent en relief plusieurs points que nous intégrerons dans notre approche institutionnelle :

- Ils nous aident à reconnaître certaines erreurs liées à la difficulté d'une conceptualisation générale de le fonction,
- ils font apparaître aux côtés des aspects *loi de variation* et *loi ensembliste* liées à l'évolution historique du concept, un troisième aspect pour le concept de fonction, l'aspect *dynamique de processus*,
- ils soulignent la difficulté de prendre en compte, dans un même enseignement, les différents aspects du concept de fonction,
- ils font ressortir l'importance d'une activité sur les fonctions basée sur la multiplicité des représentations,
- ils nous aident à situer ce que nous sommes en mesure d'attendre des élèves en termes de savoir et de savoir-faire relativement au niveau d'étude considéré.

4. Retour sur la problématique et la méthodologie : annonce de l'ensemble du travail de thèse

4.1 Questions et hypothèses de travail

Dans le contexte précisé ci-dessus, notre travail consistera à étudier la transposition didactique du concept de fonction au niveau du lycée en établissant une comparaison entre le système d'enseignement français (classes de 2nde et de 1ère) et le système d'enseignement palestinien (classes de 10ème, 11ème et 12ème). La notion de transposition didactique est une notion, au départ, théorique qui vise à pointer l'écart existant entre le savoir savant et le savoir enseigné en passant par le savoir à enseigner ; les développements plus récents de la théorie en termes de praxéologies donnent quelques outils pour l'étudier. Notre recherche se propose de les mettre en œuvre et de les préciser sur l'étude d'une notion spécifique, celle de fonction. La comparaison des deux systèmes d'enseignement français et palestinien pointera, de façon indirecte, l'écart qui existe entre le savoir savant et le savoir enseigné. Mais nous ne nous intéressons pas seulement aux processus de transposition didactique mais bien à l'impact des choix respectifs de transposition sur les savoirs et savoir-faire qui sont transmis aux élèves.

Nous nous proposons par conséquent d'articuler deux types de questionnements. Le premier concerne *la description et l'étude de l'écologie institutionnelle de l'organisation du savoir à enseigner et du savoir enseigné de la notion de fonction* et le second, *le sens et les connaissances qui en résultent chez les élèves*. Nos premières questions sont alors les suivantes :

- Quel est le rapport de chacune des deux institutions, lycée français et lycée palestinien avec l'objet de savoir commun, le savoir fonction ? Comment se caractérise ce savoir dans chacune d'entre-elles ? Quelles sont les principaux points de ressemblance et de différence ?
- Quel est le rapport personnel des élèves français et palestiniens avec l'objet fonction ? Que signifie pour eux connaître le concept de fonction ? Quel sens lui donnent-ils et quelles sont les tâches en relation avec ce concept qu'ils sont capables de résoudre ?

Notre première lecture des manuels palestiniens et français a révélé des différences essentielles au niveau de l'introduction du concept de fonction, et en particulier au niveau des modes d'appréhension de la fonction qui étaient privilégiés. Un objet en particulier, l'objet variation semble être présenté puis subir une évolution différente dans chacune des deux institutions qui nous intéresse. Notre brève analyse historique a révélé la position centrale de cet aspect de la fonction, dont la conceptualisation a permis une première généralisation du concept puis dont, en quelques sorte, le dépassement, a permis d'aboutir à une deuxième généralisation du concept imposant son aspect loi ensembliste. Notre étude théorique nous a permis de déterminer aux côtés de ces deux modes d'appréhension de la fonction, un autre mode d'appréhension, plus primitif dirons-nous, l'appréhension de la fonction en tant que processus.

Par ailleurs notre étude historique et théorique a également fait ressortir que chacun de ces modes d'appréhension de la fonction était intrinsèquement lié à une approche des fonctions par des tâches/techniques spécifiques à travers des cadres et registres spécifiques, ainsi qu'à une implication caractéristique des différentes notions liées à la fonction (dont la notion de fonction elle-même) selon leur statut outil ou objet.

Aussi nous faisons l'hypothèse suivante :

Hypothèse 1. le mode d'appréhension choisi pour installer le concept de fonction, l'organisation praxéologique de la fonction, les cadres et registres utilisés ainsi que l'implication des différents objets selon leur statut outil ou objet s'articulent en un tout équilibré qui diffère d'une institution à l'autre.
Bien sûr, puisque le rapport institutionnel est amené à évoluer au fil de l'enseignement, cet ensemble articulé doit également évoluer, aussi nous proposons nous d'étudier cette évolution. Par ailleurs, il nous est apparu que ce *tout équilibré* était le reflet d'intentions didactiques évidentes et de méthodes pédagogiques spécifiques pour les appliquer :

C'est pourquoi nous faisons également cette deuxième hypothèse :

Hypothèse 2. L'organisation générale de l'enseignement s'accorde avec de grandes intentions didactiques spécifiques à chacun des systèmes d'enseignement : du côté français l'accent est davantage mis sur l'aspect intuitif des notions à installer, et sur le sens à leur donner ; du côté palestinien, la présentation de l'enseignement est plus classique et aboutit à un enseignement davantage axé sur l'apprentissage de techniques de résolution d'exercices standards.

Pour répondre à nos premières questions en testant nos hypothèses nous envisageons d'organiser notre comparaison des deux systèmes d'enseignement en nous souciant de respecter un fil conducteur pour mener nos réflexions. Ce fil conducteur se traduit par une liste de questions auxquelles nous tentons de répondre.

- **Quelle est la place laissée à la définition générale de la fonction ?** L'appréhension de la fonction en tant que loi ensembliste est-elle prise en compte dans l'enseignement ? Si oui, l'est-elle de façon explicite ou implicite ? Quels sont les registres choisis de préférence à cet effet ? Quelles sont les fonctions utilisées ?
- **Comment se fait l'étude des variations ?** Quelle évolution subissent éventuellement les techniques au cours des années ? Les variations (et cette question rejoint la question suivante) sont-elles utilisées pour traiter d'autres problèmes mathématiques ou non ?
- **Quelle est la place de la modélisation interne aux mathématiques** (notamment géométrie) **ou issues de situations externes** (vie quotidienne ou autres disciplines) ? Quelles relations existent-elles entre les fonctions et les autres disciplines, dans la mesure où cela met l'accent sur le sens qu'on a voulu donner aux notions ?
- **Comment est pensée l'utilisation des** registres ? Y a t-il des registres privilégiés ? De quelles manières sont-ils sollicités ? Quel est le lien apparaissant entre les différents registres ?
- **Quelle initiative est-elle laissée aux élèves dans les exercices ?** Plus précisément, si plusieurs techniques sont proposées à l'élève pour une même tâche, a t-il dans un exercice donné, le choix de la technique à mettre en œuvre ou celle-ci est-elle, d'une façon ou d'une autre, imposée ?

Ces questions sont celles qui ont directement émergé de nos premières interrogations et de la précision de notre cadre théorique et de notre problématique, l'analyse détaillée des manuels par la suite pourra faire émerger de nouvelles questions.

4.2 Choix méthodologiques

Nous envisageons d'articuler plusieurs lignes d'analyse : *l'analyse en termes de praxéologies mathématiques dans le cadre du questionnement écologique*, qui doit nous permettre de caractériser les activités mathématiques concernant les fonctions dans les deux enseignements, *l'analyse en termes de cadres et registres associés* et *celle en termes de statut outil ou objet des notions enseignées*, qui doit permettre de préciser certaines caractéristiques de ces activités et des techniques mises en œuvre ; mais aussi ces deux dernières lignes d'analyse permettent de mieux faire ressortir les intentions didactiques et les méthodes pédagogiques visées. Enfin, la conduite de ces travaux dans une perspective comparative vise en définitive à mettre en évidence le poids respectif des différents choix de transposition didactique sur les rapports personnels des élèves à l'objet fonction et à éclairer en particulier les difficultés liées à l'enseignement de la fonction.

4.3 Présentation de la thèse

Nous définissons dans la première partie A de notre travail, le cadre théorique sur lequel nous nous sommes basée pour mener cette étude ainsi que la méthodologie générale que nous avons adoptée. Cette première partie se décompose en deux chapitres dont nous venons d'exposer le premier. Dans le deuxième chapitre nous exposons de façon plus précise notre méthode d'analyse des programmes, des manuels et des exercices/problèmes de ces manuels par lesquels nous étudierons le rapport institutionnel à l'objet fonction :

Puisque nous nous plaçons dans le cadre général de l'anthropologie cognitive et que nous adoptons le questionnement écologique, il nous a fallu prendre en compte tous les objets d'enseignement susceptibles d'être enseignés dans le cadre d'un enseignement sur les fonctions, de part et d'autre, au niveau scolaire considéré. C'est à les répertorier que nous avons procédé dans un premier temps. Nous avons ensuite inscrit tous ces objets d'enseignement dans les principales tâches dans lesquelles ils peuvent être impliqués, et mis en évidence les différentes techniques disponibles pour leur résolution. Dans ce but, nous avons réalisé l'inventaire des tâches puis celui des techniques pouvant exister dans les deux environnements concernés. Mais les techniques de résolution des différentes tâches étant, nous l'avons vu dans notre chapitre I, en grande partie déterminées par les cadres et surtout les registres dans lesquels ces tâches sont exprimées, nous avons au préalable précisé les différents cadres et registres qui leur sont associés.

Ces différents inventaires une fois effectués ont servi de support à l'analyse des contenus des programmes et de la partie cours des manuels, ainsi qu'ils constituent le support de la grille d'analyse de la partie exercices/problèmes de ces manuels, analyses prévues dans la deuxième partie de notre thèse. L'élaboration de la grille est également un des objectifs de notre chapitre II. Elle fonctionne en partie à l'aide de tableaux qui permettent d'articuler les différentes lignes d'analyse que nous avons adoptées : en termes de tâches/techniques/technologies, en terme de cadres/registres, en termes d'outils/objets. La description et le fonctionnement de cette grille sont amplement définies dans ce deuxième chapitre.

La deuxième partie B de notre thèse, est consacrée à l'étude du rapport institutionnel à l'objet fonction. Le premier chapitre concerne l'institution française des classes de seconde et première ; le second chapitre concerne l'institution palestinienne du secondaire supérieure correspondant au lycée en France. Nous avons souhaité étudier séparément chaque système d'enseignement pour faire ressortir leur cohérence d'ensemble, la comparaison est effectuée en conclusion de cette deuxième partie. Cette étude s'effectue donc sur la base de la lecture analytique des programmes officiels et de(s) manuel(s) retenu(s) pour chaque niveau scolaire, à l'aide de l'outil méthodologique développé dans le chapitre II de la partie A; celui-ci s'applique, nous l'avons dit, à l'analyse des contenus des programmes, de la partie cours des manuels, et des exercices/problèmes de ces manuels. Mais pour que les intentions didactiques et les méthodes pédagogiques soient entièrement prises en compte nous avons envisagé une analyse des programmes et de la partie cours des manuels sur le mode discursif, conjointe à la première, respectant la présentation et la progression des enseignements afin de mieux faire ressortir leur logique interne, convaincue que nous sommes que cet aspect est loin d'être neutre relativement au rapport à l'objet fonction qu'on a voulu installer.

L'étude des programmes constitue la première étape de l'étude de la transposition didactique, puisque les programmes sont le résultat de la transformation du savoir savant en savoir à enseigner. Cette transformation va se poursuivre avec la constitution des manuels pour aboutir au savoir enseigné, à laquelle va s'ajouter cependant l'influence du professeur, dans la marge de manœuvre qui lui est laissée pour constituer son propre cours, même si celle-ci se trouve largement diminuée par l'existence même des manuels et autres références.

Notre analyse doit tenir compte alors de *l'écart* entre les intentions des programmes et l'application de ces intentions dans les manuels. Puisque nous avons opté pour une analyse exhaustive des manuels, et en particulier des exercices/problèmes proposés dans ces manuels, il nous a été difficile d'en sélectionner plusieurs pour chaque niveau scolaire. Nous avons alors arrêté notre choix sur des manuels de difficulté moyenne, un par niveau scolaire du côté français, choisis pour être parmi les plus utilisés à l'époque où se situe notre étude, en espérant la plus grande représentativité. Il nous semble, de toute façon difficile, de caractériser de façon précise le savoir enseigné du côté français, puisque le professeur n'est *officiellement* tenu que par les programmes, qu'il a la *liberté* d'utiliser le ou les manuels de son choix, ou autres références, pour constituer son cours. D'ailleurs, il nous a été donné lors de notre D.E.A. d'observer un professeur de 2nde pendant toute la durée de son enseignement sur la fonction valeur absolue, et nous avons pu constater, même si cela n'était pas précisément notre sujet d'étude alors, que son cours était très éloigné de la progression proposée par le manuel de la classe[6]. Aussi nous sommes consciente en faisant le choix d'analyser un manuel en particulier que celui-ci ne reflète pas nécessairement le cours enseigné. Mais notre souhait dans l'étude de la transposition didactique du concept de fonction que nous menons est davantage d'éclairer l'écart

[6] Amra, N. (1994), mémoire de D.E.A "Contribution à l'étude différentielle des pratiques des élèves en classe : comparaison entre une classe forte et une classe faible, "Didactiques des mathématiques, Université de Paris 7.

entre les choix de transposition faits dans chacun de ces deux systèmes d'enseignement, que de caractériser de façon fidèle l'un ou l'autre des enseignements. Le but est en effet de faire ressortir, l'impact de ces choix différents sur les connaissances qui vont être acquises par les élèves.

Cependant l'étude des programmes officiels n'est possible que du côté français, en effet du côté palestinien, il est important de souligner qu'il n'y a pas de programmes officiels : le ministère de l'éducation jordanienne prend à sa charge la rédaction de deux manuels pour chaque niveau scolaire : le manuel de l'élève et le manuel du professeur. Il nous semble que cette réalité qui se justifie dans le milieu des inspecteurs par une volonté d'uniformiser le savoir à transmettre aux élèves[7], traduit, également, une certaine rigidité de l'institution palestinienne (et jordanienne). Il n'est donc pas possible d'analyser le savoir à enseigner et de ce fait une partie de l'écart entre le savoir à enseigner et le savoir enseigné ne nous est pas donnée à voir. Néanmoins, il nous semble que cet écart va se trouver d'autant amoindri que la marge de manœuvre du professeur, nous semble très réduite ici : Les professeurs n'ont aucune interprétation personnelle des programmes à faire, il n'ont par ailleurs pratiquement pas d'autres références que les manuels uniques du ministère pour préparer leurs cours. De plus, les professeurs de l'enseignement secondaire ne reçoivent aucune formation spécifique. Ils sont formés *sur le tas* ; même si aujourd'hui il est vivement conseillé aux personnes se destinant au métier d'enseignant de suivre parallèlement ou consécutivement à leurs études disciplinaire, une formation académique aboutissant à un diplôme de didactique des disciplines et d'éducation sanctionnant 30 U.V., ceci est loin d'être une généralité. Il est cependant fort probable que le poids des traditions joue fortement sur le professeur, qui devrait avoir davantage tendance, relativement à l'enseignant français, à reproduire l'enseignement qu'il a lui-même reçu durant sa scolarité. En général, du fait de la spécificité du système palestinien (et jordanien) quant à la désignation du savoir à enseigner et du savoir enseigné, il nous apparaît plus facile de caractériser le savoir enseigné dans l'institution palestinienne. Justement à ce propos, dans le cadre d'observations informelles de trois professeurs palestiniens, à l'occasion de leur enseignement sur les fonctions en classe de 10ème, que nous avons menées pour mieux nous rendre compte de ce que représentait l'enseignement en Palestine, nous avons pu constater que leurs cours était assez largement une reproduction du manuel (de l'élève).

Enfin, dans la conclusion de cette deuxième partie, nous traitons la comparaison entre les deux institutions à la lumière des éléments clés qui ont été soulevés lors des analyses séparées en ayant pour fil conducteur de répondre aux questions formulées dans notre problématique. Nous nous sommes intéressée plus particulièrement aux objets visés par ces questions ainsi qu'à certains autres

[7] C'est ce qui est ressorti des discussions informelles regroupant professeurs, inspecteurs et autres responsables du ministère de l'éducation palestinienne, chercheurs en éducation et en didactique, mathématiciens professeurs de mathématiques dans les différentes universités locales, etc, dans le cadre d'un workshop organisé comme préalable à l'élaboration des nouveaux programmes palestiniens.

objets ayant apparu au cours de l'analyse séparée comme caractéristiques de la spécificité des processus de transposition didactique propre à chaque institution.

Cette analyse institutionnelle nous permettra de mieux comprendre les particularités de l'objet fonction et de son fonctionnement dans chacune des deux institutions étudiées. Elle constitue en cela un préalable indispensable à l'analyse du rapport personnel à l'objet fonction des élèves de chacune des deux institutions française et palestinienne qui fait l'objet de la dernière partie de notre thèse.

Cette dernière partie qui correspond donc à la partie expérimentale de notre travail, s'adresse aux élèves de chacune des deux institutions en fin de cycle d'étude sur la fonction, soit en cours d'année de 12ème pour les élèves palestiniens, et en fin d'année de 1ère pour les élèves français. Nous avons élaboré un questionnaire en deux parties : La première visant à faire ressortir ce que représente pour les élèves le concept de fonction, et la seconde à nous interroger sur leurs capacités à résoudre différentes tâches mettant en jeu ce concept. Ici, il nous faut souligner que même la première partie qui s'intéresse aux conceptions des élèves relativement à l'objet fonction, a été considérée selon sa dimension institutionnelle, en tant que résultant de l'enseignement reçu. Cette dimension institutionnelle est particulièrement mise en lumière par les résultats des élèves dont nous verrons qu'ils diffèrent grandement selon que les élèves appartiennent à telle ou telle institution. Les difficultés ou au contraire les points forts des élèves peuvent alors être rattachés à l'enseignement reçu.

L'élaboration de ce questionnaire s'est ainsi basée sur l'analyse institutionnelle réalisée dans la deuxième partie de notre thèse. Celle-ci nous a permis en effet d'établir de façon précise les enjeux de l'enseignement de la fonction de part et d'autre, en particulier sur les conceptions relatives à la fonction que cet enseignement est susceptible d'engendrer, notamment du fait de la place de la définition générale de fonction et des exemples ou classes de fonctions rencontrées dans chacun de ces enseignements et aussi, sur les savoirs et savoir-faire à acquérir en terme de tâches/techniques. Les travaux sur la fonction auxquels nous nous référons au chapitre I, nous ont par ailleurs été utiles pour l'élaboration de la première partie du questionnaire, puisqu'ils précisent certaines erreurs et difficultés récurrentes généralement liées à la manipulation de la fonction. Mais nous avons également pu en tirer profit pour établir certaines des questions de la deuxième partie du questionnaire. Dans l'analyse a priori de notre questionnaire par laquelle nous démarrons la dernière partie de notre travail, nous reprenons, entre autres, nos questions et hypothèses initiales de manière plus spécifique à une démarche expérimentale.

La composition des différentes questions de ce test a nécessité dans un premier temps de repérer des objets d'enseignement pouvant être présentés en tant que tâches susceptibles d'être, sinon résolues, du moins comprises par les élèves des deux institutions ; ce qui en soi était loin d'être sans difficulté étant donné l'éloignement des deux enseignements français et palestinien. Nous avons opté alors pour des questions formulées essentiellement de façon non typique, ce qui a permis a priori d'éviter de favoriser une des deux populations à tester, mais aussi d'évaluer les capacités de chacune d'elle à mobiliser leurs connaissances pour la résolution de tâches non classiques.

Les questions pour lesquelles nous avons prévus une première formulation ont été ensuite présentées aux professeurs français et palestiniens dont les élèves allaient être testés. Certaines questions ont été reformulées suite à leurs remarques alors que deux questions de la première partie du questionnaire, et trois questions de la deuxième partie ont dû être supprimées ou remplacées.

Finalement, en conclusion, les résultats de l'analyse des productions des élèves sont confrontés aux résultats de l'analyse institutionnelle afin de dégager les réponses aux quelques questions qui sont à l'origine de notre travail.

Chapitre II

Construction de la grille d'analyse

1. Introduction

Nous présentons dans ce chapitre l'organisation de l'analyse des programmes et des manuels ainsi que la constitution de notre grille d'analyse sur la base de l'étude théorique que nous avons menée dans le chapitre I. En préliminaire de notre travail, nous identifions les différents objets d'enseignements présents dans les deux institutions, et nous définissons les différents cadres et surtout les registres qui leur sont associés et qui interviennent dans notre analyse.

L'approche anthropologique constitue la base principale de notre analyse : nous présentons donc la liste des principales tâches pouvant intervenir dans le cadre de l'enseignement au niveau du lycée en France et en Palestine, laquelle sera suivie de l'inventaire des techniques disponibles pour chaque tâche sans omettre de préciser leur environnement technologique. Il s'agit donc de la présentation d'organisations ponctuelles (organisation par type de tâches) mais nous avons respecté néanmoins quelques regroupements dans le but d'en faciliter la lecture. Chaque regroupement peut correspondre grossièrement à un thème d'étude. Ce choix de présentation par organisations ponctuelles a pour nous l'intérêt de mieux faire ressortir les différentes techniques disponibles pour un type de tâche donné afin de faciliter par la suite la comparaison entre les deux systèmes d'enseignement français et palestiniens: Nous verrons en effet, que si les tâches coïncideront souvent des deux côtés, les techniques mises en œuvre diffèrent. Nous proposerons par la suite quelques exemples d'organisations locales.

2. Identification des différents objets d'enseignement et des différents registres relatifs aux fonctions

2.1 Les différents objets d'enseignement

Nous avons vu, dans notre analyse du savoir, que l'on pouvait dégager trois modes d'appréhension du concept de fonction : les modes d'appréhension comme "processus", comme "loi de variation" et comme "loi ensembliste". Une lecture préalable des manuels et programmes des deux environnements qui nous concernent, montre que le mode d'appréhension comme loi de variation est très présent dans le secondaire français dès l'introduction du concept de fonction étant donné la position cruciale que semble y détenir le notion de variation. Dans le secondaire palestinien, par contre, la notion de variation est quasiment absente avant la classe de 12ème, et la présentation de la fonction en référence à la notion de relation, laisse penser à une première appréhension du concept en tant que loi ensembliste. L'étude des organisations mathématiques doit pouvoir confirmer cette première lecture, et montrer également comment, étant donné le mode d'appréhension choisi pour l'introduction du concept de fonction, sont abordés les autres modes d'appréhension.

La fonction est un concept essentiellement introduit dans l'enseignement secondaire (français comme palestinien) à partir de la classe de la Seconde ou 10ème. Il ne faudrait pas penser que le concept de fonction soit complètement inconnu avant cette classe ; cela signifie, pour nous, qu'une approche plus générale du concept s'amorce à ce moment.

Son enseignement s'articule donc avec tous les objets nécessaires à sa définition soit : les ensembles de départ et d'arrivée, le domaine de définition et le but, l'image et l'antécédent, éventuellement la fonction par rapport à la relation.

Une fois l'objet fonction constitué, d'autres objets peuvent être considérés. Il y a notamment, les objets relatifs aux propriétés de la fonction, propriétés ensemblistes (injection, surjection, bijection), ou propriétés que je qualifierai de géométriques parce qu'elles se traduisent par une propriété du graphe faisant intervenir les transformations géométriques étudiées par ailleurs (parité, périodicité, fonction admettant un axe ou un centre de symétrie). Il y a également, les objets que constituent les opérations sur les fonctions, dans le sens large, permettant d'obtenir de nouvelles fonctions (les quatres opérations, la composition de fonction et la réciproque de fonction).

A un autre niveau se situent encore les attributs du concept de fonction que sont la variation et l'extremum. Ces deux attributs sont directement en relation avec la fonction vue comme "loi de variation", et nous éclairent de façon évidente sur la place que détient la notion de variable dans l'enseignement de la fonction. Place d'autant plus importante, si l'on tient compte du fait que le concept de fonction vient s'installer au niveau de l'enseignement secondaire après une algèbre installée au niveau du collège et avant l'enseignement de l'analyse ; cette notion de variable, par opposition à la notion d'inconnue, permet alors une première distinction des deux domaines mathématiques différents que sont l'algèbre et l'analyse.

Deux autres objets d'enseignement du concept de fonction ont une place emblématique dans l'enseignement du concept de fonction à ce niveau scolaire, ce sont les situations fonctionnelles et les résolutions d'équations ou d'inéquations. Les situations fonctionnelles sont, pour nous, des problèmes donnés dans un cadre non fonctionnel, que la fonction permet de modéliser puis de résoudre. Ces problèmes prennent de l'importance dans la pédagogie moderne qui estime nécessaire de baser l'enseignement sur la résolution de problèmes afin de donner un aspect fonctionnel (dans le sens de la fonctionnalité) aux concepts enseignés leur donnant plus de sens aux yeux des élèves. Cet objet d'enseignement certes se caractérise par des changements de cadres (accompagnés de changements de registre), passage du cadre non fonctionnel de départ au cadre fonctionnel permettant de résoudre le problème avec retour éventuel vers le cadre de départ (non fonctionnel) pour répondre aux questions posées dans ce cadre (ces notions de cadres et de registres seront précisées dans les paragraphes suivants). Mais il se caractérise également par sa similarité, du moins pour la partie concernée par le cadre fonctionnel, avec l'objet "étude de fonction", et par l'importance qu'il peut avoir dans l'acquisition de la notion de variable. Il faut signaler ici le D.E.A de Pihoué, qui voit dans ces problèmes un des principaux moyens d'acquisition de la notion de variable et, par ce fait, d'entrée dans ce qu'il appelle "le mode de pensée fonctionnel" en classe de Seconde.

Parmi les questions de résolution d'équations/inéquations, il faut distinguer deux principaux types d'objet d'enseignement liés à l'enseignement de la fonction à ce niveau scolaire : les résolutions graphiques d'équations/inéquations et les questions d'existence de solution avec détermination éventuelle d'une solution approchée. La résolution graphique d'équations (ou d'inéquations), dans la mesure où elle se réalise à partir de la courbe de la fonction correspondant à l'équation, peut donner à l'équation valeur de recherche d'antécédent. Le fait de marquer les interrelations entre fonctions et équations peut avoir des effets positifs sur l'acquisition de ces deux notions. Assude rattache, en ce sens, la difficulté constatée des élèves d'aujourd'hui avec la racine carrée en général et avec les résolutions d'équations avec racine carrée, au fait que les interrelation entre objet racine carrée et fonction racine carrée ne sont pas suffisamment soulignées [Assude, 1998]. Insister sur ces interrelations peut également aider l'élève à passer de la conception des équations en termes de quantités connues et de quantités inconnues à leur conception en termes de variables dépendante(s) et indépendante, soit de passer du cadre algébrique installé dans le niveau du collège au cadre fonctionnel nouveau en classe de Seconde. Mais la résolution d'équation présente un intérêt supplémentaire du point de vue didactique par le fait même qu'elle constitue une occasion d'utiliser le concept de fonction selon son statut outil par opposition à une utilisation plus fréquente de ce concept selon son statut objet. Le deuxième type d'objet d'enseignement fait appel à la notion de variation qui est utilisée selon son statut outil dans la technique de résolution de ces équations. Le recours aux variations de la fonction mais aussi la technique même de recherche d'une solution approchée qui nécessite des calculs successifs de différents couples (antécédent, image), inscrit nous semble t-il, cet objet d'enseignement dans le cadre fonctionnel.

Notre grille d'analyse doit nous permettre d'examiner ces différents objets au sein des organisations mathématiques définissant les environnements que nous étudions.

2.2 Les registres de représentation de fonctions

Nous avons souligné dans le chapitre I le rôle primordial des registres de représentations dans les activités des élèves sur les fonctions et, en particulier leur rôle déterminant dans les techniques selon lesquelles les tâches mettant en jeu le concept de fonction sont résolues. Il convient donc de préciser les principaux registres de représentations impliqués dans l'enseignement de la fonction à ce niveau. Nous nous baserons sur le travail de Gutzman-Retamal que nous avons présenté dans le chapitre I. Elle a distingué, rappelons le, cinq principaux registres de représentations en étudiant le concept de fonction en classe de 3ème française. Ceux-ci sont :

- le registre algébrique,
- le registre graphique,
- le registre de programmation,
- le registre des tableaux de valeurs.

Elle ne considère pas dans son étude le registre verbal ou de la lange naturelle en tant que registre distinct mais lui retient néanmoins son rôle de communication et donc de liaison entre les différents registres possibles.

Nous retenons également ces registres en leur ajoutant quelques autres de façon à prendre en compte les registres plus spécifiques de l'enseignement secondaire mais aussi ceux plus spécifiques de l'enseignement palestinien :

- le registre du diagramme sagittal,
- l'ensemble de couples ordonnées,
- le registre symbolique qui est, pour nous, un registre qui contient les nombres et les écritures algébriques. Nous avons préféré ce terme en réservant le mot "algébrique" au cadre correspondant et parce que le registre symbolique ne se limite pas à ce cadre.
- le registre ensembliste ($R = \{(x, y)$ t.q $y = x^2$ et $x \varepsilon N\}$),
- le registre du tableau de variation,
- le registre des figures géométriques (pour les situations fonctionnelles).

Dans le paragraphe suivant, ces différents registres seront relativisés aux cadres dans lesquelles ils apparaissent le plus souvent. Quant au registre de la langue naturelle, nous le considérons aussi comme un registre quelque peu particulier car il se présente dans les différents cadres intervenant lors de l'activité mathématique sur les fonctions et souvent en accompagnement d'un ou de plusieurs autres registres. De ce fait, nous ne le distinguerons pas, le plus souvent, dans notre répertoire des tâches/techniques aussi nous souhaitons préciser dès maintenant quelques points le concernant : Tout d'abord, il faudra garder à l'esprit, lors de l'étude des différentes tâches /techniques, que le registre verbal est toujours présent, même s'il n'est pas l'unique registre, dans les énoncés des tâches ; leur résolution suppose souvent, déjà, une conversion du registre verbal vers un autre registre que nous ne mentionnerons que lorsque nous le jugerons nécessaire. Ensuite, ce registre est utilisé pour exprimer certaines fonctions que nous distinguons en quatre catégories principales :

- Les *situations fonctionnelles* déjà présentées dans les objets d'enseignement, nous n'y nous reviendrons pas. Précisons cependant que relativement à ce type de problèmes nous distinguons les tâches liées à la modélisation, que nous présentons séparément, ainsi que quelques autres tâches proposées avant modélisation, rarement demandées, et qui supposent une résolution dans les cadres et registres d'origine.
- *Certaines fonctions algébriques de référence* sont quelquefois exprimées uniquement dans le registre verbal, par exemple, "f est la fonction racine carrée". Dans la pratique, nous ne distinguerons pas ces fonctions des autres fonctions exprimées dans le registre symbolique-algébrique.
- *Les fonctions qui ne se prêtent pas à un traitement algébrique*, qu'elles soient algorithmiques ou non. Prenons par exemple les deux fonctions suivantes: "f est la fonction qui a tout élève de la classe de Seconde fait correspondre sa mère", ou encore "f est la fonction qui, à chaque entier naturel, fait correspondre une valeur allant de 1 à 6 déterminée par un lancer de dé". Précisons d'emblée que les fonctions de ce dernier type ne se prêtent qu'à un nombre réduit de traitements, nous y référerons par l'appellation *fonction non-algébrique*.
- enfin, ce registre est utilisé, éventuellement en accompagnement d'autres, pour décrire une *fonction par certaines de ses propriétés*. Les seules tâches impliquant des fonctions ainsi décrites sont les tâches de *représentation de fonction* et *d'expression fonctionnelle*, nous y reviendrons dans le répertoire des tâches et techniques.

3. Cadres et registres associés

Nous présentons, ici, les différents cadres intervenant lors de l'activité mathématique sur les fonctions au niveau scolaire qui nous concerne, ainsi que les différents registres qui leurs sont associés. Cette présentation nous permettra de mieux comprendre les tâches et leurs techniques de résolution en termes de changement de cadres et, surtout, de conversions de registres. Nous ne faisons pas de référence particulière au registre verbal, rappelons-nous qu'il peut être présent dans les différents cadres que nous considérons.

Quatre cadres principaux se dégagent de notre étude : le cadre numérique, le cadre algébrique, le cadre fonctionnel, et le cadre géométrique.

3.1 Le cadre numérique

Le cadre numérique est utilisé explicitement essentiellement lors de l'installation de la notion de fonction. Par la suite, le recours à ce cadre, nous le verrons, est surtout à la charge de l'élève et aide principalement à améliorer les représentations graphique de fonctions. Il relève essentiellement du domaine des nombres et fait alors appel à des registres où apparaissent des nombres liés deux à deux par le lien fonctionnel *antécédent, image*. Ces registres sont :

- le registre du diagramme sagittal,
- l'ensemble de couples ordonnées,
- le tableau de valeurs,
- ainsi que, le registre symbolique sous la forme particulière d'une liste "$f(a) = b$".

Il apparaît, tout de suite, que ces registres ne peuvent représenter que partiellement une fonction définie sur un ensemble infini. Il seront donc plus spécifiques des fonctions définies sur des ensembles finis ou seront utilisés pour illustrer certaines propriétés de fonctions. Les registres de diagramme sagittal et de couples ordonnés n'apparaissent que du côté palestinien.

3.2 Le cadre algébrique

Le cadre algébrique ne disparaît pas avec l'étude de fonctions. Différentes activités mathématiques fonctionnelles utilisent ce cadre, principalement lorsque ces activités se centrent sur les propriétés algébriques de la fonction, ou pour la résolution d'équations et d'inéquations. Les registres en jeu sont:

- le registre symbolique-algébrique ($f(x) = 3x+2$ ou $f : x \quad 3x+2$),
- le registre ensembliste ($R = \{(x, y)$ t.q $y = x^2$ et $x \varepsilon N\}$).

3.3 Le cadre fonctionnel

Le cadre fonctionnel est pour nous le cadre intermédiaire entre le cadre algébrique et le cadre de l'analyse. Le cadre fonctionnel se distingue du cadre algébrique avec la distinction inconnue / variable quand la relation fonctionnelle s'interprète en terme de variation. Les registres des cadres numérique et algébrique restent valables ; le registre symbolique-algébrique notamment, que nous nommerons plus simplement ici, registre algébrique, est probablement le principal registre de représentation de fonctions. A ceux-ci s'ajoutent de nouveaux registres plus spécifiques du cadre fonctionnel, ce sont :

- le registre graphique,
- le registre du tableau de variation,
- le registre de programmation qui n'apparaît que du côté français,
- et aussi le registre symbolique intrinsèque où, par exemple, il est fait usage d'une lettre pour représenter une fonction.

3.4 Le cadre géométrique

Le cadre géométrique, se distingue des autres par une présence plus circonscrite. On le retrouve avec les situations fonctionnelles lorsque celles-ci sont d'origine géométrique. Il apparaît alors dans des situations de modélisation par une fonction de problèmes géométriques, en général de problèmes de mesure géométriques. Mais de façon équivalente, nous pourrions parler de cadre de la physique, de l'économie, de la vie de tous les jours, etc. (voir le paragraphe 2, les situations fonctionnelles en tant qu'objet d'enseignement).

Ce cadre apparaît également en liaison avec la représentation graphique de fonctions. Ce sont, d'une part, les transformations géométriques qui mettent en jeu deux fonctions et, d'autre part, les propriétés géométriques de fonctions comme la parité, la périodicité, ainsi que d'autres propriétés spécifiques au tracé de la courbe représentative de la fonction comme l'existence d'un centre ou d'un axe de symétrie, l'intersection entre deux courbes, la position relative de courbes, etc. qui amènent ce cadre dans l'étude de fonctions.

Les registres associés au cadre géométriques sont en conséquence :
- le registre des figures géométriques (pour les situations fonctionnelles),
- le registre graphique,
- le registre symbolique (pour les propriétés de parité, les transformations géométriques, etc.) où l'on se sert à la fois du graphique et de l'équation.

4. Liste des types tâches

Un type de tâches correspondant à une question que nous avons jugé emblématique, à ce stade de l'apprentissage, sur la notion de fonction. Chacune de ces tâches peut effectivement apparaître en tant que question unique d'un exercice ou, au contraire, être associée à d'autres tâches dans un exercice ou un problème. Nous distinguons par ailleurs les tâches plus spécifiques des fonctions sur les ensembles finis de celles plus spécifiques des fonctions sur les ensembles infinis. Quand nous parlons de fonctions définies sur un ensemble infini, nous entendons, le plus souvent, les fonctions à valeurs et variables réelles. En effet, les fonctions définies sur un ensemble infini mais discret sont, en général, impliquées dans le même type de tâches à résoudre selon les mêmes techniques que celles définies sur un ensemble fini. L'inventaire des techniques disponibles pour chaque tâche fait suite à cette liste, remarquons déjà que si les tâches ne dépendent pas, en général, des différents registres de représentation de fonctions, on ne saurait envisager, surtout au début de l'apprentissage de la fonction, leurs techniques de résolution sans distinction de ces registres.

Nous distinguons huit grands groupes de tâches concernant respectivement la manière dont la fonction est définie, les propriétés ensemblistes des fonctions, les opérations sur les fonctions, le signe et la comparaison de fonctions, les variations et les extremums, les liens avec le cadre géométrique via la représentation cartésienne, la résolution d'équations et d'inéquations et la modélisation. Il faut y ajouter des tâches purement algébriques ou graphiques qui ne mettent pas en jeu la dimension fonctionnelle.

4.1 Les tâches concernant la manière dont la fonction est définie

- Détermination de l'ensemble de départ, de l'ensemble d'arrivée, du domaine de définition, de l'ensemble image,
- Recherche d'un antécédent, d'une image, d'un élément particulier (d'un élément de l'ensemble d'arrivée n'appartenant pas à l'ensemble image),
- Tâche d'expression de la loi fonctionnelle : cette tâche concerne la loi fonctionnelle qu'il s'agit d'exprimer essentiellement dans le registre algébrique, ou dans une moindre mesure dans le registre verbal. Ceci suppose que la fonction est représentée, au départ, dans un registre autre. Cette tâche correspond à une conversion de registres.
- Tâches de représentation de fonction : Nous appelons tâche de représentation de fonction toutes les conversions de registre d'une fonction vers un registre autre que le registre algébrique ou verbal. Il peut être demandé de *représenter graphiquement* une fonction ou de *représenter (une fonction) par un diagramme sagittal, par la liste de ses couples* ou encore de *dresser un tableau de valeurs*, etc.
- Nous avons choisi de différencier les tâches de *représentation de fonction* et d'*expression fonctionnelle* car dans la tâche de *représentation de fonction*, la loi fonctionnelle n'est pas à établir, tout du moins pas de manière explicite; ce sont les autres composantes de la fonction, les ensembles de départ et d'arrivée ainsi que les différents couples en relation, qui doivent, cette fois être convertis d'un registre à un autre. C'est dans cet esprit que nous avons inclus, ici, la tâche de *programmation d'une fonction* car bien que la conversion de registres concerne la loi fonctionnelle, celle-ci est déjà établie dans le registre algébrique.

- Tâche de reconnaissance du type de fonction (affine, du second degré, inverse, etc.) : les fonctions concernées sont bien sûr les fonctions numériques à variable réelle. Les deux techniques algébrique et graphique ne seront pas présentées.
- Toutes ces tâches à l'exception de la dernière concernent aussi bien les fonctions définies sur un ensemble fini que celles définies sur un ensemble infini.

4.2 Les tâches concernant les propriétés ensemblistes de la fonction

Il s'agit des tâches de discrimination relation/fonction et de reconnaissance d'une application, une injection, une surjection, une bijection. Ces tâches sont aussi bien valables pour les ensembles finis que pour les ensembles infinis

4.3 Les tâches d'opérations sur les fonctions et de détermination de réciproque

Il s'agit, pour nous, des opérations algébriques de fonctions (addition, soustraction, multiplication, division, multiplication par un réel) ainsi que des tâches qui concernent la composition de fonctions. Les tâches de transformations géométriques sont également des tâches d'opérations de fonctions.Toutes ces tâches ont ceci en commun que les fonctions y sont considérées comme des objets bien établis à partir desquels de nouveaux objets peuvent être construits. Par ailleurs, elles interviennent selon leur statut outil au niveau technique, dans les mêmes types de tâches (voir tâche de *variation de fonction*). Cependant si les tâches concernant les opérations algébriques et la composition présentent de grandes similitudes au niveau des techniques de résolution, il n'en va pas de même pour les tâches mettant en jeu les transformations géométriques. Celles-ci font intervenir le cadre géométrique aussi avons-nous préféré les étudier avec les propriétés géométriques de fonctions.

Les tâches portant sur les opérations algébriques et la composition de fonctions sont aussi bien valables dans le cas de fonctions définies sur des ensembles finis ou infinis. Cependant si les opérations algébriques ne peuvent se concevoir que sur des fonctions numériques, l'opération de composition se réalise aussi sur des fonctions non numériques. Nous nous contenterons de présenter les techniques relatives à la composition, celles relatives aux opérations algébriques se trouvent en annexe.

Enfin, nous considérons, également dans ce paragraphe, la tâche de détermination de réciproque, dans le sens où établir une réciproque de fonction correspond également à une opération de construction de fonction, mais aussi parce que cette tâche fait intervenir, au niveau technologique, la notion de composition de fonctions.

4.4 Les tâches de signe des fonctions et comparaison de fonctions

Ces tâches ne concernent que les fonctions numériques à variable réelle. La tâche de signe de fonctions consiste à déterminer les valeurs de x annulant f(x), ainsi que les intervalles du domaine de définition où la fonction est positive et ceux où elle est négative. Nous verrons, dans les techniques relatives à ces tâches, que la tâche de comparaison de fonctions, où l'opération algébrique de différence intervient au niveau de la technique en tant que concept outil, se ramène à la tâche de signe de fonction.

4.5 Les tâches concernant les variations et la détermination des extremums

Les concepts de variations de fonction ou liés à la variation de fonction ne concernent que les fonctions numériques à variables réelles, continues au moins sur un intervalle de leur domaine de définition, aussi les registres appropriés de représentation de fonctions sont le graphique, le registre du tableau des variations et le registre algébrique. Le registre du tableau de valeurs est inapproprié pour ces tâches. Quant au registre verbal, si les situations fonctionnelles peuvent effectivement être concernées par ces tâches, elles le sont exceptionnellement avant modélisation, ce qui nous ramène au cas du registre algébrique.

4.6 Les tâches liées au cadre géométrique et au registre graphique cartésien

Ces tâches ne concernent que les fonctions numériques à variable réelle. Il faut noter leur absence dans les programmes palestiniens. Nous avons distingué plusieurs tâches faisant intervenir le cadre géométrique :

a) Les tâches concernant les propriétés de parité et de périodicité

   Nous distinguons deux types de tâches, celles où il s'agit de mettre en évidence les propriétés de parité et de périodicité et celles où ces propriétés sont utilisées selon leur statut outil. Nous les distinguerons par la suite par les dénominations respectives suivantes: *parité-1* et *périodicité-1*, *parité-2* et *périodicité-2*

b) Les tâches impliquées dans les techniques de changements de repère

   Ces techniques sont relatives à deux principaux types de tâches : *la tâche de mise en évidence d'un axe (ou d'un centre) de symétrie*, et la *tâche de réécriture de l'équation algébrique de la fonction* (où la fonction est ramenée à une fonction connue).

c) Les tâches de passage d'une fonction à une autre par transformations géométriques

   Les transformations géométriques concernées sont la translation, l'affinité, la symétrie, plus rarement l'homothétie. Nous distinguons deux tâches principales. La première consiste à identifier la transformation permettant le passage d'une fonction f, à sa transformée g, toutes deux exprimées dans le même registre; nous l'appellerons *tâche d'identification de la transformation (ou tâche de transfo-1)*. La deuxième consiste à établir g, transformée de f, dans le même registre que celui dans lequel f est donnée, la transformation étant explicitement précisée ; nous l'appellerons *tâche de recherche de l'image d'une fonction par transformation (ou tâche de transfo-2)*. Les techniques de résolution dépendront du registre de représentation de la fonction, f, de départ ainsi que du registre de représentation de la transformée g quand g est donnée.

Pour terminer avec les tâches relevant du cadre géométrique nous aimerions souligner deux points qui nous apparaissent importants. Il nous semble que les tâches de mise en évidence d'éléments de symétrie comme la parité ou la périodicité ont souvent pour objectif principal de rendre plus précise ou plus rapide la représentation graphique de la fonction concernée. Par contre les tâches impliquées par la technique de changement d'origine ou par les techniques de représentation de fonction par transformation permettent la représentation de nouvelles fonctions à partir de celle d'une fonction connue. C'est pour cette raison que nous avons distingué ces techniques de celles impliquées dans les *tâches de représentation de fonction* où une même fonction est convertie d'un registre à un autre (voir techniques relatives aux tâches de conversion de registres vers le registre graphique).

4.7 Tâches de résolution d'équations et d'inéquations

Il s'agit des résolutions d'équations et d'inéquations du cadre algébrique ou fonctionnel ainsi que de la tâche d'existence et de détermination d'une solution approchée à une équation (voir chap I, l'objet d'enseignement résolution d'équations et d'inéquations).

4.8 Tâches liées à la modélisation

Les tâches liées à la modélisation sont pour nous des tâches que l'on retrouve dans les situations fonctionnelles (voir paragraphe 1, les situations fonctionnelles). Le traitement de ces dernières exige, nous l'avions remarqué, des changements de cadres auxquels il faut ajouter également des conversions de registres (en particulier, entre les deux registres verbal et algébrique). Nous distinguerons la *tâche de modélisation*, qui permet la conversion vers le cadre fonctionnel et respectivement le registre algébrique, le registre graphique ou plus rarement le registre du tableau de valeurs, ainsi que les *tâches de retour à la situation initiale,* pour reprendre les termes de Pihoué, où les résultats obtenus dans le cadre fonctionnel doivent être réinterprétés dans le cadre d'origine et le registre verbal. La *tâche de modélisation* est d'après notre classification une tâche d'*expression fonctionnelle* dans le cas où le registre d'arrivée est le registre algébrique et une tâche de *représentation de fonction* dans les autres cas, les techniques correspondantes seront alors présentées compte tenu de cette classification. Les techniques relatives aux *tâches de retour à la situation initiale* sont très variées et dépendent de la situation ; il est donc impossible de les présenter de manière générale.

4.9 Tâches algébriques

Ce sont pour nous les tâches qui ne concernent pas véritablement la dimension de fonction mais plutôt l'expression algébrique associée, ou non, à une fonction et que l'on retrouve dans les exercices/problèmes sur les fonctions. Elles consistent en toutes les activités algébriques qui peuvent être effectuées sur ces expressions : factorisation, développement, réduction, ordonnement (d'une expression algébrique), mais aussi recherche de racines (de polynôme), recherche du degré (d'un polynôme) ou simple réécriture selon un modèle proposé d'une expression algébrique.

4.10 Tâches purement graphiques

De façon similaire, nous nommons ainsi toutes les tâches graphiques qui ne concernent pas a priori la dimension fonctionnelle : tracé de droites, de courbes, etc.

5. Inventaire des techniques et technologies

Pour chacune des tâches de notre précédente liste, nous présentons, ici, les différentes techniques pouvant se trouver dans l'un ou l'autre système d'enseignement ainsi que ce qui permet de les justifier. Dans la pratique nous ne retrouverons qu'une partie d'entre elles dans chacun des deux systèmes d'enseignement. Cet inventaire nous montrera que les registres constituent le support des techniques et se confondent bien souvent avec elles notamment lorsqu'une seule technique existe par registre. En fait, seuls les registres graphique et algébrique sont susceptibles et pour certaines tâches seulement, de présenter plusieurs techniques à la fois. Nous ne présenterons pas systématiquement les différentes techniques relevant du registre verbal. Celles-ci sont relatives aux quatre premiers groupes de tâches et concernent en particulier, les fonctions non algébriques et les situations fonctionnelles. Notons que de façon générale, elles se basent, toutes, sur une bonne compréhension du texte, en liaison avec la compréhension des concepts mathématiques en jeu (concepts d'image / antécédent, de fonction injective, surjective, de composition, de réciproque, etc.) selon la tâche à résoudre, mais aussi sur des considérations générales d'ordre pratique ou de bon sens qui ne ressortent pas directement du domaine mathématique. Nous ne reviendrons sur les techniques relevant du registre verbal que pour souligner une tâche particulièrement emblématique.

5.1 Techniques relatives aux tâches concernant la manière dont la fonction est définie

a) Déterminer le domaine de définition (resp. le but)

Les ensembles de départ et d'arrivée sont toujours mentionnés sauf pour les situations fonctionnelles mais alors cela se confond avec le domaine de définition.

Les différentes techniques en jeu dépendent certes du registre dans lequel la fonction est représentée (du diagramme sagittal, du tableau de valeurs, du tableau de variation, du graphique, etc.) ; néanmoins et à l'exception du registre algébrique, elles se ramènent à des techniques de lecture. Les lectures du domaine de définition sont plus ou moins difficiles à réaliser selon le registre et selon que le domaine de définition est fini ou infini. Nous ne présenterons que les techniques graphique et algébrique pour le cas d'un ensemble infini.

- **Si la fonction est exprimée sous forme graphique,** il faut distinguer, tout d'abord, l'axe des abscisses de celui des ordonnées, l'axe des abscisses faisant en général référence à l'ensemble de départ, et celui des ordonnées à l'ensemble d'arrivée. Dans un deuxième temps, il faut considérer la projection de la fonction sur l'axe des x pour obtenir le domaine de définition ou sur l'axe des y pour obtenir l'ensemble image ou but. La dernière étape consiste à exprimer l'ensemble recherché dans le registre ensembliste ou verbal.
- **Si la fonction est exprimée sous forme algébrique,** la fonction est donc donnée sous la forme "f(x) = (expression en x)". Déterminer le domaine de définition de la fonction revient à étudier l'expression algébrique de f(x) et à déterminer "quand, il est possible de faire le calcul", soit "pour quels réels x, f(x) existe". Ici, le calcul, qui correspond le plus souvent à une résolution d'équation (ou d'inéquation), constitue le traitement principal propre à ce registre. La dernière étape, une fois déterminées les valeurs que peut prendre x, consiste à exprimer l'ensemble recherché en langage ensembliste ou verbal. C'est un tâche assez peu demandée au lycée pour l'ensemble image ou but parce que les élèves ne disposent pas toujours des techniques nécessaires dans le registre algébrique : il faut pouvoir inverser la fonction.

Quant à la détermination du but d'une fonction définie sur un ensemble fini et dans le cas du registre algébrique, il nous faut préciser, que la technique la plus adaptée est numérique. Elle consiste à substituer à "x" chacune des valeurs du domaine de définition pour calculer la valeur correspondante de f(x).

La technologie justifiant ces techniques est bien sûr, selon le cas, les définitions de domaine de définition, de but, d'ensemble de départ et d'ensemble d'arrivée.

b) Déterminer l'image (ou l'antécédent) d'un élément

Pour ces deux tâches également les techniques de résolution, à l'exception de la technique algébrique qui est la seule que nous présentons, sont des techniques de lecture. Précisons que cette tâche n'est pas adaptée au registre du tableau de variation mais peut être cependant demandée pour les valeurs qui y apparaissent.

- **Si la fonction est donnée sous forme algébrique,** la technique de détermination de l'image d'un élément donné est numérique puisqu'elle consiste à substituer à x la valeur de l'élément en question pour calculer la valeur correspondante de f(x). Par contre, la détermination d'un antécédent demande au niveau technique la résolution d'une équation. Ainsi, la résolution d'équation est impliquée en tant qu'outil algébrique dans la tâche de détermination d'un antécédent qui relève, elle, du cadre fonctionnel et, en ce sens, cette tâche diffère de la tâche du cadre algébrique de résolution d'équation.
  La technologie justifiant ces techniques est la définition d'image (resp. d'antécédent) d'un élément de l'ensemble de départ (resp. d'arrivée).

c) **Expression de la loi fonctionnelle**
Dans le cas des ensembles finis, les techniques sont sensiblement identiques quel que soit le registre de représentation de la fonction. Nous les décrivons rapidement dans ce qui suit :

La technique est de considérer plusieurs éléments ainsi que leurs images respectives, et d'essayer d'établir la loi qui permet de passer d'un élément à son image. Si cette loi est de type algorithmique (généralement, un calcul), elle sera exprimée sous forme algébrique. Si elle ne l'est pas, sa détermination relève de critères non mathématiques (par exemple de bon sens); elle est alors exprimée sous forme verbale. Dans ces deux cas, il convient, en dernière étape de vérifier la loi fonctionnelle pour tous les couples d'éléments en relation, sauf si certaines propriétés de l'ensemble de définition et de la loi permettent de se dispenser de certaines vérifications.

Dans le cas des ensembles infinis, nous distinguons trois techniques principale, l'une valable si la fonction est représentée dans le registre graphique, les deux autres, si la fonction est donnée dans le registre verbal. Précisons que cette tâche n'est pas pertinente si la fonction est représentée par un tableau de variation :

- **Si la fonction est donnée sous forme graphique,** la technique est de déterminer en première étape la classe d'appartenance de la fonction afin de lui faire correspondre une équation sous forme générale (avec paramètres). Cette technique se base sur la connaissance de l'allure de la courbe des fonctions selon leur classe d'appartenance (exemples: f(x) = ax+b pour une fonction affine, f(x) = ax^2 pour une fonction du second degré avec l'axe des x comme axe de symétrie, $f(x) = a\,(x+b)^2$ pour une fonction du second degré dont le sommet de la parabole est le point (-b, 0), $f(x) = 1/\,(x+b)$ pour une fonction rationnelle dont l'hyperbole admet comme assymptotes l'axe des x et la droite d'équation "x = -b"). L'expression algébrique de la fonction est ainsi établie à l'aide de paramètres qu'il reste ensuite à déterminer par lecture graphique.

Notons que dans le registre graphique cette tâche se limite à des cas très particuliers de fonctions usuelles dont la représentation est bien connue : fonctions affines, fonction du second degré, certaines fonctions de degré trois, rationnelles, etc. et dont l'énoncé précise la nature (parabole, hyperbole).

- **Si la fonction est donnée dans le registre verbal, nous distinguons deux cas** :
  - ✧ **Celui des situations fonctionnelles :** Il s'agit précisément de la tâche de modélisation, tâche relevant d'un type de problèmes emblématique de l'enseignement des fonctions. Cette tâche qui nécessite, nous l'avons souligné, non seulement une conversion de registres mais aussi un changement de cadres. Il est difficile d'exposer une technique qui puisse recouvrir tous les cadres d'origine et les registres de départ. De façon générale cependant, elle consiste, à partir des données du texte à déterminer, en première étape, la variable indépendante et le(s) variable(s) dépendante(s), puis l'équation liant les variables entre elles. Elle se base sur l'interprétation correcte du texte, sur des considérations d'ordre pratique et de bon sens qui, encore une fois quand il s'agit de situations fonctionnelles, ne relèvent pas toujours du domaine des mathématiques.

  - ✧ **Celui des fonctions décrites par certaines de leurs propriétés :**
    Les techniques varient fortement selon les propriétés mentionnées. Ainsi, les deux exercices suivants :
    1. "Déterminer la fonction $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, dont la représentation graphique passe par les points A(… ; …), B(…, …), C(…, …), D(…, …)", et
    2. "Déterminer une fonction polynôme f du troisième degré qui admet 5/6 pour maximum en 1, un minimum en 2 et qui s'annule en 0".

Si la technique de résolution du premier exercice, à travers les propriétés d'antécédent, image, se ramène à la résolution d'un système d'équations, la technique de résolution du second exercice impose, entres autres, la connaissance des relations entre variations et dérivée de la fonction pour caractériser ses extremums. De façon générale, il s'agira de déterminer l'équation fonctionnelle, ou ses paramètres si elle est donnée au départ, par une interprétation correcte des propriétés de la fonction considérée et leur conversion dans le registre algébrique.

Soulignons enfin, qu'il arrive fréquemment que le registre verbal utilisé pour définir une fonction, soit associé à d'autres registres.

La technologie relative aux différentes techniques est bien sûr la définition de la loi fonctionnelle, mais aussi les définitions d'image et d'antécédent et plus largement la définition de fonction. Il faut également, lui ajouter, dans le cas du registre graphique les propriétés des fonctions numériques selon leur classe d'appartenance (allure de leur courbe, extremum, variations, etc.).

d) Représentation de fonctions

Dans le cas des ensembles finis, nous précisons simplement que les techniques relatives au cas des ensembles finis sont toutes similaires quels que soient les registres de départ et d'arrivée dans la mesure où elles reposent sur la lecture des différentes composantes de la fonction (lecture des domaine de définition et but, lecture des couples antécédent/ image) qui permettent la réalisation de la conversion. Une petite différence au niveau technique apparaît seulement si le registre de départ est algébrique car les images des éléments du domaine sont éventuellement à déterminer par le calcul. Ces techniques sont néanmoins détaillées en annexe (voir annexe).

Dans le cas des ensembles infinis, nous nous limiterons aux tâches de conversion les plus importantes et uniquement quand les techniques en jeu diffèrent du cas des ensembles finis; nous ne présenterons pas, par exemple, les tâches de conversion du registre graphique ou algébrique vers le tableau de valeurs.

1. **Représentation du tableau de variation d'une fonction à partir de son graphique**

   Le tableau de variation, se limite dans ce type de conversion à un tableau en deux lignes l'une pour les valeurs de x et l'autre pour les variations de f(x). Il faut repérer sur le graphique certaines valeurs critiques de x, si elles existent, qui sont les valeurs aux bornes du domaine de définition, les valeurs pour lesquelles la fonction admet un extremum et les valeurs n'appartenant pas au domaine de définition. Ces valeurs sont ensuite reportées par ordre croissant sur la ligne correspondante du tableau de variation. Deux valeurs consécutives de x correspondent à un intervalle où la fonction est monotone. Sur la deuxième ligne du tableau, les variations de f doivent être représentées par une flèche ascendante (resp. descendante) dans la partie correspondant à un intervalle où la fonction est croissante (décroissante). En dernière étape, il faut indiquer aux extrémités des flèches, quand cela est possible, les valeurs de f(x) correspondant aux valeurs de x présentes dans la première ligne du tableau ou la limite de ces valeurs.

2. **Représentation graphique d'une fonction à partir de son du tableau de variation**

Nous présentons la technique en annexe. Remarquons simplement que le tableau de variation est un registre qui ne définit pas de façon unique une fonction. Plusieurs fonctions peuvent, en effet, se partager le même tableau de variation aussi représenter graphiquement une fonction donnée par son tableau de variation revient, seulement, à déterminer une des fonctions possibles.

3. **Représentation d'une fonction du registre algébrique vers les registres graphique, du tableau de variation, et de programmation**

   - **Si le registre d'arrivée est le tableau de variations (il est alors généralement demandé de "dresser le tableau des variations de la fonction"),** la résolution de cette tâche repose, en première sous-tâche, sur l'étude des variations de la fonction pour laquelle plusieurs techniques sont disponibles (voir ci-après la tâche "variations de fonction"). La deuxième sous-tâche consiste en la réalisation du tableau de variations proprement dit. Ce tableau "résume" en fait l'étude des variations de la fonction et celle de la détermination de ses extremums. Il consiste pour sa forme de base en un tableau de deux lignes, la première pour les valeurs de x et la seconde pour les variations de f. Il comporte le plus souvent plus de deux lignes, en général trois. La première et la dernière sont toujours respectivement la ligne des valeurs de x, et celle des variations de f. Les lignes intermédiaires correspondent aux dérivées de la fonction : deuxième ligne pour le signe de la dérivée première, troisième ligne pour le signe de la dérivée seconde, etc. Il est néanmoins rare que le tableau fasse mention des dérivées d'ordre supérieur ou égal à deux. La première étape de réalisation du tableau est de noter dans la première ligne, les valeurs de x significatives pour la fonction, qui résultent de l'étude de ses variations, en les ordonnant par ordre croissant. Ces valeurs sont les bornes du domaine de définition de la fonction, celles où la fonction n'est pas définie, celles correspondant à des asymptotes et celles où la fonction possède des extremums. Les lignes des dérivées sont remplies en indiquant le signe de la dérivée. Enfin, la dernière ligne doit être remplie pour traduire les variations de la fonction dans le registre du tableau de variation. Ainsi, dans la ligne des variations de f, la technique est de représenter une flèche ascendante dans l'intervalle de f(x) correspondant à un intervalle où la fonction est strictement croissante, et descendante dans l'intervalle de f(x) correspondant à un intervalle où la fonction est strictement décroissante. La représentation de la fonction dans ce registre se termine éventuellement par le calcul des extremums de la fonctions, s'ils ne sont pas déjà connus, qui seront ensuite placés aux extrémités correspondantes des flèches.

- **Si le registre d'arrivée est le registre graphique**

1) *Représentation "point par point" :* Cette technique consiste à déterminer le maximum de points appartenant à la fonction, ce qu'on résume dans un tableau de valeurs. Pour déterminer un point, une valeur de x est choisie et f(x) est ensuite calculé. Chaque point est représenté dans le repère, généralement orthonormé, préalablement choisi. En dernière étape, ils sont reliés entre eux pour obtenir la courbe représentative de la fonction. Le calcul de f(x) peut se faire soit manuellement (avec ou sans l'aide d'une calculatrice ou d'une table de valeurs), soit après programmation de la fonction, ce qui correspond à une première conversion de registre. Il faut noter cependant que la connaissance de la classe à laquelle appartient la fonction aide au tracé de la fonction.

2) *Représentation par l'étude des variations :* La première sous-tâche est également la tâche d'étude des variations de la fonction (voir la tâche précédente de représentation de fonction du registre algébrique vers le registre de tableau de variations). Cette étude achevée permet de connaître les intervalles sur lesquels la fonction est monotone, ainsi que les valeurs significatives de x, et les valeurs, éventuellement, correspondantes de f(x) (voir la tâche précédente de représentation de fonction du registre algébrique vers le registre de tableau de variations). Seulement alors l'étape du tracé, soit la conversion de registre, peut-être abordée. Les informations obtenues par l'étude des variations sont alors traduites dans un repère, généralement orthonormé, sous la forme de points, d'asymptotes, etc. D'autres points peuvent à ce stade être déterminés par le calcul, ils permettent d'obtenir un tracé encore plus précis. Ces points sont théoriquement librement choisis mais ils correspondent souvent à des points particuliers comme par exemple les points d'intersection avec les axes. En fin d'étape la courbe de la fonction est tracée en tenant compte des intervalles de monotonie. Remarquons qu'entre l'étude des variations d'une fonction et sa représentation graphique existe généralement une étape intermédiaire : la réalisation du tableau de variation. Ainsi la conversion de registres "expression algébrique → graphe" se décompose, en général, en deux conversions de registres "expression algébrique → tableau des variations" et "tableau des variations" → "graphe " avec de plus parfois une représentation auxiliaire sous forme de "variations" → "tableau de valeurs".

Les techniques que nous venons de présenter ci-dessus et qui permettent d'obtenir la représentation graphique d'une fonction, ne sont pas les seules valables. Il en existe d'autres, et nous pensons en particulier aux techniques de changement de repère ou de représentation graphique par transformations géométriques. Cependant, elles ne se résument pas, et nous le verrons, à des conversions mettant uniquement en jeu deux registres (voir les techniques relatives aux tâches du cadre géométrique).

Il nous faut souligner, enfin, pour terminer avec la tâche de représentation de fonctions ayant pour départ le registre algébrique, qu'il est possible d'obtenir le tracé de la courbe d'une fonction ou de dresser son tableau de variation autrement que par l'une des techniques ci-dessous exposées : l'élève a, dans certains cas, encore la possibilité de

- les réaliser de *mémoire*, et ceci est parfaitement légitime, dans le système français, dans le cas des fonctions dites de référence (fonction valeur absolue, carré, cube, inverse, etc.), une fois ces dernières institutionnalisées.
- ou utiliser certaines connaissances liées à leurs propriétés d'après leur classe d'appartenance : en particulier la fonction affine que l'on représente par une droite à partir de deux points ou du coefficient directeur et de l'ordonnée à l'origine et les fonctions du second degré que l'on représente par des paraboles après en avoir repéré le sommet et un point.

Ces méthodes ne sont pas véritablement des techniques, ce sont plutôt des connaissances disponibles en relation avec un savoir légitime que l'élève *sait pouvoir utiliser*. Nous utiliserons néanmoins le terme de technique (technique de mémoire, technique des fonctions affines, technique des fonctions du second degré) pour y référer dans l'analyse des tâches et techniques.

- **Si le registre d'arrivée est le registre de programmation,** il s'agit par une technique de programmation, de convertir la loi fonctionnelle du registre algébrique vers le registre de programmation. Cette tâche est inexistante dans l'enseignement palestinien, nous verrons dans quelle mesure elle est effectivement encouragée dans l'enseignement français. Notons que cette tâche est souvent impliquée en tant que conversion intermédiaire du registre algébrique vers le registre du tableau de valeurs. C'est l'une des rares tâches où le registre de programmation soit sollicité. Il peut l'être aussi quand la fonction est utilisée comme outil, par exemple pour l'étude d'une suite récurrente. Cependant, la plupart des calculatrices dont disposent maintenant les élèves permettent d'éviter la programmation à l'aide des outils "tables" ou "graphes".

4. **Représentation d'une fonction à partir du registre verbal**

Nous distinguons, comme pour la tâche d'expression fonctionnelle, deux cas :

Celui des situations fonctionnelles : la tâche de représentation de fonction correspond également à une tâche de modélisation de la fonction. La conversion a lieu dans le sens registre verbal du cadre d'origine vers le tableau de valeurs ou la représentation graphique du cadre fonctionnel. L'obtention d'un tableau de valeurs pour modéliser la fonction s'obtient par une technique numérique. L'obtention de la représentation graphique, ne repose certainement pas entièrement sur des connaissances relevant du domaine mathématique ; mais suppose cependant aussi une partie numérique. Le calcul de quelques valeurs à partir du registre verbal permet à l'élève de se familiariser avec la situation fonctionnelle, de mieux la comprendre. Soulignons que cette phase numérique, indispensable si la situation fonctionnelle n'est pas à modéliser, n'est pas toujours explicitement demandée à l'élève comme nous le montre l'exemple suivant :

"ABC est un triangle tel que AC =5 cm, BC =7 cm et AB = 9 cm. D est un point du segment [AB] tel que AD= 2,5 cm.
Un point M décrit le trajet ACB. On note x la longueur du trajet effectué par M et L(x) la longueur MD (une figure est donnée à l'appui) :
1°) Donner à main levée l'allure de la courbe représentant L.
(...) " (T.P, p 17, Dimathème 2nde)

Celui des fonctions décrites par certaines de leurs propriétés
Ce type d'exercice se situe dans le cadre fonctionnel. La conversion est réalisée dans le sens registre verbal/symbolique vers le registre du tableau de variation/ représentation graphique/ou tableau de valeurs. La tâche demandée est, par exemple, de dresser un tableau de variations ou un tableau de valeurs, ou de représenter un tracé possible pour la fonction décrite. Considérons, par exemple l'exercice suivant :

"Tracer une courbe susceptible de représenter la fonction f sachant que : f est définie sur l'intervalle]-15; 5 [, f admet un minimum en -1 et un maximum en 2, les images de -3 et de 0 sont respectivement 2 et 1, et 0 a deux antécédents : -2 et 1" .

La technique en jeu est très clairement une technique basée sur la compréhension des propriétés de la fonction et de leurs représentations dans les différents registres. Si la technique de résolution est souvent à la portée des élèves quand le registre d'arrivée est le tableau de valeurs, elle est loin d'être évidente si le registre d'arrivée est le graphique : *Elle impose un va-et-vient entre les deux registres verbal/symbolique et graphique (dans un sens pour établir la fonction, dans l'autre pour vérifier que celle-ci respecte bien les propriétés recherchées). L'élève doit comprendre que plusieurs solutions donc plusieurs fonctions sont possibles. De plus il doit considérer la fonction de façon globale donc plutôt comme un objet. Bloch trouve justement un grand intérêt didactique à ce type de tâche en ce sens.* Ce type de tâche et ses techniques associées, inexistante du côté palestinien, ont une vie bien éphémère du côté français. Elles existeront éventuellement lors de l'installation de la notion de fonction et de ses différentes propriétés mais très vite, les tâches d'expression fonctionnelle avec registre verbal pour registre de départ, parce que leur résolution nécessite un traitement algébrique, leurs seront préférées. Or, ces tâches de représentation de fonctions par rapport aux tâches d'expression fonctionnelle ne nous semblent pas dénuées d'intérêt : elles permettent mieux d'évaluer la compréhension qu'ont les élèves des différentes propriétés de la fonction alors qu'un échec dans le traitement algébrique ne signifie pas forcémment une incompréhension de ses propriétés.

Nous voyons que la technologie qui justifie ces techniques est souvent bien complexe, notamment dans le cas de fonctions définies sur une ensemble infini, puisque non seulement elle peut se rapporter aux définitions de fonction, de domaine de définition, de but, mais elle peut également se rapporter à la notion de variation et faire intervenir certaines propriétés de fonctions relatives à leur classe d'appartenance et à leurs propriétés générales (allure de leur courbe, nombre d'extremums, variations, etc.).

5.2 Techniques relatives aux tâches concernant les propriétés ensemblistes de la fonction

Dans le cas des ensembles finis, les techniques relatives aux différentes tâches sont essentiellement des techniques de lecture : chaque registre de représentation présente une technique de lecture qui lui est adaptée. Le registre algébrique est le seul parmi ces registres pour lequel deux techniques sont possibles qui ne se ramènent pas, ou pas uniquement, à de la lecture. La première présente un traitement numérique dans la mesure où l'image de chaque élément du domaine de définition peut être calculée, la deuxième présente un traitement algébrique, et est également valable dans le cas des ensembles infinis. La majorité de ces techniques sont données en annexe.

Dans le cas des ensembles infinis, le registre de tableau de valeurs, ne décrivant pas totalement la fonction, n'est pas appropriés pour ces tâches et le registre de tableau de variation n'est valable que pour la tâche de discrimination fonction/bijection.

a) Discrimination relation / fonction

a.1 Cas des ensembles finis

Voir les différentes techniques en annexe du chapitre.

a.2 Cas des ensembles infinis

- **Si le registre est graphique,** la technique est identique au cas des ensembles finis mais adaptée à une courbe continue. Elle consiste à considérer la courbe de la relation et à s'assurer que cette courbe ne contient pas deux points différents de même abscisse. Si, au contraire, elle en contient au moins deux, la courbe n'est pas celle d'une fonction. La *variante palestinienne* de cette technique, le *test de la droite verticale*, consiste à tracer des droites verticales dans le même repère que celui de la représentation graphique de la relation et à s'assurer que chacune de ces droites a au plus un point d'intersection avec la courbe ou, qu'au contraire on peut en repérer une qui possède deux points d'intersection avec la courbe.

- **Si le registre est algébrique,** la technique algébrique dépend de l'équation fonctionnelle qui peut être donnée sous la forme $y = f(x)$ ou sous la forme $f(x,y) = 0$. Si elle est sous la forme $y = f(x)$, une même valeur de x ne peut donner deux valeurs de différentes de y. Dans l'éventualité où l'équation fonctionnelle est exprimée sous la forme $f(x,y) = 0$, le problème est de voir s'il est possible de "tirer y en fonction de x" pour la mettre sous la forme $y = g(x)$ ou de montrer que si $f(x, y_1) = f(x, y_2)$ alors $y_1 = y_2$. Ainsi, partant du premier membre de l'implication logique, il faut aboutir par transformations algébriques successives au second membre, y_1 et y_2 représentant des variables quelconques. Pour monter, au contraire, que la relation n'est pas une fonction, la technique numérique consiste à exhiber deux éléments différents $y_1$et y_2 tels que $f(x, y_1) = f(x, y_2)$.

La technologie relative à ces techniques est la définition de la fonction : "une relation est une fonction si tout élément de l'ensemble de départ a au plus une image dans l'ensemble d'arrivée".

b) Discrimination (fonction / application)

Cette tâche n'est pas pertinente dans le cas des ensembles finis car dans la majorité des registres de représentation l'ensemble de départ et le domaine de définition sont identiques. Dans le cas des ensembles infinis, pour montrer qu'une fonction est une application, il faut montrer qu'ensemble de départ et domaine de définition sont égaux. La recherche du domaine de définition (voir ci-dessus, la tâche correspondante) entre alors dans la technique de résolution de cette tâche.

c) Discrimination (application / application injective)

c.1 Cas des ensembles finis

Les techniques, en partie numérique pour le registre algébrique, et de lecture pour les autres registres présentent une grande similitude avec les techniques correspondantes relatives à la *tâche de discrimination relation / fonction* mais pour cette nouvelle tâche de discrimination, ce sont les éléments de l'ensemble d'arrivée qui sont à observer. Toutes les techniques du cas des ensembles finis sont proposées en annexe.

c.2 Cas des ensembles infinis

- **Si le registre est graphique,** la technique est identique au cas des ensembles finis mais adaptée à une courbe continue. Elle consiste à considérer la courbe de la fonction et à vérifier qu'elle ne possède pas deux points ayant une même ordonnée pour montrer qu'elle est injective ou, à exhiber deux tels points dans le cas contraire. La variante de cette technique, que l'on retrouve également dans le cas palestinien, nommée *test de la droite horizontale*, consiste à tracer des droites horizontales, dans le même repère que celui du graphe de la fonction. Les mêmes remarques que pour le *test de la droite verticale* sont à faire ici.

- **Si le registre est algébrique**, la technique consiste à établir l'implication logique suivante ou sa contraposée, soit : "quels que soient x_1 et x_2, éléments du domaine de définition de la fonction, si $x_1 \pm x_2$, alors $f(x_1) \pm f(x_2)$". Ainsi, partant du premier membre de l'implication logique, il faut aboutir par transformations algébriques successives au second membre, x_1 et x_2 représentant des variables quelconques. Le plus souvent, on partira de $f(x_1) = f(x_2)$ pour déduire $x_1 = x_2$. Pour monter, au contraire, que l'application n'est pas injective, la technique numérique consiste à exhiber deux éléments du domaine de définition qui ont la même image.

  La technologie relative à cette tâche est la définition d'une application injective "application telle que tout élément de l'ensemble d'arrivée a au plus un antécédent".

d) Discrimination (application / surjection)

d.1 Cas des ensembles finis

Cette tâche n'est pas pertinente pour les registres du tableau de valeurs, du graphique et de l'ensemble de couples ordonnés où l'ensemble d'arrivée et le but sont généralement identiques.

- **Si la fonction est représentée sous forme de diagramme sagittal**
  La technique est de vérifier qu'il n'y a pas d'élément de l'ensemble d'arrivée auquel n'aboutit aucune flèche ou pour montrer, au contraire, que l'application n'est pas surjective, il faut exhiber un tel élément.
- **Si la fonction est donnée sous forme algébrique**
  La première partie de cette technique est également numérique comme pour les précédentes tâches de discrimination. Une fois, l'ensemble image obtenu, il faut dans un deuxième temps, le comparer à l'ensemble d'arrivée. L'application est surjective en cas d'égalité entre les deux ensembles.

d.2 cas des ensembles infinis

- **Si le registre est graphique,** le but de la fonction est la projection du graphe sur l'axe des ordonnées. Si l'ensemble d'arrivée est donné, la technique consiste alors à déterminer si l'ensemble d'arrivée de la fonction est le même que son but.
- **Si le registre est algébrique,** la technique consiste à effectuer un traitement algébrique montrant que l'on peut toujours écrire y sous la forme de l'expression f(x), c'est-à-dire que pour tout b appartenant à l'ensemble d'arrivée, l'équation f(x) = b a toujours au moins une solution.

La technologie qui justifie ces techniques est la définition d'une surjection : "Une application est surjective si tout élément de l'ensemble de d'arrivée a au moins un antécédent par l'application", ou son corollaire :"Une application est surjective si l'ensemble d'arrivée de l'application est égal à son but".

e) Discrimination (fonction/ bijection)

Il est possible de ramener cette tâche aux deux sous-tâches de discrimination application/application injective et application/application surjective d'après la technologie que constitue la définition de la bijection comme fonction telle que "chaque élément de l'ensemble de départ a une image et une seule dans l'ensemble d'arrivée, et chaque élément de l'ensemble de d'arrivée a un antécédent et un seul dans l'ensemble de départ" ou, l'énoncé équivalent "une application est une bijection si elle est à la fois injective et bijective". Les techniques correspondantes ont alors déjà été présentées.

La définition de la bijection n'est pas l'unique *élément technologique* constituant la technologie relative à cette tâche, le théorème qui relie la monotonie d'une fonction et la propriété de bijection constitue un deuxième élément technologique valable qui justifie une autre technique. Celle-ci est uniquement valable pour les fonctions numériques définies sur un ensemble infini. La *tâche de discrimination (fonction/ bijection)* se subdivise, d'après cette technique en deux sous-tâches principales, la première est la *tâche de variation* afin d'établir les variations de la fonction, la seconde est la sous-tâche qui consiste à conclure sur la propriété de bijection selon que la fonction est ou non monotone. C'est alors l'élément technologique relatif à la *sous-tâche de variation,* plus que la définition de bijection qui marque cette tâche au niveau de sa technique de résolution (voir les techniques correspondantes dans *tâche de variation*).

5.3 Techniques relatives aux tâches d'opérations sur les fonctions et de recherche de réciproque

5.3.1 Techniques relatives aux tâches d'opérations algébriques sur les fonctions

Les techniques relatives à ces tâches d'opérations algébriques présentent de grandes similitudes avec celles relatives à la tâche de composition de fonction : A chaque technique d'opérations algébriques correspond une technique de composition de fonction sensiblement équivalente quoique plus complexe. Aussi avons nous choisi, pour des raisons d'économie de les proposer en annexe.

5.3.2 Techniques relatives à la tâche de composition de deux fonctions

Nous nous limiterons à la composition de deux fonctions, la technique étant identique pour plus de deux fonctions. Les deux fonctions, g et f, à composer ainsi que la fonction composée résultante, gof, sont représentées dans le même registre. L'unique exception, sur laquelle nous reviendrons, est celle du registre algébrique dans le cas des ensembles finis.

a) Cas des ensembles finis

Les techniques relatives aux cas des ensembles finis sont toutes composées de lecture et d'un calcul numérique, la lecture étant adaptée aux différents registres. Ces différentes techniques sont proposées en annexe, nous ne donnons ici que la technique relative au registre algébrique et spécifique du cas des ensembles finis, car elle présente une légère nuance relativement aux autres:

- **Si g et f sont représentées dans le registre algébrique**
  La technique numérique consiste, pour chaque élément du domaine de définition de f, à calculer son image par f, à vérifier que cette image, f(x), est élément du domaine de g, puis, si c'est le cas, à calculer l'image par g de f(x). Mais la fonction gof obtenue est exprimée dans le registre symbolique : la liste constituée de chaque élément et de son image par la fonction composée.

b) Cas des ensembles infinis

- **Si le registre est algébrique** : Cette technique est également valable pour le cas des ensembles finis. La tâche de composition de deux fonctions f et g est d'établir l'expression algébrique de la fonction composée, fog, pour tout x appartenant à Df tel que f(x) appartienne à Dg. La technique se décompose en plusieurs étapes. La première est d'écrire que "(fog) (x) = f(g(x))", la seconde étape est de remplacer le symbole g(x) dans l'expression "f(g(x))" par son expression algébrique. La troisième est d'effectuer les calculs algébriques. Les deux premières étapes consistent ainsi à appliquer la définition de la composition de fonctions dans le registre algébrique pour les fonctions concernées. La dernière étape relève du calcul littéral qui va permettre la production de la fonction composée sous une forme réduite et ordonnée.

- **Si le registre est graphique ou du tableau de variation**
  a) *Technique "point par point" :* cette technique est essentiellement une technique de lecture que nous donnons en annexe. Il n'y a pas de technique équivalente dans le cas du registre du tableau de variation.
  b) *Technique utilisant les variations de f et de g :* Elle consiste, en première étape, à déterminer les variations de f et de g à partir de leur graphique (voir technique de détermination des variations d'une fonction dans le registre graphique), à déterminer les intervalles où les deux fonctions sont monotones, à déduire, en deuxième étape, les variations de la composée par application du théorème correspondant, et enfin, à tracer la courbe de gof à partir de la connaissance de ses variations (voir technique correspondante). Dans le cas du tableau de variations la technique est similaire mais adaptée bien sûr au nouveau registre. Nous ne la détaillerons pas davantage.

Cette dernière technique, bien qu'intéressante, est d'une utilisation limitée car le théorème donnant les variations d'une fonction composée ne s'applique qu'à des fonctions monotones sur les mêmes intervalles.

Les définitions de composition de fonction "la composée de la fonction f par la fonction g est la fonction, notée gof, définie sur l'ensemble des x appartenant à Df tels que f(x) appartienne à Dg, par (gof) (x) = g(f(x))", et d'image d'un élément entrent toujours dans l'environnement technologique relatif aux différentes techniques. Pour certaines d'entre elles, il faut leur ajouter les théorèmes relatifs aux variations d'une fonctions et ceux donnant les variations d'une fonction composée à partir de celles des fonctions la composant.

5.3.3 Détermination de la réciproque

Nous supposons bijective la fonction pour laquelle la réciproque est recherchée. La fonction et sa réciproque sont, en général, exprimées dans le même registre de représentation. Les techniques relatives au registre verbal sont identiques dans le cas d'un ensemble fini et dans celui d'un ensemble infini.

a) cas des ensembles finis

Les techniques sont similaires quel que soit le registre de représentation de la fonction et consistent essentiellement à inverser l'image et l'antécédent. Ce sont donc toujours des techniques de lecture à laquelle il faut ajouter, dans le cas du registre algébrique, une activité de calcul. Elles sont présentes en annexe.

b) **cas des ensembles infinis**

- **Si le registre est algébrique**

  a) *Première technique :* Pour établir la réciproque de la fonction f donnée par l'expression algébrique "y = f(x)", il faut d'abord inverser les symboles x et y. L'étape suivante est une résolution d'équation qui permet d'obtenir y en fonction de x car f est bijective. Pour finir y est éventuellement remplacé par le symbole $f^{-1}(x)$. On peut aussi procéder dans l'ordre inverse, soit déterminer d'abord l'équation de y en fonction de x, puis inverser les lettres ensuite.

  b) *Deuxième technique :* Il s'agit d'une variante d ela précédente. Elle utilise l'égalité "$(f\ (f^{-1})(x)) = x$". Il faut remplacer $f^{-1}(x)$ par une lettre quelconque de l'alphabet m, par exemple, puis substituer x par m dans l'expression de f(x). L'étape suivante est une résolution d'équation qui donne m en fonction de x, m que l'on remplace pour finir par le symbole $f^{-1}(x)$.

  Quoique proches, nous estimons ces deux techniques différentes surtout en début d'apprentissage de la notion de fonction. La première avec les inversions des variables x et y, nous semble plus naturelle et plus proche de la définition de réciproque. La deuxième correspond à une recherche d'antécédent, c'est assez naturel aussi.

- **Si le registre est graphique**

  a) *Première technique :* Il s'agit de la technique de représentation de fonction *point par point*: Elle consiste à prendre un point de la courbe de f, à relever ses coordonnées x et f(x), à les inverser et à placer le point obtenu, éventuellement sur le même graphique, qui appartient à la courbe de f^{-1} . Bien sûr, un maximum de points assure un tracé plus précis.

  b) *Deuxième technique:* Elle consiste à tracer la droite d'équation "y = x", puis, le symétrique de la courbe de f par rapport à cette droite. La courbe obtenue est la courbe représentative de f^{-1}. L'utilisation de cette technique, relativement à la technique *point par point*, suppose que l'élève *sait déjà* que la courbe d'une fonction et celle de sa réciproque sont symétriques par rapport à la première bissectrice du plan.

La première technique relative aux registres algébrique et graphique, repose sur l'application directe de la définition de fonction réciproque "si f est une fonction bijective, alors il existe une fonction réciproque de f, noté f^{-1}, qui a pour domaine de définition le but de f et pour but le domaine de définition de f, telle que y = f(x) si et seulement si $x = f^{-1}(y)$ ", qui en constitue la technologie. La deuxième technique des registres algébrique et graphique est plutôt une autre formulation de cette définition : "si deux fonctions f et f^{1} sont réciproques alors $(f o f^{-1})(x) = x$ et $(f^{1} o f)(x) = x$".

5.4 Techniques relatives aux tâches de signe d'une fonction et de comparaison de deux fonctions

5.4.1 Techniques relatives à la tâche de signe d'une fonction

- **Si le registre est le registre graphique ou du tableau de variation**

  Les deux techniques étant similaires nous nous limitons à la présentation de la technique graphique. Celle-ci consiste à relever sur le graphique, si ils existent, les abscisses des points d'intersection de la courbe de la fonction et de l'axe des x. Pour une fonction continue et partout définie sur l'intervalle de définition, deux abscisses consécutives correspondent à un intervalle du domaine où le signe de la fonction est constant. Ce signe est positif si la courbe se trouve au-dessus de l'axe des x et négatif si la fonction est en-dessous de l'axe des x.

  Les définitions d'image, d'antécédent, de fonction positive, négative constituent la technologie relative à cette technique de résolution.

- **Si le registre est algébrique**

  Dans ce registre deux techniques sont disponibles : l'une, relève davantage du cadre algébrique, et l'autre relève davantage du cadre fonctionnel.

  Première technique, technique algébrique : Il s'agit d'étudier le signe de l'expression algébrique correspondante de la fonction. La technique est alors de réécrire l'expression algébrique de f(x), souvent sous forme factorisée quand il s'agit d'un polynôme dont on sait déterminer les racines, de façon à pouvoir facilement résoudre l'équation "f(x) = 0" et déduire le signe de chacun de ses facteurs. L'étude du signe de f(x) se fait alors à partir de sa forme factorisée et à l'aide d'un "tableau de signes" où sont indiqués, en première ligne et par ordre croissant les valeurs annulant f(x), et en dernière ligne, le signe de f(x).

  La technologie relève de théorèmes sur la résolution d'une équation algébrique et le signe d'une expression algébrique.

  Deuxième technique, technique fonctionnelle : Elle utilise les variations de la fonction dont on cherche à déterminer le signe. Il faut, en première sous-tâche, étudier les variations de la fonction f (voir tâche des variations/technique du registre algébrique). Les intervalles de monotonie sont ainsi établis qui correspondent aux intervalles sur lesquels la fonction réalise une bijection. En deuxième sous-tâche, il faut résoudre algébriquement l'équation "f(x) = 0" dans chacun des intervalles où on peut établir par le théorème des valeurs intermédiaires que f(x) = 0 a une solution. On déduit également, du fait de la bijection de la fonction sur l'intervalle, que la fonction y est positive (resp. négative) pour les valeurs de x supérieures (resp. inférieures) à celle annulant la fonction.

Aux définitions d'image, d'antécédent, de fonction positive, négative, il faut ajouter pour justifier technologiquement la deuxième technique du registre algébrique, les définitions de fonction croissante, décroissante, monotone et, le théorème sur les valeurs intermédiaires adapté au niveau considéré (par exemple, "Une fonction continue (ou dérivable) et strictement monotone sur un intervalle [a; b] réalise une bijection de cet intervalle sur l'intervalle [f(a); f(b)] ou [f(b); f(a)]".

5.4.2 Technique relative à la tâche de comparaison de deux fonctions

Nous pouvons supposer que les deux fonctions sont définies sur le même domaine. La technique se réalise uniquement dans chacun des deux registres graphique et algébrique. Elle peut se réaliser point par point pour des ensembles finis dans les autres registres.

- **Si le registre est graphique**

  La technique est de considérer les deux courbes, Cf et Cg, données dans le même repère, sur l'intersection de leur domaine de définition et de noter leurs points d'intersection. Pour des fonctions partout définies sur un intervalle et continues, les abscisses de deux points consécutifs forment un intervalle inclus dans l'intervalle de définition où la comparaison est identique. Il reste alors à préciser, pour chaque intervalle, soit que f et g sont égales si Cf et Cg y sont confondues, soit que f est supérieure (respectivement inférieure) à g si Cf y est au dessus (respectivement en dessous) de Cg.

  Les définitions d'image et d'antécédent ainsi que les définitions de comparaison de fonctions sur un intervalle constituent la technologie relative à cette technique.

- **Si le registre est algébrique**

  La technique consiste à étudier le signe de la différence "f(x) - g(x)" suivant les valeurs de x appartenant à l'intersection des domaines de définition des deux fonctions. Il faut, en première sous-tâche, déterminer la fonction différence (f - g) (voir tâche d'opération/technique du registre algébrique). La deuxième sous-tâche est l'étude du signe de la fonction (f - g). En ce sens *la tâche de comparaison de fonctions* dans le registre algébrique se ramène à la *tâche de signe d'une fonction*. La troisième sous-tâche consiste à interpréter le signe de f-g en termes de comparaison des fonctions f et g.

La technologie justifiant cette technique est, bien sûr, composée des définitions constituant la technologie de la tâche d'opération de fonctions, des définitions et théorèmes constituant la technologie de la tâche de détermination du signe d'une fonction ainsi que des définitions de comparaison de deux fonctions sur un intervalle (exemple: "deux fonctions f et g sont égales sur l'intervalle I, si quel que soit x appartenant à I, f(x) = g(x)").

5.5 Techniques relatives aux tâches de variation et d'extremum

Les techniques similaires du registre graphique et du tableau de variation, essentiellement basées sur de la lecture sont présentées en annexe. Nous nous limitons, ici, aux différentes techniques algébriques relatives à ces deux tâches.

5.5.1 Variations de fonction - Registre algébrique

A ce niveau d'étude des fonctions, respectivement trois et quatre techniques sont disponibles pour la résolution des tâches de variations et d'extremum (absolu et relatif), les deux premières ne nécessitent pas l'enseignement du concept de la dérivée alors que celui-ci intervient pour les suivantes.

a) première technique que nous nommerons technique des inégalités : Pour montrer qu'une fonction est monotone sur un intervalle, la première technique consiste à appliquer les définitions de monotonie, qui en constituent la technologie : "une fonction est croissante (resp. décroissante) sur un intervalle I, si pour tous réels a, b appartenant à I tel que a   b, alors f(a)   f(b) (resp. f(a) f(b)". Il faut, dans un premier temps, choisir convenablement les intervalles où la fonction est monotone. Puis déterminer, sur chacun d'eux, dans un deuxième temps, l'ordre de f(a) et f(b) ayant supposé a inférieur à b, ce qui constitue un traitement algébrique possible, ou le signe de f(b) - f(a) relativement au signe de b - a, ce qui constitue un autre traitement algébrique possible.

Sans compter les difficultés de traitement algébrique liées à la manipulation d'inégalités, l'intuition nécessaire pour démarrer la preuve quant aux intervalles de monotonie, limite considérablement l'utilisation de cette technique. Celle-ci ne peut être mise en oeuvre, dans la pratique, que dans le cas de fonctions similaires à celles vues en cours de façon à ce que le choix des intervalles de monotonie ne posent pas trop de difficultés. Autrement, ceux-ci doivent soit, être directement suggérés dans l'énoncé de la tâche, soit faire l'objet d'une conjecture à partir de données graphiques (courbe de la fonction ou tableau de variation). Aussi quand cette technique est visée, ce type de tâche apparaît plus souvent sous la forme "montrer que f est croissante sur l'intervalle [a, b]".

b) *Deuxième technique, que nous nommerons technique des opérations* : La résolution de la tâche de détermination des variations d'une fonction selon cette deuxième technique consiste à les déduire, en remarquant que la fonction concernée peut être décomposée en opérations algébriques simples de fonctions (ou d'un réel et d'une fonction), en fonctions composées, ou encore par transformations géométriques à partir de fonctions dont on connaît déjà les variations, par application des théorèmes sur les variations de la fonction résultante. Les tâches d'opérations de fonctions ou de transfo-2 (tâche de recherche de l'image d'une fonction par transformation) sont donc des sous-tâches composant cette technique des opérations.

Les théorèmes, comme ceux relatifs aux variations de la fonction résultante, les différentes définitions relatives aux variations de fonctions (fonction croissante, décroissante, monotone), constituent la technologie de cette technique. Ainsi, il suffit pour déterminer les intervalles de monotonie d'une fonction selon cette deuxième technique, de montrer que la fonction à étudier résulte de telle opération de fonctions, entre telles fonctions déjà connues ou, de telle transformation géométrique de telle fonction, afin de pouvoir conclure immédiatement sur ses variations en appliquant le théorème correspondant. La technologie porte davantage sur les variations de fonctions et la technique (dans le sens du traitement à faire) davantage sur les opérations de fonctions.

Cette méthode a l'avantage d'être très rapide et d'éviter un travail trop algébrique au profit d'un travail plus fonctionnel au moins pour ce qui concerne les variations d'une fonction, mais a une portée limitée à un nombre relativement réduit de fonctions. Elle ne peut être proposée aux élèves avant l'étude des opérations sur les fonctions, de la composition de fonction et des transformations géométriques de fonctions mais peut précéder l'introduction des concepts de dérivation ou de continuité.

c) *Troisième technique, technique de la dérivée 1ère* : La technique est de déterminer, en première sous-tâche, l'expression algébrique de la dérivée de la fonction. La seconde sous-tâche est l'étude du signe de cette dérivée qui permet en troisième sous-tâche de déduire le sens de variation de la fonction.

Les théorèmes donnant la dérivée d'une fonction à partir de procédés algébriques, le théorème reliant le sens de variation d'une fonction et le signe de sa dérivée ainsi que les définitions de fonctions croissantes, décroissantes, monotones constituent la technologie de cette technique.

Cette technique a évidemment l'avantage d'être très puissante du fait, d'une part de sa facilité d'utilisation et de son large champ d'application : elle concerne en effet, toutes les fonctions usuelles étudiées au lycée. Cependant comme elle utilise le concept de dérivation en tant qu'outil, elle ne s'adresse qu'aux fonctions dérivables. Aussi son enseignement suit-il obligatoirement celui du concept de fonction dérivée, voire du concept de continuité de fonction, selon l'ordre de présentation des concepts de dérivation et de continuité choisi par les programmes. La résolution de cette tâche selon cette technique ne peut être proposée aux élèves avant un certain avancement conceptuel sur l'étude des fonctions.

Une variante de cette technique est celle utilisée quand le signe de la dérivée première f '(x) ne peut être facilement déterminé. Il faut alors avoir recours à la dérivée seconde f "(x). Il s'agit d'appliquer la troisième technique à la fonction f '. Par cette technique f" est obtenue et l'étude du signe de f "(x) est réalisée qui permet de déduire les variations de f '. La dernière sous-tâche est alors l'étude du signe de f ' par la technique fonctionnelle (voir *technique fonctionnelle* relative à la *tâche de signe d'une fonction*). On peut, en fait, être amené à dériver plusieurs fois.

Cette variante de la troisième technique est intéressante quand l'utilisation de cette dernière est rendue difficile par une étude du signe de f '(x) trop compliquée techniquement. Mais le nombre d'étapes nécessaire à cette technique et la variété des théorèmes en jeu ne peuvent en permettre une utilisation large.

5.5.2 Détermination des extremums d'une fonction - Registre algébrique

Plusieurs techniques sont également disponibles pour cette tâche donnée dans le registre algébrique. La première concerne cependant la détermination des extremums absolus alors que les suivantes concernent celle des extremums relatifs.

a) *Première technique, technique des inégalités*: La résolution de cette tâche selon cette technique se rapproche de la résolution de la tâche de détermination des variations d'une fonction selon la première technique. Il faut d'abord avoir *l'intuition* de (ou une information sur) l'extremum *a*, puis monter par le calcul algébrique que sur l'intervalle I concerné l'inégalité "f(x)   (resp.   ) f(a)", est toujours vérifiée.

La définition de l'extremum d'une fonction, constitue la technologie qui justifie cette technique. Les mêmes remarques que pour la première technique de résolution de la première tâche sont à faire ici quant à la portée limitée de cette technique de résolution.

Pour les deux techniques qui suivent, la détermination des extremums relatifs d'une fonction nécessite la connaissance des variations de cette fonction. Nous nous plaçons ici, dans le cas où les intervalles de monotonie ne sont pas donnés au préalable mais sont, au contraire, à déterminer. Ces deux techniques se décomposent alors, en deux sous-tâches principales dont la première est l'étude des variations de la fonction qui se réalise, en général, selon le système technique et technologique équivalent, et la deuxième est la détermination des extremums proprement dite.

b) *Deuxième technique, technique des opérations* : La première sous-tâche se résout d'après la deuxième technique de la tâche de détermination des variations de fonctions. Les intervalles de monotonie d'une fonction sont donc déterminés à partir des intervalles de monotonie des fonctions dont elle résulte par opérations, composition ou transformation géométrique. Ces intervalles de monotonie déterminés, la technique rapportée à la deuxième sous-tâche consiste à repérer les valeurs de la variable pour lesquels la fonction change de sens de variation (celles-ci coïncident avec les bornes des intervalles de monotonie) ainsi que les bornes du domaine de définition, à calculer leurs images, soit les extremums, et à conclure sur la nature de chacun d'eux par application du théorème qui indique que l'extremum est un maximum (resp. minimum) si la fonction est croissante (resp. décroissante) avant cette valeur et décroissante (resp. croissante) après (d'un seul côté si on est aux bornes de l'intervalle). Ce théorème, ainsi que la définition d'extremum, représente la technologie justifiant cette technique.

c) *Troisième technique, technique de la dérivée 1ère* : La première sous-tâche se résout d'après la technique du même nom relative à la tâche précédente. Pour la deuxième sous-tâche, nous allons distinguer deux cas : celui où la fonction est dérivable sur I, et celui où la fonction est continue sur I et dérivable sur cet intervalle sauf peut-être pour un nombre fini de points. Ce deuxième cas impose bien sûr l'enseignement du concept de continuité.

Si la fonction est dérivable sur I, la deuxième sous-tâche principale est de considérer les valeurs de x qui annulent $f'(x)$ (celles-ci sont déjà connues par l'étude du signe de $f'(x)$), ainsi que le signe de $f'(x)$, afin d'appliquer le théorème qui constitue la technologie de la technique soit que "les valeurs de x où la dérivée s'annule en changeant de signe sont des extremums". Reste ensuite à calculer les images de la fonction pour ces valeurs afin d'obtenir la valeur des extremums. Ce théorème ainsi que la définition des extremums constituent la technologie de la technique.

Si par contre, la continuité a été enseignée avant la dérivation, le théorème qui constitue la technologie justifiant la technique de cette deuxième sous-tâche, peut être généralisé pour englober les fonctions continues sur un intervalle et dérivables sur cet intervalle sauf peut-être en quelques points. La technique est la même que précédemment mais il faut considérer dans ce cas, non seulement les valeurs de x où la dérivée s'annule mais aussi celles où la dérivée n'est pas définie (point anguleux par exemple).

d) *Quatrième technique, technique de la dérivée 2nde* : Celle-ci concerne uniquement la tâche de détermination des extremums d'une fonction, elle met en jeu le concept de dérivée seconde. Cette technique s'adresse donc aux fonctions dérivables deux fois sur un intervalle. Elle consiste à déterminer les dérivées première et seconde, les valeurs de x annulant la dérivée première, puis à calculer l'image de chacune de ces valeurs par f " afin d'en connaître le signe. D'après leur signe, on conclut sur la nature des extremums, par application du théorème ci-dessous : "si une fonction est deux fois dérivables sur un intervalle I, et si $f'(a) = 0$ et $f''(a) > 0$ (resp. $f''(a) < 0$), la fonction admet un minimum local (resp. maximum local) en a, qui est f(a)". Ce théorème ainsi que la définition d'extremum et aussi les concepts de dérivée première et seconde constitue la technologie de cette tâche résolue selon cette technique. Cette quatrième technique dispense de l'étude du signe de l'expression algébrique de f '(x), et ne nécessite pas l'enseignement préalable du concept de continuité.

Pour terminer avec ces tâches de variations et d'extremum, il faut souligner, comme nous l'avons fait avec la tâche de représentation de fonctions ayant pour départ le registre algébrique, qu'il est tout à fait légitime de donner *de mémoire* les variations ou les extremums des fonctions de référence, ou encore de les établir en se basant sur la connaissance de leurs propriétés en liaison avec leur classe d'appartenance (en particulier la fonction affine, la fonction cube ne présente pas d'extremum (local), les fonctions du second degré présentent un extremum).

5.6 Techniques relatives aux tâches du cadre géométrique

Ces techniques reposent principalement sur les registres graphique et algébrique et dans une moindre mesure sur le registre du tableau de variation. Elles introduisent le cadre géométrique dans l'étude de fonction.

5.6.1 Techniques relatives aux tâches de parité et de périodicité

a) **Techniques relatives aux tâches de parité-1 et périodicité-1**

Rappelons que les notions de parité et de périodicité ont ici un statut objet. Nous présentons en annexe la technique graphique et la technique algébrique relatives à ces tâches. Soulignons cependant qu'alors que la technique algébrique se réalise dans le cadre fonctionnel, la technique graphique, elle, est une technique de lecture propre au cadre géométrique. Jusque là, toutes les techniques de lecture spécifiques du registre graphique présentées, à l'exception d'une des techniques relatives à la tâche de *détermination de la réciproque*, se réalisaient dans le cadre fonctionnel. Pour les tâches de parité / périodicité, si les définitions respectives de parité et de périodicité ("pour tout x du domaine de définition, - x appartient également au domaine et $f(x) = f(-x)$ (resp. $f(-x) = - f(x)$)", et "pour tout x du domaine de définition, x + T appartient également au domaine et f(x + T) = f(x)") justifient au niveau technologique ces différentes techniques, l'on peut remarquer que la technique algébrique en est une application directe alors que la technique graphique suppose une adaptation au cadre géométrique.

b) Techniques relatives aux tâches de parité-2 et périodicité-2

S'agissant de tâches où ces propriétés géométriques sont utilisées selon leur statut outil, leur utilisation explicite suppose que la fonction est, au préalable, donnée sur une partie seulement de son domaine de définition fonction (sur l'intervalle positif du domaine si la fonction est paire ou impaire, sur une période au moins si la fonction est périodique) et ce, que la fonction soit représentée dans le registre graphique, du tableau de variation ou même dans le registre algébrique. Les différentes techniques, que nous présentons en annexe, consistent à compléter la représentation de la fonction, selon le cas, dans le cadre fonctionnel ou géométrique. Il n'y a donc pas, au niveau technique, de conversion de registre.

Mais ces tâches de parité-2 et périodicité-2 n'apparaissent, en général, qu'au début de l'enseignement des propriétés géométriques (nous le verrons dans l'analyse des tâches/techniques). Par la suite, seules les tâches de parité-1 et périodicité-1 dans le registre algébrique seront éventuellement demandées, les élèves devront en tirer les conséquences quant au choix de l'intervalle d'étude et à la représentation graphique de la fonction concernée. Les tâches de parité-2 et périodicité-2 dans le registre graphique utilisant le cadre géométrique sont alors attendues par contrat. Par rapport aux tâches de parité-1 et périodicité-1, les tâches de parité-2 et périodicité-2 peuvent, dans ce sens, être vues comme des tâches entraînant, au niveau technique, des conversions de cadres et de registres.

5.6.2 Techniques relatives aux tâches de changement de repère

Ces techniques sont données en annexe. Soulignons simplement que *la technique de changement d'origine relative à la tâche de mise en évidence d'un axe ou d'un centre de symétrie* est une technique qui se caractérise par une conversion du registre algébrique du cadre fonctionnel vers le registre algébrique du cadre de géométrie analytique suivi d'un retour vers le cadre fonctionnel. Le registre graphique sert d'aide éventuellement aux transformations algébriques nécessaires puisqu'il permet de conjecturer l'existence d'un tel axe ou centre. Celle relative à la *tâche de réécriture de l'équation algébrique de la fonction* se réalise entièrement dans le cadre fonctionnel ; le recours au cadre géométrique pour mettre en évidence les éléments de symétrie de la fonction n'étant qu'implicite.
Le changement d'origine est un cas particulier de changement de repère. La technique de changement de repère n'est impliquée que relativement à la tâche de réécriture algébrique. et présente dans son esprit de grandes similitudes avec la technique de changement d'origine.

5.6.3 Techniques relatives aux tâches de transformations géométriques

Les registres concernés sont les registres graphique, algébrique ou, plus rarement, du tableau de variation ainsi que le registre verbal éventuellement utilisé pour décrire la transformation dans le cadre géométrique (exemple : la courbe Cg est l'image de la courbe Cf par la réflexion d'axe (Ox)).

a) Technique relative à la tâche d'identification de la transformation (ou tâche de transfo-1)

La fonction de départ f et sa transformée g sont, toutes les deux, exprimées dans le même registre. Nous estimons que la transformation, en tant qu'opération permettant le passage de f à g, est donnée implicitement. La technique d'identification de la transformation consiste justement à l'exprimer explicitement dans le registre verbal du cadre géométrique. Il faut pour cela comparer, selon le cas, les expressions algébriques respectives de f et de g, leurs graphiques respectifs, ou leurs tableaux des variations respectifs en s'appuyant sur les définitions des différentes transformations afin de *reconnaître* l'une d'entre elles. La technique de résolution se base donc essentiellement sur une conversion du cadre fonctionnel vers le cadre géométrique.

b) Technique relative à la tâche de recherche de l'image d'une fonction par une transformation (ou tâche de transfo-2)

La transformation est explicite pour cette deuxième tâche où elle est donnée dans le registre verbal du cadre géométrique. La technique consiste alors à appliquer à f la transformation afin d'obtenir, sa transformée g, dans le même registre que celui de f. Cette technique repose, comme pour la précédente, essentiellement sur un changement de cadres mais la conversion s'opère cette fois dans le sens cadre géométrique, cadre fonctionnel.

Pour terminer, il nous faut souligner que ces deux tâches seront surtout présentes au début de l'enseignement sur les transformations. Par la suite le type de tâche le plus fréquent relatif aux transformations, se présente plutôt sous la forme d'une combinaison de ces deux tâches : la fonction de départ f est donnée dans deux registres différents (le plus souvent il s'agira des registres graphique et algébrique), la transformée g, est donnée dans l'un de ces deux registres (le registre algébrique, par exemple). La tâche demandée est de représenter g dans le deuxième registre de f (soit de représenter g graphiquement), et suppose en première sous-tâche implicite, l'identification de la transformation. La technique de résolution repose à la fois, dans ce cas, sur une conversion de cadres et de registres.

La technologie justifiant ces techniques est constituée des définitions des transformations géométriques dans le cadre géométrique (registre de la figure et registre algébriques) et de leur traduction algébrique et graphique dans le cadre fonctionnel.

5.7 Techniques relatives aux tâches de résolution d'équations (ou d'inéquations)

5.7.1 Technique de résolution d'équations/inéquations relative au cadre algébrique

Il s'agit de la technique algébrique classique de résolution d'équations ou d'inéquations, où l'aspect fonctionnel est ignoré et ce même si cet aspect a fait l'objet d'une institutionnalisation dans le cours.

5.7.2 Technique de résolution d'équations/inéquations relative au cadre fonctionnel et au registre graphique

La technique de résolution consiste à résoudre graphiquement une équation ou une inéquation. Elle est plus ou moins explicitement suggérée par l'énoncé de l'exercice, soit qu'il soit demandé de "résoudre graphiquement une équation", soit qu'une telle tâche apparaisse à la suite de l'étude préalable de la fonction correspondante. La technique est une technique graphique qui consiste à rechercher l'antécédent d'un élément donné par l'intermédiaire de la courbe de la fonction correspondant à l'équation : il faut rechercher un couple précis (x, b) dont le deuxième membre est connu parmi tous les couples de points (x, y) constituant la courbe de la fonction.

La technologie relative à cette technique repose essentiellement sur les notions d'image et d'antécédent, de variable mais aussi sur les propriétés spécifiques relatives à la fonction et qui peuvent être visualisées graphiquement (en particulier, le nombre de solutions à une équation donnée est *visible* graphiquement , ce qui facilite leur recherche en deuxième étape).

5.7.3 Technique relative à la tâche d'existence de solution à une équation de type f(x) = c et éventuellement à la détermination d'une solution approchée

Ces techniques qui se situent entièrement dans le cadre fonctionnel et se basent sur la connaissance des variations de la fonction associée sont présentées en annexe.

Ce répertoire des tâches/techniques constitue la base selon laquelle les exercices/problèmes que nous allons analyser seront classifiés. Chaque question apparaissant dans un exercice sera traduite, dans nos tableaux de tâches/techniques, par la tâche correspondante et la technique associée, que celle-ci soit explicitement demandée ou encore attendue par contrat. Ainsi, si une représentation graphique de fonction est à réaliser par la technique *point par point,* cette technique est en général demandée. Mais si les variations d'une fonction sont à déterminer par la technique de la dérivée, cette tâche/technique est, souvent, attendue par contrat. Nous considérerons d'ailleurs la référence à cette technique comme explicite, si la *tâche de détermination des variations* est précédée, par exemple, de la *tâche de calcul de la dérivée*. Sur ce dernier point relatif aux techniques, il est important de souligner, que bien souvent, quand une technique relative à une certaine tâche est élaborée, sa mise en œuvre impose la résolution préalable d'autres sous-tâches. A titre d'exemple, la détermination des extremums par la technique de la dérivée suppose la détermination de ses variations au préalable. La présence, dans un même exercice, des deux tâches de variations et d'extremum, est pour nous un moyen de subdiviser une technique donnée en plusieurs étapes et de faciliter d'autant la résolution de la tâche d'extremum. Ainsi, le fait de remarquer pour un exercice donnée que la tâche d'extremum apparaît sans la tâche de variation est significatif du degré de difficulté de cet exercice pour lequel les auteurs n'ont pas souhaité apporter d'aide à la résolution sous la forme d'une subdivision de la technique de résolution.

6. Quelques réflexions à propos des regroupements en organisations locales

Nous avons, jusque-là, étudié les organisations ponctuelles susceptibles d'exister autour de l'enseignement du concept de fonction. Nous souhaitons proposer, ici, quelques exemples possibles d'organisations locales afin d'ajouter à la réflexion théorique sur les organisations praxéologiques et la difficulté de les cerner en général (Chevallard, 1998, p 96).

Considérons l'organisation mathématique autour de la définition d'image/antécédent : cette définition peut très bien être vue comme une technologie justifiant les différentes techniques permettant de résoudre toutes les tâches de recherche d'image/antécédent. Il s'agit alors d'une organisation locale autour d'une technologie. Or ce même regroupement de tâches apparaît dans notre répertoire des tâches/techniques en tant qu'organisation ponctuelle. Ainsi à travers au moins cet exemple, nous voyons qu'une organisation locale peut coïncider avec une organisation ponctuelle. Dans cet exemple précis, les techniques sont aussi variées que les registres de représentation de fonction et une technique ne permet de résoudre qu'une seule tâche. Organisation locale et organisation ponctuelle semblent se confondre sur cet exemple. Ceci peut-être due au fait que la différence entre technique et technologie n'y est pas bien grande : ici, la technique semble naturelle et n'a pas besoin d'être justifiée. Mais cela peut être due également au fait que cette définition ne constitue pas toute la technologie mais seulement un élément technologique justifiant les différentes techniques, les autres éléments qui peuvent être liés, par exemple, au registre de représentation restent implicites. Cet exemple reflète bien la difficulté de cerner la technologie relative à une organisation ponctuelle donnée.

Si, par contre, nous considérons le théorème liant la dérivée d'une fonction f et son sens de variation en tant que technologie. Cette technologie justifie la technique qui consiste à déterminer la dérivée f ' d'une fonction f, à étudier son signe, puis à en déduire les variations de f. Technique qui, à son tour, peut servir à accomplir plusieurs tâches:

- la tâche d'étude des variations de f,
- la tâche de déterminations des extremums de f (dans la mesure où cette tâche nécessite la connaissance des variations de f),
- la tâche de détermination d'images d'intervalle du domaine de définition,
- la tâche de détermination de la propriété de bijection,
- la tâche de détermination du nombre de solutions à une équation donnée,
- la tâche de détermination du signe de f (par la technique de variations),
- la tâche de comparaison de fonctions (dans la mesure où elle peut être ramenée à la tâche de détermination du signe d'une fonction)
- et même les tâches de réalisation du tableau de variation de f, et de représentation graphique de f.

Cette organisation est constituée d'une seule technologie qui justifie une technique entrant dans la réalisation d'un grand nombre de tâches. Cela est due à la puissance de la technique, liée à la force de la technologie. D'ailleurs, la technologie ne se limite pas en vérité à un seul théorème : les concepts de variation, de dérivée, et leurs définitions respectives sous-tendent cette technologie. De même toutes ces définitions et ce théorème réunis ne suffisent pas à eux seuls à justifier entièrement toutes les techniques relatives à ces différentes tâches. Selon la tâche, les définitions et théorèmes relatifs aux concepts de bijection, d'image/antécédent (pour les extremum et la détermination du nombre de solutions à une équation donnée), d'opérations algébriques de fonction (pour la tâche de comparaison) sont également nécessaires à la justification des techniques et s'intègrent dans l'organisation locale que nous venons de présenter. La technologie justifiant cet ensemble de tâches/techniques est donc, ici, constituée d'un ensemble de définitions et théorèmes parmi lesquelles cependant apparaissent au premier plan, la définition de variation de fonction et le théorème mentionné.

Limitons-nous, dans le troisième exemple, à la définition de variation pour technologie (le concept de dérivée et le théorème liant dérivée et variation sont en particulier exclus). Une organisation locale peut également se construire autour de cette technologie qui regroupera essentiellement les deux tâches de *détermination des variations de fonctions* et certaines tâches de *représentation de fonction* (conversion du registre algébrique vers les registres du tableau de variation et du graphique ainsi que les conversions entre les deux registres graphique et du tableau de variation). Cette technologie justifie également une variété de techniques valables pour les deux types de tâches : aussi bien les techniques de lecture graphique et du tableau de variation, que la technique algébrique des inégalités, la technique basée sur la décomposition de la fonction par opération algébrique, par composition, par transformation, ainsi que la technique de changement de repère. Cette organisation locale présente des similitudes avec chacune des deux organisations précédentes. Comme la précédente organisation locale, celle-ci ne se base pas sur l'unique définition des variations, d'autres sont nécessaires à la justification au niveau technologique de ces différentes techniques. Comme la première, elle se caractérise par un grand nombre de techniques relativement au nombre de tâches.

Il nous semble, d'après l'étude de ces exemples, que l'utilisation du terme de technologie devrait être compris dans le sens d'un environnement technologique dans la mesure, où justement, une technologie ne se limite pas à un (e) seule (e) théorème (définition). Ce qui n'est pas si surprenant après tout : le savoir nouveau se construit et se développe, à partir d'autres savoirs, qu'il englobe forcément ne serait-ce que de façon implicite. Ainsi, quand on aborde les variations de fonctions, concept plus élaboré que celui d'image/antécédent, celui-ci ne doit pas être oublié.

D'un autre côté, il apparaît que l'on ne peut pas toujours réduire un *thème d'étude* dans une classe de mathématiques, du moins en ce qui concerne les fonctions au niveau d'enseignement considéré, à une seule organisation locale. Si une organisation locale peut parfois, entièrement ou en partie, coïncider avec un thème d'étude (c'est le cas de notre deuxième exemple d'organisation locale et du thème d'étude "application de la dérivation"), il nous semble que souvent un thème d'étude pourra être divisé en plusieurs organisations locales ou même ponctuelles. Nous serons alors attentive dans notre analyse des manuels à dégager, dans chaque chapitre, les thèmes d'étude et les organisations locales ou ponctuelles qui leur sont associés ; ceci est par ailleurs un reflet de la transposition didactique réalisée par les auteurs de ces manuels.

7. la grille d'analyse des exercices/problèmes

La grille d'analyse des exercices/problèmes est un outil qui va nous permettre d'étudier les exercices/problèmes des manuels retenus selon les quatre lignes d'analyse que nous avons distinguées:

- En termes de tâches / techniques / technologies en jeu,
- en termes de registres et de cadres intervenant dans les exercices/problèmes,
- en termes de statut objet ou outil des concepts utilisés.

Ceci dans l'idée de faire ressortir la dialectique existant entre ces différentes lignes d'analyse, dialectique que nous pensons liée à l'équilibre écologique installé dans l'organisation des différents enseignements. Notre grille est constituée de deux ensembles de tableaux que nous présentons dans les paragraphes suivants, ceux relatifs aux organisations praxéologiques ainsi que ceux relatifs aux registres intervenant dans les exercices/problèmes.

Nous n'avons pas jugé nécessaire, comme nous le pensions au départ, de constituer des tableaux relatifs aux cadres apparaissant dans les exercices d'un chapitre donné ainsi que des tableaux relatifs au statut outil/objet des concepts rencontrés. En effet, nous avons remarqué, dans notre lecture a priori des exercices/problèmes ainsi que lors de la mise au point du répertoire des tâches/techniques, que le recours à plusieurs cadres était relativement circonscrit au sein de certains types de tâches à l'intérieur de certains exercices. De même, il y a rarement au sein d'un même exercice une double utilisation d'un concept selon son statut outil et objet, les nouveaux concepts à mettre en place le sont surtout selon leur statut objet, l'utilisation d'un concept selon son statut outil est également limité à certains types de tâches à l'intérieur de certains exercices. En conséquence, nous avons choisi d'inclure l'analyse par cadres et l'analyse selon les statuts outil/objet, respectivement dans l'analyse par registres et dans l'analyse par tâches et techniques.

7.1 Les tableaux relatifs aux organisations praxéologiques

Le premier ensemble de tableaux est relatif aux organisations praxéologiques. Il y a un tableau par chapitre. Il s'agit d'un tableau de classification des exercices/problèmes retenus dans chaque manuel conformément à notre répertoire des tâches/techniques donné en début de chapitre (voir par exemple les tableaux des tâches et techniques apparaissant en annexe du chapitre III).

Pour chacun de ces tableaux, sont indiqués, en ligne, les exercices pris un par un, dans l'ordre de leur apparition dans le manuel. Le tableau est divisée en 6 colonnes :

- La première intitulée "place dans le chapitre" indique à la fois le type d'exercice/problème (activité, exercice résolu, travaux pratiques, exercices, problèmes, etc., pour les manuels français et, exercice d'entraînement, d'approfondissement, de révision, etc., pour les manuels palestiniens) et le numéro de l'exercice ;
- la deuxième colonne intitulée "type de fonction" indique le type de fonction lorsque celle-ci est exprimée algébriquement (fonction affine, du second degré, racine carrée, avec racine carrée, rationnelle, etc.), et signale la présence éventuelle de paramètres. Cette colonne reste vide si la fonction est donnée dans un registre autre que le registre algébrique, excepté dans le cas d'une situation fonctionnelle où cela est alors mentionné ;
- la troisième et la quatrième colonnes indiquent respectivement le type de tâche et les techniques de résolution attendues, nous les détaillerons plus loin, conformément au répertoire des tâches et techniques que nous avons présenté dans ce chapitre ;
- la cinquième colonne indique les initiatives laissées aux élèves relativement à une tâche ;
- enfin la sixième colonne est consacrée aux remarques éventuelles.

Ainsi, dans ce tableau, à un exercice correspond une case-ligne constituée des différentes cases situées au croisement de l'exercice et de chacune des colonnes. La case correspondant au croisement d'un exercice et de la colonne *type de tâches* est subdivisée en autant de lignes qu'il y a de questions principales posées. Nous rappelons qu'une question d'exercice correspond à un des types de tâches mathématiques répertorié. L'ordre dans lequel ces tâches sont posées par l'exercice est respecté et apparaît dans le tableau de haut en bas. La succession selon laquelle les différents types de tâches apparaissent, et l'évolution de cette succession peuvent ainsi être analysées. Enfin une tâche peut-être demandée de façon implicite, alors la mention "implicite" apparaîtra entre parenthèses au-dessus de la tâche : Nous pensons par exemple, à la *tâche de détermination de la parité d'une fonction* où il est demandé de "calculer f(-x) puis de comparer f(x) et f(-x)" plutôt que "d'étudier la parité de f".

En face de chaque tâche, dans la colonne *techniques attendues*, se trouvent justement indiquées les techniques. En général, une seule technique est attendue. Dans les rares cas où plus d'une technique seraient attendues, nous le préciserons. Nous ne précisons pas nommément chacune des techniques ; nous y référons en précisant le registre ou les registres (de départ et d'arrivée) dans lequel il est demandé de réaliser la tâche, et ceci quand il (s) suffit (sent) à lui (eux) seul(s) à déterminer la technique.

Si, par exemple, une des tâches d'un exercice donné, est de déterminer l'image d'un élément particulier d'une fonction exprimée dans le registre du diagramme sagittal, il est simplement indiqué *registre sagittal*, dans la colonne des techniques en face de la tâche *détermination d'image.* Il en sera de même pour un exercice où une des tâches à exécuter est la détermination des variations d'une fonction dans le registre graphique : il suffira d'indiquer dans la colonne des techniques *registre graphique* en face de la tâche *de variation.*

De même, il est parfois nécessaire de préciser les deux registres de départ et d'arrivée pour indiquer la technique : ceci est vrai pour les tâches qui se ramènent à une conversion de registres. Par exemple, si pour une fonction donnée graphiquement il est demandé, de "dresser son tableau de variation", il sera bien indiquée dans la colonne des tâches *représentation de fonction* mais dans la colonne des techniques, nous aurons noté *registre graphique vers registre tableau de variation* pour préciser la conversion de registres correspondante.

Enfin, quand le(s) registre(s) ne suffit (sent) pas à déterminer la technique correspondant à un type de tâche parce que plusieurs techniques sont disponibles dans le registre en question, alors la technique sera indiquée nommément conformément au nom qu'elle porte dans notre répertoire des tâches/techniques. S'il est, par exemple, demandé de déterminer les variations d'une fonction exprimée algébriquement, en face de la tâche de *variations de fonction,* dans la

colonne des techniques attendues, nous préciserons *technique de la dérivée, technique des inégalités,* etc., selon le cas (voir dans le répertoire des tâches/techniques les différentes techniques disponibles dans le registre algébrique).

A chaque fois qu'il lui semblera nécessaire, le lecteur pourra se reporter au répertoire des tâches/techniques, pour obtenir le détail de la technique indiquée dans le tableau ainsi que la technologie relative à cette technique.

En face de chaque tâche et de sa technique attendue est indiquée, dans la colonne "initiatives laissées à l'élève", la marge d'initiative que les auteurs ont voulu donner aux élèves. Nous verrons apparaître selon le cas la mention "demandé" si la technique est explicitement demandée, ou "par contrat", si une seule technique est attendue sans être cependant explicitement demandée. Soulignons que nous considérons également une technique comme explicitement demandée si la tâche à résoudre est précédée de sous-tâches qui s'avèrent être des étapes de la technique en question. Par exemple, si la *tâche de calcul de la dérivée,* précède *la tâche de variation,* la technique de résolution de cette tâche est clairement la technique de la dérivée ; mais aussi si *la tâche de variation* à résoudre selon la *technique de la dérivée* précède la *tâche d'extremum* alors la technique relative à cette dernière tâche est également la technique de la dérivée.

La succession de tâches dans un même exercice est également importante dans un autre sens : elle peut être significative de l'attente des auteurs de manuels. Ainsi, si une tâche de variation n'est pas précédée des sous-tâches la composant, c'est que les auteurs estiment la technique devant être totalement maîtrisée et n'ont volontairement pas choisi de mettre les élèves sur la voie des différentes étapes à réaliser. Il nous semble également que la même conclusion est à faire pour deux tâches comme la tâche de variation et la tâche d'extremum dans les techniques où la tâche de variation est une sous-tâche de la tâche d'extremum. Mais d'un autre côté le fait que deux tâches d'association facile apparaissent de façon isolée peut indiquer que les auteurs veulent mettre l'accent sur le travail de la technique. C'est en ce sens que nous serons sensible à la présence de tâche isolée ou à l'association de tâches dans un même exercice.

Enfin, la colonne "remarques" comprend des remarques diverses. Il y a aussi bien des remarques spécifiques des situations fonctionnelles : la remarque "modélisation" par exemple, précise qu'une *tâche d'expression fonctio*nnelle est en fait *une tâche de modélisation*, ceci pour distinguer plus rapidement cette même tâche selon que la fonction est ou n'est pas une situation fonctionnelle. La remarque "retour à la situation initiale" vise à préciser que la tâche correspondante "d'antécédent" ou de "comparaison de fonction", etc., est posée dans les cadre et registre d'origine.

Dans la colonne "remarques", peut également apparaître la notation "=aide". Cette notation signifie que les tâches en question constituent tout ou partie de la technique de résolution d'une autre tâche demandée dans la suite de l'exercice. Par exemple, s'il est demandé de tracer une droite dans le même graphique où se trouve déjà une courbe, et que la tâche suivante est justement une résolution d'équation (ou d'inéquation). Il arrive que soit également demandé de "lire les coordonnées du point d'intersection" avant la "résolution de l'équation". Cette(s) tâche(s) graphique(s) demandée(s)au préalable constitue(nt) bien sûr une partie de la technique de résolution de la tâche suivante. Un autre exemple est celui de l'étude des variations d'une fonction selon la technique des inégalités (voir technique relative à la tâche de variation); les intervalles de monotonie de la fonction, et même les inégalités à étudier traduisant les variations de la fonction, peuvent être donnés sous forme de tâches précédant *la tâche de variation.* A ces tâches qui apparaîtront dans le tableau sous la forme de *tâches algébriques* correspondra dans la colonne *Remarques* la mention "=aide". Notons que parallèlement, dans la colonne "initiative laissée à l'élève", en face de la tâche de *variation* nous aurons noté "demandé" car ces tâches éclairent l'élève sur la technique à utiliser.

Toutes ces formes d'aides correspondent souvent à des techniques nouvelles, à mettre en place, et tendent à disparaître en cours d'année scolaire ou au niveau scolaire supérieur, mais elles peuvent également être indicatives de la *difficulté* de la technique à mettre en œuvre, et pour laquelle une maîtrise totale de la part de l'élève ne sera jamais exigée.

7.2 Problème de différenciation de certaines tâches

La classification de chaque exercice par les différentes tâches qui le composent suppose la capacité de distinguer une tâche relativement à une autre. Loin d'être toujours évident, ce travail précédant la classification proprement dite des exercices restera transparent pour le lecteur. Nous avons souhaité souligner, à travers quelques exemples, cette étape clé de l'analyse des exercices.

Nous pensons en particulier aux tâches que l'on différencie souvent mal de la tâche de *résolution d'une équation.* Considérons par exemple l'exercice suivant : "Soit f(x) = 3x - 3", et formulons la question à poser de trois façons différentes : "déterminer x t.q l'image de x par f soit 1" ou "déterminer x t.q f(x) = 1" ou "résoudre l'équation f(x) = 1". Dans les trois cas, pour répondre à la question posée, il faudra résoudre l'équation "3x - 3 = 1". Cependant, avec la première formulation, l'exercice correspond à la tâche *détermination d'un antécédent* , avec la troisième il s'agit clairement *d'une résolution d'équation,* la deuxième est une tâche intermédiaire. Dans chaque cas, la tâche n'est pas la même car la technique de résolution diffère sur certains points : dans la première tâche qui se situe dans le cadre fonctionnel, il faut être capable de traduire le mot image en terme de relation d'égalité pour passer à la deuxième tâche, puis de la deuxième à la troisième, il faut être capable de substituer

3x-3 à f(x). Tout ceci est nécessaire pour répondre à la première : la 3ème tâche est opératoire, elle se situe entièrement dans le cadre algébrique et le lien avec la recherche d'un antécédent, s'il est fait, ne peut être qu'implicite. Nous constatons que la troisième est une sous-tâche de la deuxième qui est une sous tâche de la première.

Cette distinction n'est pas à prendre à la légère et est d'autant plus délicate que le niveau d'enseignement est faible. Revenons rapidement sur la deuxième formulation, elle peut aussi bien correspondre à la première qu'à la troisième tâche ! En fait, cela dépend du degré auquel la référence à la fonction et à la relation fonctionnelle entre x et f(x) est faite. En particulier, si cette question est l'unique question d'un exercice, on la considérera comme une résolution d'équation. Mais si cette question est une question parmi d'autres faisant davantage référence à la notion de fonction, on la considérera comme une tâche de détermination d'un antécédent. Remarquons que si la tâche de résolution d'une équation survient au sein d'un exercice portant sur une fonction (une étude de fonction par exemple), le lien avec la recherche d'un antécédent, bien qu'implicite, peut être plus évident à faire, de la part de l'élève. On peut penser, en tous cas, que ce lien à faire est souhaité par les auteurs de l'exercice. Nous voyons là resurgir le contrat didactique qui se noue par la mise en relation de tâches différentes à travers une suite de questions.

De façon similaire, il est parfois difficile de distinguer la tâche de *comparaison de fonction* et de *résolution d'équation/d'inéquation*. Nous pensons en particulier à deux exercices tirés du manuel français de Seconde (voir tableau des tâches et techniques du manuel de 2nde, exercices n°17 et n°34 du chapitre I). Il s'agit, pour chacun des deux exercices, d'une situation fonctionnelle d'origine géométrique où deux fonctions f et g sont à établir en début d'exercice. La dernière question du premier exercice est : "Résoudre l'équation f(x) = g(x) (algébriquement, graphiquement et géométriquement)" et dans le deuxième exercice, il est entre autres demandé de "calculer pour quelles valeurs de x on a f(x) = g(x)". Dans le premier cas, nous avons estimé avoir affaire à une tâche de résolution d'équation. Ceci, parce que la formulation de la question ne laisse pas de doute, et que celle-ci est présentée comme une question bien distincte du reste de l'exercice qu'elle vient terminer. Mais aussi du fait que la résolution *algébrique* est explicitement demandée. Cependant une résolution graphique puis géométrique sont également demandées. Là, il nous semble que les auteurs souhaitent une mise en parallèle des différentes techniques possibles basées sur des changements de registres mais aussi de cadres (résolution géométrique), et veulent ainsi guider le passage d'une résolution dans le cadre algébrique vers une résolution dans le cadre fonctionnel. Le deuxième cas, est pour nous, une tâche de comparaison de fonctions (cas d'égalité) car la question se distingue moins des autres faisant référence au cadre fonctionnel, et que par ailleurs elle n'est pas la seule à solliciter les deux fonctions f et g à la fois (une question se rapporte d'ailleurs à la fonction somme f+g). Certes, le second exercice suppose, comme le premier, une résolution d'équation qui est néanmoins une étape de la technique au lieu d'être clairement la tâche demandée.

Notons que le dernier exemple cité "calculer pour quelle valeur de x on a f(x) = g(x)", pourrait également être considéré comme une tâche de *détermination d'un antécédent*. En effet, on pourrait voir cette tâche comme correspondant à la recherche de l'élément x ayant pour image 0 par la fonction f-g. Mais nous avons écarté ce cas dans le type de tâches *détermination d'un antécédent*. Pour nous, ce type de tâche correspond à une recherche d'antécédent *simple*, ne mettant en particulier en jeu, qu'une seule fonction et aucun autre concept mathématique. C'est ainsi que la question de "déterminer pour quelle valeur de x une fonction donnée atteint son maximum" est pour nous une tâche relative au type de tâches "détermination d'extremum", car avant de rechercher un antécédent, il faut pour réaliser cette tâche, déterminer son maximum.

Précisons enfin, concernant les situations fonctionnelles, que nous n'avons pas considéré comme telles, les tâches pouvant faire penser à des *résolutions d'équations/inéquations* si celles-ci sont formulées comme des *retours à la situation initiale*. Nous les avons classées, selon le cas, comme des tâches de *détermination d'un antécédent*, de *comparaison de fonction*, ou autres.

Nous arrêterons ici les exemples de tâches dont la différenciation mérite une certaine attention, bien que la liste soit encore longue. Nous retiendrons simplement qu'il n'est pas toujours évident de classer une question dans un exercice donné parmi les différents types de tâches, lorsque sa formulation n'est pas assez explicite. Seule alors une analyse au cas par cas permet de différencier, en fonction du contexte général de l'exercice, deux tâches entre elles. Cela prouve, et nous l'avions déjà remarqué suite à notre répertoire des techniques, que la notion de tâche est liée à celle de technique : une tâche A peut apparaître comme une sous-tâche d'une tâche B, dans une certaine technique de traitement de B.

7.3 Les tableaux relatifs aux registres

Ces tableaux concernent les registres apparaissant dans les exercices/problèmes retenus. Il y a également un tableau par chapitre. Chaque tableau (voir également, par exemple, les tableaux des registres en annexe du chapitre III) est constitué de quatre colonnes:

- la première intitulée "type de tâche" donne les différentes tâches apparaissant dans le chapitre conformément à notre classification des tâches/techniques ;
- la seconde intitulée "registre de départ" indique, pour une tâche donnée, les différents registres de départ et leur nombre d'apparition dans le chapitre ;

- la troisième, "les changements de registres" indique les éventuelles conversions de registre pour une tâche donnée,
- enfin la dernière est une colonne de remarques.

Le but de ce tableau n'est pas de permettre l'étude systématique des tâches/techniques par registres, celle-ci sera réalisée à partir des tableaux relatifs aux organisations praxéologiques; il vise plutôt à nous donner une vision d'ensemble des registres utilisés dans les exercices/problèmes du chapitre ainsi que des éventuelles conversions de registres. En ce sens, si une certaine tâche donnée dans un certain registre apparaît plusieurs fois dans un même exercice, le registre, relativement à la tâche, ne sera compté qu'une seule fois.

8. Conclusion

L'étude que nous avons effectuée dans ce chapitre a permis de préciser le répertoire des tâches/techniques auxquelles nous nous référerons dans notre analyse des organisations praxéologiques propre à chaque système d'enseignement étudié. Certes ce répertoire constitue l'un des supports de la grille d'analyse des exercices/problèmes, également présentée dans ce chapitre, mais il supportera de même notre analyse des organisations praxéologiques des programmes et de la partie cours des manuels.

Nous étudierons, les organisations mathématiques existantes par classe et par cycle scolaire pour chacun des deux systèmes d'enseignement. Autrement dit, quels sont les objets d'enseignement visés, comment ces objets sont-ils sollicités au sein de ces organisations, soit à quel niveau technique ? technologique ? Comment sont-ils organisés en thèmes d'étude (cela apparaîtra déjà lors de l'étude de la partie cours des manuels). Nous serons également attentive à la façon dont les différentes tâches sont présentées au sein d'un même exercice. Apparaissent-elles plus souvent regroupées à d'autres, ou au contraire plutôt de façon isolée (cet aspect ressortira davantage lors de l'analyse des exercices/problèmes) ? Cette présentation n'étant pas sans relation avec l'organisation du savoir voulue par les auteurs des manuels, est également un indice des contraintes didactiques que nous avons soulignées dans les deux premiers chapitres. Nous pourrons analyser l'évolution des tâches et techniques dans un même programme scolaire, puis dans le cycle du lycée. Nous noterons celles qui apparaissent à un niveau scolaire et qui deviennent écologiquement obsolètes au niveau scolaire supérieur, ou même en cours d'année.

Ainsi, l'analyse des organisations praxéologiques devrait s'accorder avec un premier questionnement écologique, propre à l'équilibre installé entre les tâches, techniques et technologies. Mais nous nous soucierons de l'équilibre écologique plus général installé dans l'organisation de l'enseignement de chacun des deux systèmes palestinien et français, et qui doit transparaître également à travers l'utilisation de certains registres et cadres ainsi qu'à travers la manipulation de certains concepts selon le statut objet ou outil.

Ces lignes d'analyse seront mises à l'épreuve dans les chapitres III et IV où nous étudierons l'organisation générale de l'enseignement respectivement dans le système français et dans le système palestinien

PARTIE B

L'ANALYSE INSTITUTIONNELLE

ANALYSE DE CHACUNE DES DEUX INSTITUTIONS FRANÇAISE ET PALESTINIENNE

Chapitre III

Description et analyse des programmes et manuels français

Ce chapitre est consacré à l'analyse des programmes et manuels français dans leur cohérence sur la base des grilles d'analyse élaborées au chapitre 2. Cette analyse permettra de faire ressortir les spécificités de l'enseignement français du concept de fonction tant du point de vue des grandes intentions didactiques que du point de vue des contenus mathématiques.

Dès l'année scolaire 1994-1995, les sections scientifiques ont été regroupées dans une terminale S avec plusieurs options de spécialités présentant des variantes sur les programmes qui n'affectent que très peu la partie qui nous intéresse. Nous garderons donc cette référence qui correspond aux manuels étudiés. Depuis cette date, les programmes français ont subi quelques variations. Nous examinerons dans un paragraphe en fin de chapitre celles qui ont éventuellement affecté la partie du programme qui nous intéresse et qui devront être prises en compte au moment de l'analyse des questionnaires.

1. Les programmes des classes de Seconde et de Première

1.1 Organisation de l'analyse des programmes

L'analyse des programmes des classes de Seconde et de Première est réalisée de façon à répondre à toutes les questions soulevées sur la base de l'étude que nous avons menée jusqu'ici. Adoptant donc l'approche anthropologique et nous souciant de l'équilibre écologique installé dans l'organisation de l'enseignement du concept de fonction, nous voulons :

- Mettre en évidence le mode d'appréhension adopté pour l'introduction du concept de fonction; savoir si l'enseignement d'un deuxième mode d'appréhension est prévu (soit, est-il à la charge de l'enseignant) et, dans l'affirmative, déterminer comment est conçu le passage vers ce deuxième mode d'appréhension.
- Déterminer comment chacun des modes d'appréhension s'exprime en termes de cadres et de registres associés. Quel est le statut des concepts (outil ou objet) choisis en accord avec cette organisation du programme ?
- Déterminer les grands types de tâches qui se dégagent ainsi que leur environnement technique et technologique (ceci apparaîtra de façon plus évidente dans l'analyse des exercices et problèmes)

Nous serons également sensible aux grandes intentions didactiques qui transparaissent à la lecture de ces programmes. La description et l'analyse des programmes se feront de façon simultanée. Enfin, soulignons que les programmes français concernent à la fois les classes de Seconde et de Première et rappelons qu'il n'existe pas côté palestinien de programmes. Les manuels, directement édités par le Ministère Palestinien de l'Education, sont les seuls en vigueur.

1.2 Description et analyse des programmes de Seconde et des Premières

Nous nous intéressons au programme de Seconde et à celui des Premières S, E et Terminales C, D, E qui ont été mis en vigueur respectivement à la rentrée scolaire 91-92, et 92-93 pour les classes de Premières. Ils ont été publiés respectivement au BOEN du 17 Mai 90 et au BO spécial du 2 mai 91 et remplacent les programmes précédents même s'ils en conservent "pour l'essentiel, les objectifs et la substance". Il n'est pas étonnant que ces programmes concernant le même cycle du lycée, et relevant de la même réforme, soient identiques sur leur partie générale, à quelques différences près essentiellement dans la présentation du texte et sa mise en forme. Nous avons fait le choix de nous référer au programme de Seconde pour la partie générale, et nous ne mentionnerons le programme des Premières-Terminales que pour souligner une différence notoire. Ainsi, le programme de Seconde se décompose en trois parties principales :

- Exposé des motifs,
- Organisation de l'enseignement, et
- Programmes.

L'étude des deux premières parties est aussi bien valable pour la Seconde que pour la Première S. Les contenus des programmes de Seconde et de Première S étant différents, nous en ferons une étude conjointe pour mieux faire ressortir la continuité entre les deux niveaux tout en précisant ce qui relève de chaque niveau scolaire.

1.2.1 Objectifs et méthodes pédagogiques généraux du programme de mathématiques

L'enseignement des mathématiques dans les classes de Seconde et de Première scientifique se caractérise par une volonté d'offrir une éducation mathématique solide, et plus généralement de développer un esprit scientifique, à la population la plus large possible. Les programmes soulignent en effet que la classe de Seconde est avant tout une section "à détermination", le programme doit donc s'adresser à tous les élèves et ne pas favoriser, une catégorie d'élèves plus scientifiques ; de même les sections scientifiques de Première et Terminale se caractérisent "par une politique d'ouverture", la perspective en Première S étant "celle d'une classe d'orientation et non d'une classe préparant de manière privilégiée à la Terminale C" (Programmes des Premières et Terminales).

Pour atteindre ces objectifs qui apparaissent à la fois ambitieux et peut-être de premier abord contradictoires, les programmes se proposent :

- d'insister sur l'activité de résolution de problèmes, (d'ailleurs dans cet objectifs, une nouvelle rubrique a été créée, la rubrique des travaux pratiques),
- de renforcer les objectifs d'acquisition de méthodes (les méthodes sont ici à prendre dans le sens de savoir-faire par opposition au savoir),
- de limiter le cadre conceptuel et technique, au profit d'une meilleure solidité sur les points essentiels ; c'est ainsi que "le programme s'en tient à un cadre et un vocabulaire théoriques modestes, mais suffisamment efficaces pour l'étude des situations usuelles et assez riches pour servir de support à une formation mathématique solide" (programmes de Premières et Terminales),
- de développer conjointement et progressivement les capacités d'expérimentation et de raisonnement, d'imagination et d'analyse critique, (allusion très nette nous semble t-il à une éducation scientifique basée sur le réel et démarrant sur l'intuition)
- de promouvoir une vision unitaire des mathématiques en exploitant les interactions entre les différentes disciplines et entre les mathématiques et les autres disciplines"

Les méthodes exposées ici, expriment déjà, nous semble-t-il, le souci de baser de l'enseignement des mathématiques sur une pédagogie moderne mieux en accord avec le développement cognitif supposé de l'élève soit, centrée sur une approche concrète et intuitive des notions à installer dans le but d'en promouvoir l'acquisition du sens. Cet enseignement ne se doit pas alors de favoriser l'acquisition des savoir-faire tout autant que des savoirs. La vision unitaire des mathématiques, quant à elle, vise d'après nous à un double but, celui de promouvoir une vision moderne de la discipline mais aussi celui d'éveiller l'intérêt des élèves devant l'utilité et l'applicabilité des mathématiques dans des domaines divers.

Enfin, dans le cadre de cette vision moderne à la fois de l'enseignement des mathématiques et des mathématiques elles-mêmes, les programmes soulignent l'intérêt de solliciter dans les différentes disciplines mathématiques certains registres, cadres et outils. Il s'agit particulièrement du registre graphique, du cadre numérique et des outils que représentent la calculatrice et l'informatique. Leur intérêt réside, d'après les auteurs, dans leurs caractéristiques spécifiques qui leur confèrent à la fois la possibilité d'être exploités dans les différents domaines mathématiques et de ce fait d'éclairer le lien entre-eux, et leur donnent une finalité pédagogique certaine dans le cadre des objectifs généraux souhaités par les programmes. A leur propos, nous lisons :

- Les **représentations graphiques**, permettent "**de donner un contenu intuitif et concret** aux objets mathématiques étudiés dans les différentes parties du programme", aussi "on développera plus généralement **une vision géométrique des problèmes**, notamment en analyse, car la géométrie met au service de l'intuition et de l'imagination son langage et ses procédés" (en gras dans le texte).

- les problèmes et méthodes numériques, "jouent un rôle essentiel dans la compréhension de nombreuses notions mathématiques (...) et permettent aussi d'entraîner les élèves à **combiner l'expérimentation et le raisonnement"** ,
- la calculatrice et l'informatique sont des outils liés. Ainsi, la calculatrice permet "non seulement d'effectuer des calculs, mais aussi **de contrôler des résultats, d'alimenter le travail de recherche et de favoriser une bonne approche de l'informatique** notamment par l'entraînement à la programmation .

Il nous semble que cet accent placé sur le rôle réservé à certains cadres et registres (rappelons que nous avons traduit le recours à la calculatrice et à l'informatique en termes de cadres et registres dans notre chapitre II) dans les activités mathématiques, n'est pas sans rapprochement avec notre problématique du point de vue du sens qu'ils peuvent induire dans la construction des notions. Par ailleurs, notre attention est attirée par l'allusion fréquente faite à l'objet fonction en tant qu'objet qui se prête facilement à de nombreuses représentations et de part sa présence naturelle dans bien des disciplines non mathématiques. Concernant plus particulièrement, la place réservée à l'usage de la calculatrice et, de l'informatique, il nous faut souligner ici que même si l'utilisation de l'informatique est encouragée, aucune capacité n'est exigible des élèves alors que le champ des compétences liées à la calculatrice est également assez limité. Nous reviendrons aux directives des programmes concernant leur utilisation respective lors de l'analyse des contenus des programmes relatifs à l'objet fonction.

1.2.2 L'organisation de l'enseignement

L'enseignement organisé sur trois axes, activités de résolution de problème et d'étude de situations, cours, travaux à effectuer par les élèves, s'inscrit en conformité avec les directives pédagogiques générales relevées dans le paragraphe précédent :

- **Les activités de résolution de problèmes et d'étude de situations**, doivent autant que possible, servir de point de départ pour la mise en place de contenus nouveaux ;
- **Le cours** est alors, aussi souvent que possible, la synthèse brève, de ces activités réalisées au préalable. Cette synthèse portera sur "les quelques notions, résultats et outils de base que les élèves doivent connaître et savoir utiliser, mais aussi sur les méthodes de résolution de problèmes qui les mettent en jeu";
- **La résolution d'exercices et de problèmes** joue "un rôle central dans les travaux proposés aux élèves". Nous distinguons en particulier, la résolutions d'exercices d'entraînement, qui permet à

l'élève d'affermir ses connaissances de bases, et l'étude de situations plus complexes où l'élèves est amené à évaluer ces capacités et à mobiliser ces connaissances dans des secteurs variés.

L'activité de résolution de problèmes est donc vue, aussi bien en Seconde qu'en Première, et en accord avec la pédagogie moderne adoptée au niveau scolaire, comme point de départ des contenus mathématiques nouveaux. Cela confirme la volonté des auteurs des programmes de présenter ces contenus en mettant l'accent sur leur aspect intuitif ainsi qu'en leur donnant du sens en les rattachant au réel (à l'aide éventuellement des problèmes et situations qui leur ont donné naissance). Les problèmes par ailleurs, servent de support aux nouveaux concepts tant selon leur aspect «outil » que selon leur aspect « objet », c'est ainsi que nous sommes tentée d'interpréter la description de la synthèse constituant le cours. L'activité des résolution de problème, sert également à approfondir ou complexifier les connaissances de l'élève dans le cadre de son travail personnel.

1.2.3 Les contenus dans l'enseignement de la fonction en Seconde et Première

Les différentes parties se rapportant au contenus du programme de Seconde sont présentées en quatre sections ; il s'agit dans l'ordre des "Problèmes numériques et algébriques", des "Fonctions", de la "Statistique" et enfin, de la "Géométrie". En Première, elles sont présentées en trois sections : "Algèbre, Probabilités", "Suites et fonctions numériques", et "Géométrie". Nous nous limiterons ici, aux différentes sections et parties de sections qui concernent les fonctions soit les sections "Fonctions" bien sûr mais aussi la section "Problèmes numériques et algébriques" pour la classe de Seconde et les sections "Algèbre, Probabilités" et "Fonctions et Suites numériques" pour les classes de Premières.

Chacune de ces sections présente, aussi bien dans le programme de Seconde que dans celui de Première, la même mise en page. D'abord en bandeau, sont précisés les grands objectifs du domaine mathématique concerné. Ensuite, dans un texte en deux colonnes apparaissent, dans la colonne de gauche, les "connaissances et savoir-faire de base prévus par le programme", dans la colonne de droite "le sens ou les limites à donner à certains points du programme et [cette colonne] repère le cas échéant l'interaction du sujet étudié avec d'autres". Enfin, chaque section se termine par un paragraphe réservé aux travaux pratiques, également présenté sur deux colonnes : à gauche, est fixé "le champ des problèmes et techniques que les élèves ont à étudier ; à droite, on fournit "des repères pour le niveau d'approfondissement de cette étude".

Les fonctions dans le cadre de l'étude de l'algèbre

Nous pouvons déjà constater la place de choix réservée aux fonctions dans cette section. Il est déjà fait allusion aux fonctions dans la partie en bandeau qui coïncide d'ailleurs pour les classes de Seconde et de Première. L'étude du nouvel objet fonction, en classe de 2nde, doit permettre, certainement, de renouveler les cadres numérique et algébrique installés au collège en proposant de nouveaux problèmes mettant justement en jeu les fonctions et plus généralement de donner du sens aux activités algébriques. Mais en retour les cadres numérique et algébrique doivent servir à "amener les élèves à une meilleure maîtrise de l'emploi de variables". Différents types de travaux numériques et algébriques sont alors proposés, en Seconde, dans ce but : "substitution de nombres à des variables (utilisation d'expressions littérales pour des calculs numériques, tableaux de valeurs de fonctions, ...), mise en équation de problèmes et description de phénomènes continus à l'aide de fonctions". Cette notion de variable est considérée comme un acquis en Première puisque ce terme n'est pas mentionné dans le texte des programmes. L'acquisition de cette notion sera probablement cependant à consolider dans cette classe, tout comme, plus généralement, les autres acquis de la classe de Seconde.

De façon, plus spécifique pour chaque classe:

En seconde : le programme, préconise d'utiliser les fonctions en s'appuyant sur le registre graphique et sur la notion de variations de fonction afin d'étudier les inégalités et les inéquations, et propose quelques exemples. Ainsi, l'étude du signe de ax + b et le passage au carré, à l'inverse, à la racine carrée est à relier "à l'étude des fonctions et à leur représentation graphique : on pourra ainsi interpréter le signe de ax + b, la comparaison de a et de a^2, ou encore les opérations simples sur les inégalités ; par exemple, le fait que si 0 < a   b alors 0 < 1/b   1/a est à rapprocher de la décroissance de la fonction x → 1/x sur]0, + [et de l'allure de sa représentation graphique". Il s'agit donc bien ici, d'utilisation de la fonction, plus particulièrement du signe de la fonction ou des variations de la fonctions, selon son statut outil dans le cadre algébrique. Cette utilisation de la fonction est également souhaitée en Première pour la résolution d'équations et inéquations à une inconnue.

En première : Les objets d'enseignement "polynômes du second degré" et "fonctions polynômes" relèvent du programme de Première, et s'inscrivent dans le cadre général de l'algèbre. Ces deux objets d'enseignements ne sont pas à appréhender ici dans le cadre fonctionnel, à l'exception des fonctions du second degré pour lesquelles les résultats algébriques relatifs aux polynômes du second degré sont à appliquer à l'étude de la fonction (symétrie, variations, signes). Une nouvelle technique d'étude des fonctions du second degré est ainsi mise en place en Première relativement aux techniques d'études des fonctions usuelles en classe de Seconde qui seront présentées dans la section du programme réservée aux fonctions.

Nous constatons ici une interaction souhaitée entre les cadres algébriques et fonctionnels : tantôt la fonction est un outil à exploiter dans le cadre algébrique à travers la notion de variation et, les possibilités offertes par la représentation graphique de fonctions, qui permettent de donner du sens aux études des inégalités et de résolutions d'équations et d'inéquations. Tantôt les cadres et registres algébriques sont exploités dans l'étude de fonction, sous la forme, par exemple, d'une technique *algébrique d'étude des fonctions du second degré. De façon plus générale également, l'interaction entre les cadres algébrique et fonctionnel vise à favoriser la distinction entre la notion d'inconnue et de variable.*

Les fonctions en Seconde et en Première

Le programme de Seconde concernant les fonctions, comporte deux objectifs principaux :

- "Familiariser les élèves avec la description de phénomènes continus à l'aide de fonctions,
- Acquérir une bonne maîtrise des fonctions usuelles indiquées dans le programme et un certain savoir-faire (...) pour l'étude des fonctions qui s'en déduisent simplement".

Ce deuxième objectif est également le deuxième objectif visés en classe de Première avec une différence subtile néanmoins: alors que les autres fonctions à étudier en Seconde doivent se "déduire simplement" de celles indiquées dans le programme, les autres fonctions de Première sont celles qui sont construites à partir de celles-là "par des opérations simples". Nous nous attacherons, dans la suite, à éclaircir ce que recouvre cette différence notoire entre les deux niveaux scolaires.

Le premier objectif proposé en Premières, est l'exploitation de la dérivation, pour l'étude locale et globale des fonctions. Par l'introduction de la dérivation, un environnement technologique nouveau justifiant des techniques nouvelles est donc mis à disposition des élèves pour l'étude des fonctions.

Quant aux phénomènes continus, les élèves déjà familiarisés avec leur description à l'aide de fonctions depuis la Seconde, poursuivront leur étude en Première à travers la résolution de problèmes que nous avons appelés situations fonctionnelles dans notre chapitre II. L'activité de résolution de problèmes relativement à l'objet fonction aura alors probablement davantage un rôle d'entraînement et d'approfondissement des connaissances.

a) Comment définir la fonction ?

Il est clairement indiqué, pour les deux niveaux scolaires, que "le programme se place dans le cadre **des fonctions définies sur un intervalle**", et aussi qu'il n'y a pas lieu d'effectuer "un exposé général sur les fonctions (statut mathématique du concept de fonction, notion d'ensemble de définition, opérations algébriques, composition, relation d'ordre, restriction,...)". De façon générale, on s'aperçoit à la lecture des deux programmes, que celui des Premières ne se différencie pas du programme de Seconde par des exigences plus grandes sur le plan théorique.

Ainsi, il n'est proposé ni en Seconde, ni même en Première de définition générale du concept de fonction. Ce concept n'est, en particulier, pas à relier avec celui de relation. De plus ce sont principalement les fonctions continues sur un intervalle qui vont être étudiées. Les fonctions non numériques ou numériques mais discrètes sont alors hors programme. Il nous faudra voir *comment cette directive est mise en application dans les manuels que nous avons retenus. Ceux-ci proposent-ils ou non une définition du concept de fonction ? Si, oui, laquelle ? Ne concerne-t-elle également que les fonctions continues sur un intervalle ?*

Les fonctions sont d'abord introduites, en Seconde, **à partir d'exemples**, et il est recommandé **de varier autant que possible les moyens de les obtenir**. Dans le paragraphe sous-titré "Génération et description des fonctions" du programme de Seconde, les premières tâches recommandées sont celles de "reconnaissance de fonctions". L'élève doit pouvoir reconnaître une fonction (soit reconnaître "une loi fonctionnelle" quand elle existe, mais aussi les éléments, ou variables, ou quantités, liés par cette loi) quel que soit le registre ou le cadre choisi pour la représenter. Ainsi, peut-on interpréter le recours à "des situations variées : tracés graphiques, touches de la calculatrice, algorithmes de calcul ...". Les situations fonctionnelles ont particulièrement leur place ici puisqu'il faut pouvoir reconnaître une fonction décrite par des "... relations de dépendances issues de la géométrie, de la mécanique, des sciences physiques et biologiques, de la vie économique et sociale". Mais, précise le programme, la majeure partie des fonctions étudiées en Seconde, "sont définies par des formules algébriques simples". Les auteurs du programme semblent être conscients de la restriction que peut provoquer la limitation aux fonctions algébriques, du concept de fonction qui risque d'en découler chez les élèves, d'où en commentaire : "Pour que les élèves se forment une idée assez large de la notion de fonction, on donnera quelques exemples de situations menant à des fonctions définies différemment".

En l'absence, d'une définition formelle de la fonction, cette multiplication des moyens ou processus permettant d'obtenir une fonction peuvent viser l'objectif implicite de promouvoir l'acquisition de la notion de fonction en tant que processus.

b) Les fonctions en Seconde

Notions liées à la fonction

Les notions liées à la fonction à mettre en place en Seconde sont celles de parité, périodicité, signe, maximum, minimum, fonction croissante, décroissante. Elle doivent "être mises en place uniquement sur des exemples;" de plus, il est conseillé de "mettre en valeur leur signification graphique". On peut placer, à ce niveau, les exemples proposés, en travaux pratiques, de fonctions issues de situations non - mathématiques, pour lesquels le programme demande de s'attacher "à mettre en évidence, ..., la signification des propriétés des fonctions concernées (croissance, maximums et minimums, parité, ...)".

Ainsi, si les toutes premières rencontres avec l'objet fonction semblent avoir pour objectif l'appréhension de la fonction en tant que processus, il nous semble que l'accent placé sur les *notions de variations (croissance, décroissance) et d'extremum (maximum, minimum) à travers une forte sollicitation du registre graphique, encourage une appréhension de la fonction en tant que loi de variation. Le poids respectif à donner à ces deux modes d'appréhension de la fonction ne nous apparaît pas très explicite.*

Le cadre théorique est à limiter tant en ce qui concerne la notion générale de fonction qu'en ce qui concerne les différentes propriétés et attributs de la fonction à étudier en classe de 2nde, et au moins, lors de la première rencontre avec ces notions. Si l'environnement technique et technologique pour la réalisation des différentes tâches relatives à l'étude des fonctions au début de son enseignement n'est pas amplement précisé, nous pouvons supposer que la reconnaissance d'une fonction et des différentes notions, relatives à la fonction, doivent s'accorder, en l'absence de définitions formelles, aux cadres et registres dans lesquelles les fonctions et les notions qui lui sont liées sont données à voir. L'analyse du manuel de Seconde, nous éclairera sur ce qui aura été retenu par les auteurs en termes de technologies et techniques.

A propos de la diversité des cadres et registres : les différents cadres offerts part les problèmes de type situations fonctionnelles et surtout le registre graphique sont ceux sur lesquels l'accent est mis en priorité. Ceci sans aucun doute, est à relier à la volonté de limiter le cadre théorique et de promouvoir l'aspect intuitif et concret des nouvelles notions à installer. Il recourt au registre algébrique, plus particulièrement, permet également de réduire dans un premier temps une trop grande technicité algébrique. Cependant il nous faut souligner une référence faible à l'utilisation d'autres registres ou cadres que ceux ci-dessus mentionnés, en particulier il n'y a pas de référence explicite au cadre numérique, alors que la calculatrice est mentionnée par les termes "touche de la calculatrice" en tant que moyen parmi d'autres de générer des fonctions. Enfin, concernant la calculatrice programmable, il est proposé, dans la rubrique des travaux pratiques, de réaliser des exemples simples de programmation de valeurs d'une fonction. Il n'y a dans le texte du programme de Seconde, aucune allusion spécifique à l'usage de l'informatique.

Etude des fonctions usuelles en Seconde

Parallèlement ou consécutivement à cette mise en place du concept de fonction et des notions qui lui sont liées à travers des exemples, une étude des fonctions, plus formelle ou plus classique, est également entreprise en Seconde, comme l'indique le paragraphe sous-titré "Fonctions usuelles". Celui-ci porte, bien sûr, sur les fonctions de référence à connaître en Seconde : les fonctions affines, valeur absolue, carré et racine carrée, cube et inverse, et celles "qui s'en déduisent de façon simple". Parmi les fonctions trigonométriques, pour lesquelles "une simple prise de contact est demandée" seules les fonctions cosinus et sinus sont au programme.

C'est essentiellement le "comportement" de ces fonctions qui doit être étudié. Ce qui est entendu par comportement se précise dans la rubrique de Travaux Pratiques : "exemples simples d'étude de comportements de fonctions tels que : signe, variations, recherche de maximums et de minimums, représentations graphiques dans un repère". Soulignons que dans le cadre de l'étude des fonctions usuelles, la représentation graphique devient objet d'enseignement et n'est plus un support intuitif pour l'installation des différentes notions en jeu.

Mais comment étudier ces comportements ? Par quels moyens ? De plus, quelles sont exactement, les fonctions qui se déduisent simplement des fonctions de référence et comment les étudier ? Quelques exemples de telles fonctions sont donnés, en commentaire, dans la rubrique de Travaux Pratiques. Ce sont des fonctions telles que "$f(x) = 2x^2 + 1$; $f(x) = (x - 1)^2$; $f(x) = 2/(x+1)$; $f(x) = 1/(x^2 + 1)$; $f(x) = x (1 - x)$; $f(x) = \sin 2x$". Puisque l'enseignement des opérations (algébriques, géométriques, ..) n'est prévu qu'en Première, il semble qu'en Seconde, les fonctions autres que les fonctions de référence sont celles qui s'en déduisent par des changements d'origine ou de repère simples. Il est d'ailleurs fait allusion aux changements d'origine ou de repère même s'il est précisé d'exclure tout exposé général sur ce point.

Pour étudier leur comportement, la méthode avancée par le programme est "les méthodes employées pour l'étude des fonctions usuelles, … toutes indications utiles étant fournies". Mais quelles sont justement ces méthodes employées pour l'étude des fonctions usuelles ? Elles ne sont aucunement précisées dans le programme. S'agit-il de méthodes algébriques ? Graphiques ? Ou autre ? **Le programme sur les fonctions apparaît quelque peu lacunaire au niveau de la présentation de l'environnement technique et technologique !**

Puisque le programme précise que les variations et les représentations graphiques des fonctions de référence, elles-mêmes données dans le registre algébrique, sont des objectifs de l'enseignement de la fonction en Seconde, nous en déduisons que ces méthodes d'étude de fonctions sont algébriques pour les fonctions de référence. Elles pourraient être ensuite graphiques, voire relatives au tableau de variation, pour les fonctions qui "s'en déduisent simplement", en s'appuyant sur le fait qu'elles peuvent êtres déduites par des opérations de changements d'origine ou de repère. Alors, les tâches concernant le comportement et la représentation graphique des fonctions de référence pourraient certes ne se justifier que dans le registre algébrique. Mais, les techniques associées à la réalisation de ces mêmes tâches sur les autres fonctions à étudier en classe de Seconde pourraient très bien se concevoir dans le registre graphique, ou du tableau de variations après institutionnalisation des représentations graphiques des fonctions de référence, situation qui s'accorderait avec la volonté de mettre en valeur des registres autres que le registre algébrique. Il se pourrait par contre que le registre algébrique soit le seul admis comme valable pour toute justification du comportement d'une fonction donnée. La porte est donc ouverte aux interprétations des auteurs de manuels quant à la mise en œuvre des tâches et techniques associées pour l'étude des fonctions usuelles en classe de Seconde. Nous verrons quel choix aura été retenu par les auteurs du manuel que nous avons choisi.

c) Les fonctions en Première

Le programme de Première propose, lui, relativement peu de nouvelles notions à mettre en place (rappelons que dans notre analyse des programmes nous avons écarté la dérivation en tant que telle et la notion de limite). La nouveauté se situe davantage sur les techniques nouvelles présentées pour l'étude des fonctions ainsi que sur les fonctions elles-mêmes, plus complexes que celles étudiées en Seconde, d'après les quelques exemples proposés dans la rubrique des travaux pratiques du programme de Première: $f(x) = ax^2 + bx + c$, $f(x) = (ax + b) / (cx + d)$, $f(x) = rac (ax + b)$, $f(x)=cos (wx + f)$.

De façon générale les fonctions doivent être étudiées en Première en s'appuyant "conjointement sur les interprétations graphiques (...), cinématiques (...) et électriques (...)". Nous retrouvons là, la même volonté de s'appuyer sur l'aspect intuitif et concret des notions à l'aide de représentations dans différents cadres et registres.

Les notions de parité, maximum, minimum, monotonie déjà mises en place en Seconde ne sont pas à revoir de façon plus formelle en Première. Elles seront davantage à approfondir et à mettre en œuvre dans l'étude de nouvelles situations fonctionnelles et de fonctions plus complexes. Les nouveaux concepts de Première sont essentiellement les concepts d'opérations algébriques sur les fonctions, de composition de fonction, et ceux liés à la comparaison de fonctions.

Les opérations sur les fonctions

Le programme des Premières est loin d'être très explicite sur les moyens d'introduire ces notions nouvelles :" les activités sur les fonctions conduisent à introduire les notations $f = g$, λf, $f+g$, fg, gof, f 0, f g" ; les programmes se contentent de préciser qu'une approche formelle de ces fonctions est à éviter.

Cependant l'opération de composition bénéficie de précisions supplémentaires quant à ce que doit recouvrir leur enseignement : "les élèves doivent connaître et savoir utiliser les règles donnant le sens de variation d'une fonction composée de deux fonctions monotones". Il nous apparaît donc que l'opération de composition, en particulier, est visée pour une grande part selon son statut outil dans le cadre d'une nouvelle technique d'étude des variations de fonctions. La même approche est suggérée pour les transformations géométriques quoique cet objet d'enseignement n'apparaisse que dans la rubrique des travaux pratiques et ne soit donc pas obligatoire : "des exemples simples d'obtention de la représentation graphique de fonctions telles que f + a ; f(x+ a) ; f(a x) et | f | à partir d'une fonction f (peuvent être étudiés)". (...) "tout exposé général est exclu". Les transformations apparaissent être essentiellement envisagées selon leur statut outil, dans le cadre de techniques d'obtention de représentation graphiques de fonctions.

Mais la précision apportée sur l'approche à envisager pour installer l'opération de composition et les opérations géométriques nous semble contraster avec le peu d'indication apporté quant à l'installation des opérations algébriques de fonctions. Si elles ne doivent pas être vues de façon formelle, comment doivent-elles être envisagées, en tant qu'outil lié à la détermination des variations de fonctions comme pour la composition ? Doit-on les envisager sur un plan intuitif dans le registre graphique ou dans le cadre numérique ? N'oublions pas qu'il s'agit de notions incontournables dès les débuts de l'enseignement sur l'analyse avec la mise en place de l'algèbre des limites. Nous serons attentive à l'interprétation qu'en donneront les auteurs du manuel que nous avons retenu.

Applications de la dérivation à l'étude des fonctions

La nouveauté essentielle en Première, soit le cadre technologique constitué par l'application de la dérivation à l'étude de fonction, est mis à disposition des élèves sous la forme d'un ensemble de définitions et de théorèmes à admettre et à utiliser pour l'étude des variations de fonctions, la recherche d'extremum et aussi l'établissement de la propriété de bijection de la fonction. Soulignons ici que la bijection n'est introduite en Première que selon son statut outil pour établir l'existence d'une solution à l'équation $f(x) = \lambda$. D'ailleurs, plus tôt dans les programmes de Premières et Terminales, il est déjà stipulé que : "la notion de bijection est introduite à propos de l'étude des transformations (...) et des équations de la forme $f(x) = \lambda$". La place de la définition de la bijection n'est cependant pas précisée.

La dérivation offre alors un nouvel environnement technologique, environnement qui sera amené à occuper la place des environnements technologiques précédents par son efficacité et son applicabilité à toutes les fonctions à connaître au lycée. Mais alors se pose la question de l'intérêt des différentes techniques et technologies mises en place en Seconde pour l'étude des fonctions en Seconde et au début de la Première. L'élève disposera-t-il de la liberté d'utiliser les techniques qui lui semblent les plus adéquates à la résolution d'une question donnée ou sera-t-il, par contrat, dans l'obligation de se ramener à la dérivation ? Leur intérêt réside-t-il essentiellement dans le fait qu'elles permettent l'étude de la fonction en tant que loi de variation alors que justement les théorèmes liés à la dérivation ne sont pas encore disponibles pour les élèves ? Peut-être sont-elles présentées, et ceci particulièrement pour les opérations algébriques et de composition, dans le but de leur applicabilité à l'étude des limites et des techniques algébriques de dérivation ? Ou bien encore le programme vise-t-il à travers leur enseignement à promouvoir l'appropriation de la fonction en tant qu'objet ?

A propos de la diversité des cadres et registres en Première, et de l'utilisation des outils technologiques

Le programme ne fait de référence explicite qu'aux seuls registres algébrique et graphique, alors que les cadres en jeu sont principalement, comme en Seconde, ceux impliqués comme cadres d'origines dans les situations fonctionnelles. Il n'y a pas de référence explicite au cadre numérique ou à l'usage de la calculatrice, mais *la programmation des valeurs d'une fonction d'une variable* est une compétence exigible en Première. L'usage de l'informatique n'est pas plus amplement détaillé à l'intérieur des programmes et il se limite donc à la référence générale que nous avons soulignée dans la première partie de notre analyse des programmes. La place réservée à la calculatrice (programmable) et à l'informatique dans l'enseignement dépendra fortement des choix du manuel retenu pour la classe, et des inclinations personnelles de l'enseignant.

1.3 Pour conclure

Il ressort de l'analyse du programme concernant les fonctions que la première rencontre avec le concept de fonction et les notions relatives aux fonctions visées en classe de Seconde (variable, variation, maximum, minimum, parité, périodicité), doit se faire de manière concrète et intuitive en insistant sur la diversité des cadres et des registres pour les représenter. Cette approche vise à favoriser l'appréhension de la fonction selon son double aspect de processus et de loi de variation, en l'absence de définition formelle du concept de fonction. Ici, l'activité de résolution de problèmes, conjointement à cette diversité des cadres et registres, est fortement encouragée pour la familiarisation avec la notion nouvelle. A cette approche intuitive et concrète succède une approche plus formelle à travers l'étude des fonctions de référence privilégiant les registres algébrique et graphique. L'environnement technique et technologique relatifs à l'étude des fonctions usuelles autres que les fonctions de référence nous apparaît quelque peu lacunaire.

Par ailleurs si les registres à privilégier apparaissent être les registres graphiques et algébriques, peu de précision est donnée concernant l'équilibre à installer entre ces deux registres. L'environnement technique et technologique pour l'étude des fonctions est plus précis en Première notamment après l'étude de la dérivation. Le statut des deux registres algébrique et graphique est également mieux défini dans cette classe : puisque la représentation graphique d'une fonction est à justifier, le registre graphique servira davantage à établir des conjectures que seul le registre algébrique peut justifier.
Les nouvelles notions liées à l'enseignement de la fonction en Première, celles d'opérations algébriques, de composition, de transformations et de comparaison de fonction ne doivent pas être abordées de façon formelle. En effet, si le programme insiste sur une présentation des transformations et de la composition privilégiant leur aspect outil à travers leur implication dans des tâches de détermination des variations de fonction, ou de représentation graphique de fonction

(obtenu par transformation géométrique), il nous apparaît quelque peu lacunaires sur les méthodes de présentations des autres opérations au programme de Premières.

D'un autre côté, l'accent mis sur l'attribut de variation dans l'étude des fonctions en Seconde, se confirme dans le nouvel environnement technologique lié à la dérivation proposé en Première . Dans ce cadre, la fonction est, en Première, essentiellement envisagée en tant que loi de variation. Par ailleurs, la fonction est impliquée en Seconde et en Première selon son statut outil, à travers son utilisation dans les résolutions d'équations (d'inéquations), les questions d'existence de solutions et l'étude de situations fonctionnelles, son implication selon son statut objet, se dégage quoique timidement en Première à travers notamment les opérations (prises au sens large) de fonctions.

Cependant la restriction des fonctions aux seules fonctions continues sur un intervalle et exprimables principalement sous forme algébrique, aussi bien en Seconde qu'en Première, ne risque-t-elle pas de constituer un obstacle pour la mise en place ultérieure d'un concept plus général de la fonction ?

2. Analyse du manuel de Seconde

2.1 Organisation de l'analyse des manuels et description générale du manuel de Seconde

Organisation de l'analyse des manuels

Pour analyser chacun des deux manuels de Seconde et de Première, nous procédons chapitre par chapitre en faisant se succéder l'analyse du cours et l'analyse des exercices/problèmes. En effet, pour se faire une idée complète de l'organisation praxéologique, on ne pourrait se limiter à la partie cours ou à la partie exercices, l'interaction de ces deux parties nous semble devoir impérativement être prise en compte. Nous nous limitons, bien sûr aux chapitres qui concernent notre étude et respectons leur ordre d'apparition dans le manuel ; ce qui permet de tenir compte de la progression de l'enseignement sur les fonctions tel que souhaité par les auteurs des manuels.

L'analyse du cours se base sur une lecture approfondie de la partie cours de chaque chapitre. Elle doit permettre de mettre en évidence les notions à enseigner dans le chapitre, tant au niveau technologique (définitions, théorèmes) qu'au niveau technique (méthodes de résolution). Dans ce but, nous présentons la structure globale de chaque chapitre à l'aide d'un organigramme en nous inspirant de celui utilisé par Tavignot et repris par Alves Dias dans leurs thèses respectives (Tavignot, 1991) et (Alves Dias, 1998). Nous essayerons de faire ressortir, quand ils apparaissent, les cadres et registres associés ainsi que le statut outil/objet des différentes notions enseignées afin de pointer l'équilibre écologique installé dans l'organisation praxéologique, entre les cadres et registres et le statut outil/objet lié à la manipulation des concepts mathématiques.

L'étude du cours donne, classiquement, une idée de ce qui est pris en charge par le professeur, l'analyse des exercices à l'aide de la grille d'analyse établie au chapitre II, nous permettra de voir comment cette organisation côté professeur, est mise en application côté élève, en termes de tâches à réaliser. Tout au long de l'analyse ainsi que dans les synthèses qui jalonneront notre travail, nous serons attentive à la prise en compte des directives des programmes par les auteurs des manuels ainsi qu'à la cohésion d'ensemble entre l'organisation du cours et son application à travers les exercices/problèmes dans les deux manuels étudiés. Enfin, côté palestinien, c'est à travers l'analyse des manuels que nous tenterons de dégager la philosophie générale d'enseignement.

Tout au long de l'analyse des manuels, il ne faudra pas oublier que le professeur dispose d'une certaine marge de manœuvre. Il peut s'inspirer du manuel sans le suivre exactement. Il peut également modifier les exercices et intervenir pour lever des implicites, prendre en charge certaines des parties apparemment laissées à la charge des élèves ou au contraire supprimer certaines des indications. Nous analysons donc les cours et les exercices des manuels sachant qu'ils ne reflètent pas nécessairement le cours enseigné.

Nous utilisons le plus petit caractère pour décrire le contenu du manuel et le caractère normal pour le commentaire et les analyses.

Description générale du manuel de Seconde

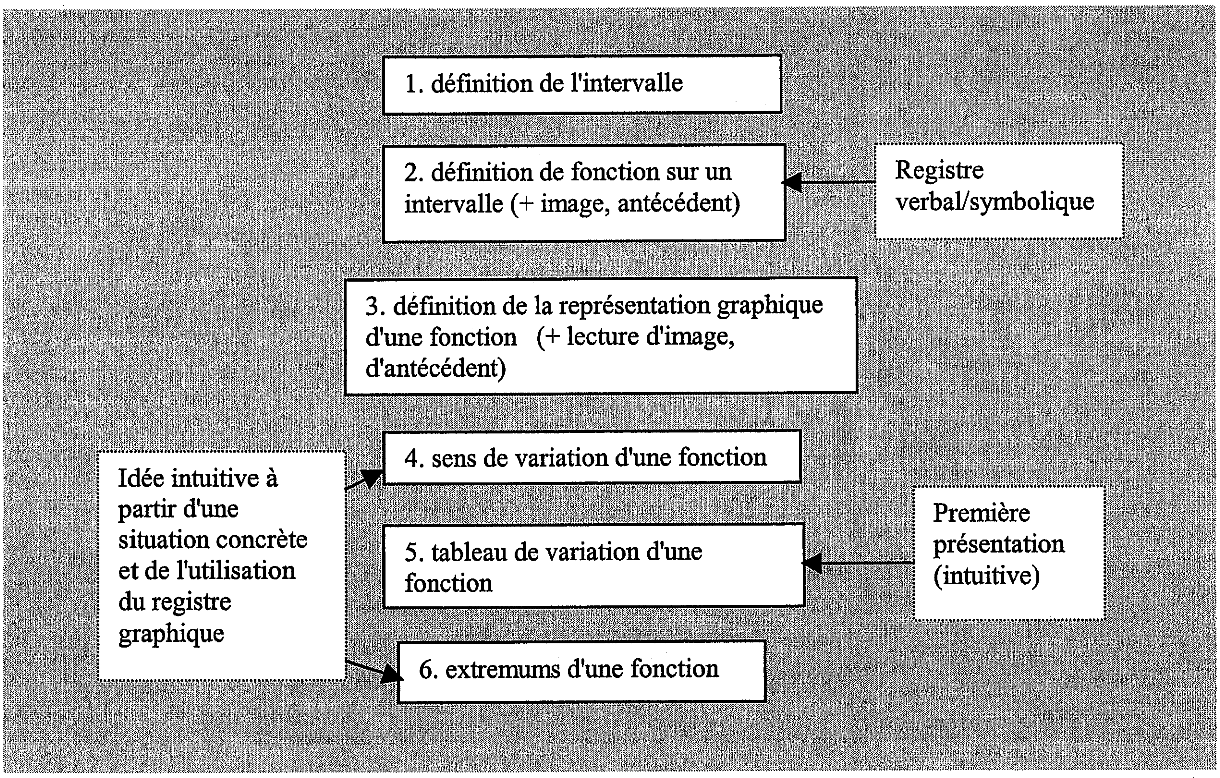
Nous avons retenu le manuel de mathématiques "Dimathème Seconde", des éditions Didier, 1994. Le Dimathème est, au moins pour la période qui nous concerne, un manuel largement utilisé au niveau de la Seconde et de difficulté moyenne, qui nous est donc apparu comme suffisamment représentatif des choix d'enseignement possibles. C'est celui qu'utilisait le professeur de la classe de Seconde que nous avions observé lors de notre D.E.A. Quatre chapitres portent entièrement sur les fonctions, ils concernent directement notre étude : le chapitre 1, "Vers la notion de fonction", le chapitre 4, "Fonctions affines"; le chapitre 6, "Fonctions classiques"; et le chapitre 7, "Fonctions trigonométriques". A ces quatre chapitres nous avons ajouté, la partie des chapitres 3 d'algèbre ("encadrements") relative à la fonction valeur absolue.

Chacun des chapitres se décompose en quatre parties principales. La première propose des activités qui "sont conçues pour rafraîchir les connaissances des élèves et pour préparer le cours. Elles sont courtes et ont le plus souvent un objectif très précis". La deuxième intitulée "Information" est le cours proprement dit. Il est réduit et présente les résultats les plus importants à retenir ainsi que des exemples. Cette partie se termine souvent par des exercices rédigés, qui eux présentent "les savoir-faire les plus classiques". Arrive ensuite, la partie "travaux pratiques" qui propose des exercices ou problèmes de difficulté variable. Il peut s'agir d' "appliquer les connaissances de base, ..., de démontrer certains résultats du cours ou de réfléchir sur les démarches et pratiques". Enfin, la dernière partie "Exercices", propose des exercices nombreux et variés que l'on peut distinguer en deux catégories principales : les exercices d'application immédiate, et ceux qui demandent davantage de réflexion.

Le cours se présente sous forme d'une succession de sections numérotées. Chaque section introduisant une notion principale, et éventuellement quelques notions plus ou moins directement liées, peut être ou non composée de plusieurs paragraphes. Les résultats principaux apparaissent sur fond vert clair, certains portent la mention "définition" ou "propriétés", parfois aucune mention n'est portée, il peut s'agir alors soit d'une définition, d'une propriété ou encore d'un théorème. Notons que le terme de théorème n'apparaît nulle part dans le manuel.

2.2 Description et analyse du chapitre 1 : "Vers la notion de fonction"

2.2.1 Organigramme du cours



2.2.2 Description, commentaire et analyse du cours

Le titre choisi "vers la notion de fonction", indique bien qu'il s'agit d'une première rencontre avec la fonction. Ceci même si les élèves de Seconde ont déjà étudié la fonction affine au collège car il s'agit maintenant de leur première rencontre avec la fonction *quelconque*.

Plusieurs objets d'enseignement sont introduits dans ce chapitre : les notions d'intervalle, de fonction, de graphique, de sens de variation, de tableau de variations d'une fonction et d'extremums d'une fonction, chacune d'entre elles faisant l'objet d'une section distincte. Aucune de ces notions n'est présentée sur fond clair ou ne porte la mention définition, exceptée celle d'intervalle par laquelle débute le chapitre.

L'objet d'enseignement : fonction

Il est rappelé à l'élève, au début du paragraphe sur les fonctions, qu'il connaît déjà la fonction affine. L'objet fonction est ainsi présenté :

"Définir une **fonction** f sur un intervalle [a; b] c'est donner un procédé qui à chaque élément x de [a; b] fait correspondre un nombre noté f(x).

On dit que x a pour **image** f(x) par la fonction f.

Si y = f(x) on dit aussi que x est un **antécédent** de y par la fonction f." (p.10)

Suivent une remarque et des exemples qui tendent à souligner que l'image est unique alors que l'antécédent ne l'est pas forcément.

D'emblée, il nous est possible de constater l'effort des auteurs quant à leurs tentatives de respecter les consignes du programme du point de vue de l'institutionnalisation de la notion de fonction : ils évitent de donner une définition formelle. Ainsi, la *caractérisation* proposée ne définit pas véritablement la notion de fonction mais exprime *comment reconnaître qu'on a affaire à une fonction.* Il s'agit d'une définition que l'on pourrait qualifier de pragmatique plutôt que de formelle ; l'utilisation du terme *procédé* renforce ce sentiment. Par ailleurs, comme le stipule le programme cette définition ne concerne que les fonctions numériques définies sur un intervalle.

Néanmoins c'est essentiellement par le biais de cette définition, que les élèves auront à appréhender la notion de fonction. **A quel mode d'appréhension de la fonction renvoie donc cette définition ?**

La restriction de cette fonction aux fonctions numériques peut faire penser à la définition de Dirichlet[8]. Cependant il nous semble que les idées de variation et de dépendance fonctionnelle sont plus explicites dans la définition de Dirichlet que dans celle du Dimathème. En effet, les termes *variable*, *variable (...) reliée*, *variable dépendante*, apparaissent effectivement dans la définition de Dirichlet alors qu'elles sont absentes de celle du Dimathème.

Par contre, nous établissons un rapprochement entre la *loi (de correspondance)* reliant une *variable* à une autre dans la définition de Dirichlet, et le *procédé* reliant un *nombre* à un autre dans la définition du Dimathème. En particulier, la référence à une règle de correspondance bien définie renvoie à une conceptualisation de la fonction moins générale que celle relevant du mode d'appréhension ensembliste où l'accent est davantage porté sur l'arbitraire de la loi puisque la *relation* n'est justement pas forcément une *règle clairement établie*.

Cependant, l'emploi du terme *procédé* qui s'explique, nous l'avons dit, par le fait que les auteurs ne

[8] pour les différentes définitions de la fonction et leur analyse en mode d'appréhension se reporter au paragraphe I.2 et aux travaux de

souhaitent pas donner là une définition formelle de la fonction, traduit également, la volonté de ne pas limiter les lois fonctionnelles aux seules lois algébriques et au seul registre algébrique. Le terme de procédé est, en effet, assez large et peut aussi bien renvoyer à l'idée d'un calcul algébrique, qu'à celui d'un procédé algorithmique, qu'à une lecture graphique, qu'à une situation fonctionnelle, qu'à l'usage des touches de la calculatrice qui permet en particulier d'accéder à des fonctions qui ne sont pas définies à partir des opérations algébriques élémentaires, etc. Il semble alors que les auteurs ont davantage voulu rattacher la notion de fonction à l'idée d'un *processus*. Ils nous apparaissent respecter, en cela, les consignes du programme, telles que nous les avons également interprétées, même si celui-ci n'utilise pas explicitement le terme de processus ou de procédé de calcul. A titre de comparaison, les nouveaux programmes de mathématiques de Seconde nous semble plus explicite quant à l'appréhension de la fonction en tant que processus : "L'approche par l'informatique ou la calculatrice permet de voir "une fonction comme un dispositif capable de produire une valeur numérique quand on introduit un nombre (c'est-à-dire comme une "boîte noire")"

Par ailleurs, comme nous l'avons précisé dans le paragraphe 3 de notre chapitre I, l'aspect *processus* de la fonction, porte en lui les germes de son appréhension comme loi de variation ; de même que l'idée de correspondance d'un nombre à un autre, également explicite dans la définition du Dimathème, peut permettre de mettre des jalons sur une conception ensembliste plus générale.

Nous avons donc une définition qui bien que visant principalement l'aspect le plus primitif de la notion de fonction, celui de processus, en accord avec une approche intuitive de l'enseignement, est formulée de façon à se réserver un espace suffisant pour des généralisations ultérieures du concept de fonction, à commencer par son appréhension en tant que loi de variation.

L'objet d'enseignement : représentation graphique

Ce paragraphe montre comment doit être interprété un graphique : où se placent les valeurs de x, de f(x) et comment lire l'image (ou l'antécédent) d'un élément donné. La "courbe représentative de f sur l'intervalle [a; b] (ou représentation graphique de f sur l'intervalle [a; b])" est définie comme étant l'ensemble des points M(x, f(x)), où x est un nombre quelconque et f(x) son image.

Cette présentation de la représentation graphique de la fonction insiste bien sur la distinction entre la fonction et sa représentation (graphique).

Par ailleurs, les précisions qu'apportent les auteurs relativement à une vision de la courbe non seulement en tant que tout, mais à travers les différents points la constituant sont à relier à la volonté de ne pas négliger l'appréhension de la fonction en tant que processus y compris à travers sa représentation graphique.

Dubinski et Sfard du chapitre I.

Enfin, le fait de consacrer un paragraphe spécifique pour présenter le graphique d'une fonction traduit le poids que les auteurs veulent donner à ce registre de représentation. Justement la suite du cours fera ressortir l'importance que prend le registre graphique puisque c'est par son intermédiaire que les autres objets d'enseignements de ce chapitre sont abordés.

L'objet d'enseignement : sens de variation

Il est précisé dans le titre du paragraphe qu'il s'agit d'en donner une idée intuitive.
Les notions de fonction décroissante (sur un intervalle), fonction croissante (sur un intervalle), et fonction constante (sur un intervalle) sont présentées dans l'ordre. Pour chacune d'elles, une même courbe est présentée deux fois, mais est commentée différemment. Le premier commentaire donne un exemple contextualisé de fonction (il s'agit d'une courbe de température à chaque fois), le deuxième interprète l'exemple de façon plus abstraite : "la fonction température est décroissante entre 2 et 14 heures" devient "la fonction est décroissante sur l'intervalle [a; b] . Plus x est grand, plus f(x) est petit".

Ainsi, la présentation intuitive de cette notion est réalisée en la rattachant à une situation concrète connue des élèves et au registre graphique. Le registre graphique s'utilise également pour passer d'une conception intuitive à une conception plus abstraite de la notion de variation.

L'objet d'enseignement : tableau de variations

Deux tableaux apparaissent, l'un (resp. l'autre) pour une fonction croissante (décroissante) sur l'intervalle [a; b], sans autre commentaire que "fonction croissante (décroissante) ...".

Ce paragraphe vise donc à présenter un registre de représentation important pour les fonctions considérées selon leur aspect variation. Le tableau de variations est ainsi présenté de manière uniquement ostensive, les élèves se doivent de comprendre pour reproduire correctement.

Cependant aucun commentaire ne précise les règles de représentation d'un tableau de variations, aucun lien explicite n'est effectué entre les deux registres graphique et du tableau de variations. Ce lien est cependant implicite dans la mesure où ce paragraphe présentant le tableau de variations succède au paragraphe présentant la lecture des variations d'une fonction dans le registre graphique, et peut suggérer au professeur la présentation des deux registres de façon plus soutenue. Ce lien est nécessaire dans la mesure où le statut du registre du tableau de variation sera celui d'outil pour consigner des résultats et servir d'intermédiaire entre le registre algébrique symbolique et le registre graphique.

L'objet d'enseignement : extremums d'une fonction

Comme pour le sens de variation, il est précisé qu'il s'agit de donner une idée intuitive : la même présentation basée sur le registre graphique, que celle du paragraphe "sens de variation" est choisie.
Les mêmes commentaires quant au rôle et au statut du registre graphique peuvent- être faits ici.

Il faut cependant souligner que les auteurs ont choisi comme base intuitive de rattacher les notions de minimum et maximum à celle de variation :

"Sur [a ; c] la fonction est croissante et sur [c ; b] la fonction est décroissante. Sur [a ; b] la fonction admet un maximum en c. Ce maximum est égal à f(c)." (p.12).

Ils ont donc choisi d'institutionnaliser l'extremum relatif même si le qualificatif de relatif n'est pas employé, conformément au programme qui précise que "les notions de maximum local ne sont pas au programme".

2.2.3 Synthèse de l'analyse du cours

Mode d'appréhension privilégié

La définition informelle de la fonction proposée dans le cours vise essentiellement son *aspect procédé de calcul* mais elle est conçue de manière à permettre d'enclencher sur une appréhension de la fonction comme loi de variation. Justement, la suite du cours qui institutionnalise les notions de variation et d'extremum et insiste particulièrement sur les registres de représentation graphique et du tableau de variation, présentés comme des objets d'enseignement, indique que l'*aspect loi de variation* sera rapidement un aspect primordial de l'enseignement de la fonction tel que conçu par ce manuel.

Méthodes pédagogiques utilisées

Le cours privilégie une approche concrète et intuitive des notions à installer : les définitions proposées dans ce premier chapitre sont informelles, et leur conception sur une base plus rigoureuse n'y est pas envisagée. Elles sont contextualisées si possible et leur présentation se base sur le registre graphique. Par opposition, mais de façon tout à fait cohérente avec les méthodes pédagogiques envisagées, le registre algébrique est largement absent de ce premier cours.

Statut privilégié du registre graphique

Le registre graphique jouit d'un statut privilégié et présente un double emploi : d'une part, il permet de visualiser les situations concrètes utilisées pour introduire les notions nouvelles, et d'autre part, il permet le passage d'une notion intuitive à une notion plus formelle.

L'accent indéniablement porté dans ce cours sur l'aspect intuitif et concret des notions à installer laisse présager d'une organisation des exercices et problèmes de ce chapitre en tâches et surtout en techniques caractéristiques : en l'absence de techniques justifiées par un environnement technologique constitué de définitions formelles, on s'attend essentiellement à des techniques de lecture (de variation ou d'extremum, mais aussi d'image ou d'antécédent) ou à des techniques liées à des calculs numériques. Il sera intéressant de considérer, par ailleurs, la traduction du mode d'appréhension retenu dans l'environnement des exercices et problèmes proposés. Un ensemble d'exercices/problèmes insistant davantage, par exemple, sur des tâches d'image/ d'antécédent, d'obtention de la représentation graphique de la fonction par la méthode point par point, misant sur une grande diversité dans les moyens d'obtenir des fonctions traduirait une volonté de faire appréhender l'aspect processus, alors qu'un ensemble d'exercices davantage axé sur des tâches de variation, d'extremum, traduirait davantage une appréhension selon le mode loi de variation.

2.2.4 Analyse de la partie exercices/problèmes

Nous avons jugé plus pertinent pour ce chapitre de distinguer les exercices/problèmes (nous utilisons ce terme pour signifier un exercice quelconque du manuel toute classification confondue) qui sont des situations fonctionnelles de ceux qui n'en sont pas. 44 exercices/ problèmes ont été retenus dont 14 sont des situations fonctionnelles.

2.2.4.1 Analyse des non situations fonctionnelles (30 exercices/problèmes)

Analyse par registres et cadres utilisés

Les cadres

Dans l'ensemble des exercices/problèmes de ce chapitre, les non - situations fonctionnelles sont toujours énoncés dans le cadre fonctionnel et nous verrons dans l'analyse des tâches/techniques que leur traitement ne suppose pas non plus de changements de cadres , à l'exception éventuellement de conversions vers le cadre numérique.

Les registres

(voir tableau des registres du chapitre 1 du manuel de 2nde en annexe du chapitre III)

Il s'agit d'une première présentation des différents registres qui apparaissent dans les textes d'exercices. L'analyse par tâches et techniques fera ressortir de façon plus précise le rôle et le statut de chacun d'eux ainsi que les éventuelles conversions de registres nécessaires pour résoudre les différentes tâches, que celles-ci soient explicitement demandées ou laissées à la charge de l'élève.

Le registre algébrique : Il est notoire dans ce chapitre, surtout en ce qui concerne les non -situations fonctionnelles, que ce registre n'intervient que très rarement. Il est impliqué dans 4 exercices/problèmes seulement sur 30, où il intervient uniquement comme registre de départ de l'exercice et toujours relativement à un même type de tâche puisqu'il s'agit à chaque fois d'établir *un tableau de valeurs d'une fonction à partir de son expression algébrique et par le biais de la programmation* : l'utilisation de la calculatrice programmable est demandée dans l'exercice. Nous verrons que les auteurs se sont attachés, en général, à proposer des tâches à résoudre d'après des techniques qui ne nécessitent pas du tout le recours au registre algébrique.

Le tableau de valeurs n'intervient que rarement parmi les registres répertoriés dans les non -situations fonctionnelles de ce premier chapitre. Il apparaît en vérité lié aux trois registres algébrique, de programmation et graphique à la fois, puisqu'il se trouve présent dans les quatre mêmes exercices que nous avons signalés ci-dessus. Dans trois d'entre eux, ce registre se présente comme un passage visant à faciliter la représentation graphique de la fonction ; dans le quatrième, il s'agit juste d'obtenir ce tableau de valeurs. *C'est donc un registre plutôt marginalisé dès l'installation de l'enseignement de la fonction* mais il nous faut souligner que le recours à ce registre, dans ce premier chapitre, est toujours demandé dans l'énoncé.

Le tableau de variations apparaît 10 fois sur 30: 4 fois comme registre de départ pour une tâche donnée et 6 fois comme registre d'arrivée. Remarquons qu'il est souvent mais pas toujours utilisé en interaction avec le registre graphique.

Le registre verbal/symbolique est très fréquent, 10 cas sur 30, mais n'apparaît qu'en tant que registre de départ impliqué dans un même type d'exercices composé d'une tâche unique. Rappelons que les fonctions exprimées à partir du registre verbal/symbolique sont, pour nous, des fonctions définies par certaines de leurs propriétés (voir chapitre II, le registre verbal). Nous avons précisé dans le chapitre II, que les fonctions ainsi décrites étaient impliquées dans deux types de tâches seulement. Dans ce chapitre, elles sont justement impliquées dans une seule d'entre-elles : la tâche de représentation graphique de fonction.

Le registre graphique est très largement majoritaire : seuls 3 exercices sur 30 n'ont pas du tout recours au registre graphique. Celui-ci est présent aussi bien en tant que registre de départ que registre d'arrivée, il est très clairement le principal registre de ce chapitre

Analyse par tâches et techniques

(voir tableau des tâches et techniques du chapitre 1 du manuel de 2nde en annexe du chapitre III)

Les tâches que l'on retrouve dans ces exercices/problèmes sont les tâches de :

- Représentation de fonction (dans 19 exercices/problèmes),
- Variation (4 exercices/problèmes),
- Extremum (6 exercices/problèmes),
- Signe d'une fonction (2 exercices/problèmes),
- Image/antécédent (3 exercices/problèmes),
- Discrimination relation/fonction (1 exercices/problèmes).

Les tâches de représentation de fonction, d'image/antécédent, d'extremum ou de variation apparaissent en association ou isolés, les tâches de signe et de discrimination apparaissent isolées mais sont, de toutes façons marginales dans ce chapitre.

La tâche de représentation de fonction est de loin la tâche la plus fréquente. Dans ces exercices/problèmes, elle recouvre :

- *l'obtention d'un tableau de valeurs* à partir de l'expression algébrique d'une fonction et en passant par la programmation (4 exercices/ problèmes),
- *la représentation graphique d'une fonction* à partir d'un tableau de valeurs (3 exercices/problèmes), donc d'après la technique "point par point",
- *les conversions du graphique au tableau de variations (*dont un exercice où il s'agit d'associer tableau de variations et courbes) *et inversement,*
- *représentation graphique d'une fonction décrite par certaines de ses propriétés dans le registre verbal/symbolique vers le graphique* (demandée 10 fois).

Les tâches de variations/d'extremum sont toutes à résoudre dans le registre graphique ou du tableau de variation. Ce qui se conçoit dans le cadre d'une approche intuitive de ces notions puisque d'autres techniques de résolution de ces tâches ne sont pas disponibles. Soulignons que les exercices proposent des tâches d'extremum (relatif) dans le registre du tableau de variation et de conversion du registre du tableau de variation vers le registre graphique alors que seul le tableau de variations d'une fonction monotone sur un intervalle obtenu à partir du registre graphique a été présenté en cours. Certes cela s'explique par la congruence entre les deux registres mais laisse également penser que la familiarisation avec le registre de tableau de valeurs est laissée à la charge de l'élève. Soulignons également que des tâches d'extremum absolu sont demandées dans le registre graphique alors que seul l'extremum (relatif) est présenté dans le cours (se reporter au cours).

La tâche de signe de fonction, également marginale, apparaît en tâche unique dans deux exercices où la fonction n'est donnée que par un tableau de variation, la technique est donc une technique de lecture. Il s'agit de cas de tableau de variations très particulier pour lequel des valeurs autres que celles que l'on a pour habitude d'inscrire sont indiquées. Ici, la technique de résolution vise non seulement, nous semble-t-il, la notion de signe de fonction impliquée dans la tâche, mais également la familiarisation avec le registre même de tableau de variation. Cette tâche et la tâche suivante, parce que le registre du tableau de variation ne leur est pas véritablement très propice, confirment que la familiarisation et la maîtrise du tableau de variation sont laissées à la charge de l'élève. Elles constituent des exemples de tâches pour lesquelles la technique vise autre chose que la tâche-elle même.

La tâche d'image/antécédent : à résoudre 2 fois dans le registre graphique, 1 fois dans le registre du tableau de variation. Cette dernière technique de résolution nous semble également visée, comme la tâche précédente, une familiarisation avec le registre du tableau de variation.

La tâche de discrimination relation/fonction (ou de vérification de l'unicité de l'image): est très marginale puisqu'elle apparaît en tâche unique dans un seul exercice où les relations à évaluer sont toutes représentées graphiquement. Nous constatons donc que la condition de l'unicité de l'image n'est pas visée de façon explicite dans les exercices/problèmes, la prise de conscience de l'importance de cette propriété préparant à une appréhension plus générale de la fonction, l'appréhension ensembliste, est envisagée sur la base d'une approche intuitive.

Ces différentes tâches, à l'exception, de la dernière tâche de représentation graphique de fonction, nous apparaissent être des tâches de complexité relativement modeste, qui s'inscrivent bien en cela, dans le cadre d'une première approche de la fonction. Les tâches proposées visent alors directement la familiarisation avec les notions qui y sont impliquées, notions nouvelles que les auteurs souhaitent installer, ainsi qu'avec les différents registres de représentation de fonction (tableau de valeurs, représentation graphique, programmation et tableau de variation), les moyens de les obtenir, et de passer d'un registre à l'autre.

Les tâches nécessitant des conversions de registre sont uniquement les tâches de représentation de fonction. Parmi elles, les 2 premières tâches de représentation de fonction visent plus précisément à promouvoir l'appréhension de la fonction en tant que processus. Le troisième type de tâche révèle que les conversions entre les registres graphique et du tableau de variation sont entièrement à la charge de l'élève. Ceci pourrait s'expliquer par la congruence entre ces deux registres.

La dernière tâche de représentation de fonction par contre ne vise plus la simple familiarisation avec les notions nouvelles, enjeu de l'enseignement de ce chapitre, mais déjà la maîtrise de ces différentes notions. Nous avons souligné, dans le chapitre II, la relative complexité de ce type de tâche et des techniques qui leur sont associées, dans la mesure où elles nécessitent une appréhension de la fonction dans sa globalité, plutôt en tant qu'objet (pour des exemples et plus de détail, se reporter au chapitre II). Ici, le registre graphique est envisagé comme support pour l'approfondissement de ces notions. Le recours à ce type de tâches indique à notre avis, la très grande conviction des auteurs quant à la force d'intuition qu'ils pensent possible de rattacher au registre graphique et à la facilité de traitement qu'ils lui accordent. C'est ainsi que nous comprenons le fait que la série d'exercices correspondant à ces tâches mette en jeu non seulement les notions, institutionnalisées dans le cours, d'intervalle de définition de la fonction, d'image, d'antécédent, d'extremum (relatif) et de variation, mais aussi que les notions de signe de fonction et d'extremum absolu qui ne seront enseignées que plus tard au cours de l'année, mais que, de plus, la coordination entre les deux registres verbal/symbolique et graphique soit entièrement à la charge de l'élève.

De façon générale la maîtrise des différents registres de représentation (en particulier du tableau de variation), à l'exception éventuellement du registre graphique, est essentiellement laissée à la charge des élèves.

2.2.4.2 Analyse des situations fonctionnelles (14 exercices/problèmes)

Les situations fonctionnelles sont relativement nombreuses dans ce chapitre puisque, au nombre de 14, elles représentent près du tiers des exercices/problèmes de ce chapitre.

Analyse par registres et cadres utilisés

Les cadres

Dans l'ensemble des exercices/problèmes de ce chapitre, seules les situations fonctionnelles sont énoncées dans un cadre non fonctionnel. Les conversions de cadres liés à la modélisation de ces situations fonctionnelles imposent souvent le passage par le cadre numérique.

Les registres

(voir tableau des registres du chapitre 1 du manuel de 2nde en annexe du chapitre III)

Le registre algébrique est également relativement rare dans les situations fonctionnelles, mais plus fréquent que dans les non-situations fonctionnelles : 7 d'entre-elles n'ont pas du tout recours à ce registre, alors que 5 y ont recours. Enfin, une situation fonctionnelle qui correspond à un problème ouvert pourrait-être résolue, selon les capacités de l'élève par modélisation algébrique mais cette solution n'est pas exigée, d'autres solutions numériques ou graphiques sont tout à fait possibles et sont d'ailleurs celles attendues et suggérées par l'énoncé.

Le tableau de valeurs apparaît dans 4 situations : comme dans les non-situations fonctionnelles, son rôle est essentiellement d'aider à l'obtention de la représentation graphique de la fonction

Le tableau de variations apparaît dans 3 situations. Il est uniquement impliqué dans la tâche d'obtention d'un tableau de variation à partir d'une représentation graphique.

Le registre graphique apparaît dans chacune de ces situations fonctionnelles soit en tant que registre unique, ou associé à d'autres, dans le cadre d'origine, soit en tant que registre d'arrivée dans une tâche de modélisation ou de représentation de fonction . Sa présence dans l'énoncé, ou son obtention dès la réalisation des premières tâches l'implique dans les techniques associées aux différentes tâches des situations fonctionnelles.

Analyse par tâches et techniques

(voir tableau des tâches et techniques du chapitre 1 du manuel de 2nde en annexe du chapitre III)

Les tâches apparaissant dans les situations fonctionnelles sont les tâches suivantes :

- Modélisation de fonction (dans 11 exercices/problèmes),
- Représentation de fonction (dans 12 exercices/problèmes),
- Images/Antécédents (5 exercices/problèmes),
- Variations (4 exercices/problèmes),
- Extremums (4 exercices/problèmes),
- Equations/inéquation, addition ou comparaison (égalité) de fonctions (6 exercices/problèmes).

Pour bien comprendre le statut de ces différentes tâches, il est nécessaire de considérer la façon dont elles sont associées ainsi que leur ordre d'apparition dans les différentes situations, dans la mesure où les situations fonctionnelles sont rarement des exercices/problèmes à tâche unique. Dans cet objectif, nous avons été conduite à distinguer les situations de ce premier chapitre en trois classes principales :

celle où la modélisation est réalisée par l'énoncé, celle où modélisation est une tâche demandée à l'élève mais où la fonction modélisant la situation n'est pas à exprimer dans le registre algébrique, enfin celle où l'élève doit modéliser la situation par une fonction exprimée algébriquement.

- **Modélisation réalisée par l'énoncé (les 3 exercices/problèmes classés activités) -**
  Dans ce type de situations fonctionnelles, la situation est décrite dans le langage verbal, et la fonction qui la modélise est exprimée par l'énoncé, dans le registre graphique (2 activités), ou le registre de tableau de valeurs (1 activité). Les variables dépendante et indépendante, en particulier, sont donc sont fixées par l'énoncé. Les tâches demandées sont :

  - *La tâche d'image/antécédent,*
  - *Les tâches de variation et d'extremum,*
  - *La tâche de représentation de fonction* (représentation graphique par la technique point par point à partir du tableau de valeurs, obtention du tableau de variation à partir de la représentation graphique),

  Toutes les activités du chapitre, et uniquement elles, se situent dans ce premier type de situations fonctionnelles. En tant que telle, elles visent à la familiarisation avec la notion de fonction ainsi que celles d'image, d'antécédent, de variation, d'extremum, impliquées dans les tâches demandées. Elles visent également à la familarisation avec les modes de représentation graphique et du tableau de variation. Il faut souligner que les tâches d'image/antécédent n'apparaissent que dans la première activité, par la suite ces notions sont impliquées de façon implicite dans d'autres tâches, en particulier dans la tâche de représentation graphique à réaliser par la technique point par point. Il nous semble alors que les auteurs insistent davantage, déjà dans les activités préparatoires au cours, sur les notions de variation et d'extremum. Le registre du tableau de valeurs apparaît être une registre intermédiaire vers le registre graphique. Le registre algébrique est volontairement écarté de ces situations fonctionnelles, le registre graphique est clairement celui, qu'ont choisi les auteurs, pour une approche intuitive des différentes notions à mettre en place.

- **Modélisation à réaliser par l'élève, expression algébrique de la fonction non demandée (6 exercices/problèmes classés T.P, exercices ou problèmes) -**
  Dans ces situations fonctionnelles où la tâche de modélisation est à la charge de l'élève, nous constatons que la fonction modélisant la situation n'est jamais à exprimer dans le registre algébrique. C'est précisément ce qui fait la spécificité de ces situations fonctionnelles comme les précédentes d'ailleurs : le registre graphique est celui dans lequel doit-être exprimée la fonction modélisant la situation. Mais un premier passage par le cadre numérique est loin d'être exclu. L'ordre des tâches demandées dans l'exercice/problème suivant, classé T.P, où une représentation

graphique de la fonction est demandée avant et après la réalisation d'un tableau de valeurs, vise justement, nous semble t-il à faire prendre conscience à l'élève de l'intérêt de cette première phase de familiarisation avec la situation fonctionnelle dans le cadre numérique :

"Un point M décrit le trajet ACB. On note x la longueur du trajet effectué par M et L(x) la longueur MD

1. Donner à main levée l'allure de la courbe représentant L (sans justification, sans mesurer).
2. Placer M (sur la figure) pour x = 2, mesurer alors DM = L(2) ; en procédant de même compléter le tableau suivant.
3. En utilisant le tableau de valeurs précédent esquisser la courbe représentant la fonction x -> L(x).
   (...)" (T.P. 4, p.17)

Cependant, si dans ce T.P., la modélisation de la situation par une fonction exprimée dans le registre du tableau de valeurs est une tâche distincte, et que tous les détails sont fournis à l'élève pour la mise en œuvre de la technique correspondante, cette phase de familiarisation avec la situation fonctionnelle, dans le cadre numérique n'est pas toujours aussi explicite, elle est le plus souvent beaucoup plus implicite, voire pas demandée du tout. Par ailleurs, deux de ces exercices/problèmes sont conçus de telle façon qu'une phase numérique ne puisse être envisagée pour aider à la compréhension de la situation. Ainsi le problème suivant :

"**Problème de robinets**

Les six récipients ci-dessous ont la même hauteur : 80 cm et la même capacité : 100 litres. On les remplit successivement, en utilisant un robinet à débit constant de 1/3 de litre par Seconde. Les graphiques représentent pour chaque récipient, la hauteur de la colonne d'eau dans le récipient en fonction du temps écoulé depuis le début du remplissage.

Retrouver la courbe correspondant à chaque récipient. (Les courbes et les images de récipients sont joints)" (problème 38, p.26).

Le rôle du professeur va être, en conséquence, indispensable pour faire comprendre à l'élève qu'il ne doit pas hésiter à s'engager dans une phase de recherche numérique si la situation le permet, encore lui faudra t-il discerner les situations pour lesquelles cette phase numérique est possible de celles pour lesquelles elle ne l'est pas.

Ces situations fonctionnelles nous semblent viser pour premier objectif la familiarisation avec la compréhension des phénomènes continus en termes de fonction, objectif, par ailleurs, bien souligné dans les programmes. En ce sens la tâche de modélisation y est probablement la tâche principale (deux de ces situations fonctionnelles ne proposent pas d'autres tâches). Cependant, il faut souligner que le choix des variables indépendante et dépendante(s) est fixé par l'énoncé, le plus souvent de façon très explicite. Quand cela n'est pas le cas, le choix de ces variables reste évident, comme par exemple dans le problème suivant :

"(...) Comment varie l'aire de la base du triangle quand on modifie la longueur de la base [BC] ?" (extrait du problème 37, p.26)

La tâche de modélisation ne comprend donc pas la découverte des variables et leur organisation en terme de dépendance.

Le choix du registre graphique conjointement avec la marginalisation du registre algébrique s'explique par la volonté de situer ce premier chapitre dans le cadre général d'une approche intuitive et concrète de la fonction et des notions, en relation avec la fonction, à installer. Ces notions sont visées par les tâches suivantes qui apparaissent donc dans 4 de ces 6 situations fonctionnelles :

- *Les tâches d'image/antécédent et de tableau de valeur*, quand elles apparaissent sont demandées avant la tâche de modélisation et lui servent donc d'aide mais nous avons vu qu'elles sont souvent laissées à la charge de l'élève.
- *Les tâches de variation/extremum, d'obtention du tableau de variation* sont demandées après obtention de la représentation graphique de la fonction et sont donc toutes à résoudre à partir de ce registre.
- *Une tâche unique d'équation/inéquation* graphique apparaît également dans ce type de situations fonctionnelles. Marginale ici, nous l'analyserons dans les situations fonctionnelles suivantes où elles sont fréquentes.

De façon générale, outre l'insistance dans ces situations sur la modélisation, nous pouvons constater que le statut des tâches d'image, d'antécédent et de tableau de valeurs, en tant que tâches favorisant l'appréhension de la fonction comme processus, ont tendance à être circonscrites relativement aux tâches impliquant les notions de maximum et d'extremum qui visent davantage une appréhension de la fonction en tant que loi de variation.

- **Modélisation à la charge de l'élève, expression algébrique de la fonction demandée -**

Cette tâche est explicitement demandée à l'élève, cependant comme pour les situations précédentes le choix des variables indépendante et dépendante(s) est fourni par l'énoncé. L'expression algébrique, en tant que première tâche demandée, donnent à ces situations fonctionnelles un aspect plus classique, nous semble-t-il, d'après la place accordée au registre algébrique : la modélisation par une fonction exprimée dans le registre algébrique y est indispensable et annonce l'entrée dans le cadre fonctionnel. Les techniques de résolution des différentes tâches demandées après la tâche de modélisation n'excluent pas celles basées sur le registre algébrique.

L'établissement de l'expression algébrique de la fonction semble jugée à la portée des élèves puisque aucune de ces situations n'envisage de phase d'exploration numérique. Ceci explique probablement le fait que 4 fois sur 5, le cadre d'origine est choisi pour être le cadre géométrique considéré comme familier car longuement exploré au collège. Le recours au cadre numérique dans la phase de la modélisation de la situation est donc éventuellement laissé à la charge de l'élève.

Ces situations fonctionnelles diffèrent aussi des précédentes, du point de vue des tâches ou des techniques de résolution demandées, ainsi :

1. *Les tâches d'image/antécédent et de représentation d'un tableau de valeurs* sont marginales, elles n'apparaissent que dans le seul même exercice, de plus elles succèdent à la tâche de modélisation. Elles vont éventuellement aider à la représentation graphique de la fonction.
2. *La tâche de représentation graphique* apparaît dans tous ces problèmes, elle est à obtenir à partir de l'expression algébrique de la fonction. Les fonctions étant affines, cette tâche et sa technique associée sont jugées familières (routinières).
3. *Les tâches d'équation/inéquation, de comparaison et d'addition* sont fréquentes dans ces situations. Elles sont posées dans le registre algébrique mais une solution graphique ainsi qu'une interprétation géométrique sont demandées aux côtés d'une solution algébrique. La solution algébrique est envisageable puisque les fonctions sont exprimées dans le registre algébrique. Le fait de demander également une solution graphique et une interprétation géométrique visent à donner une dimension fonctionnelle (mettant en jeu le concept de fonction) à ces tâches, ainsi qu'à permettre de rencontrer à partir des exercices/problèmes une technique (résolution graphique d'équation et d'inéquation) et des notions (d'addition et de comparaison de fonction) qui ne seront rencontrées que plus tard dans l'année, voire seulement au cours de l'année suivante.
4. *Les tâches de variation ou d'extremum* sont absentes. Ceci pourrait s'expliquer ici justement par le fait qu'il s'agit de fonctions affines dont les variations sont connues depuis la troisième.
   Ces dernières situations fonctionnelles visent donc un double objectif, si elles permettent de souligner l'intérêt du concept de fonction dans l'étude de situations diverses, elles constituent également une première approche concrète et intuitive (par le recours au registre graphique) avec une technique (résolution graphique d'équations et d'inéquations) et des notions (d'addition et de comparaison de fonctions) qui ne seront institutionnalisées qu'en classe de Première. En voici un exemple :
   "Le trapèze isocèle ABCD a pour dimensions (..). M est un point du segment [BC].
   On pose BM = x.
5. Calculer en fonctions de x l'aire du triangle DMC. On note cette aire f(x).
6. Calculer en fonctions de x l'aire du trapèze ADMB. On note cette aire g(x).
7. Calculer f(x) et g(x). Interpréter géométriquement le résultat.

8. Calculer pour quelles valeurs de x on a f(x) = g(x).
9. Représenter graphiquement dans un même repère les fonctions f et g et retrouver à l'aide du graphique les résultats des questions 3 et 4." (exercice 34, p.25)

L'objectif de l'enseignement des situations fonctionnelles dans ce chapitre est de sensibiliser les élèves à l'intérêt du concept de fonction dans la compréhension du monde réel et, de ce fait, à lui donner plus de sens. Les situations fonctionnelles de ce chapitre vont probablement se distinguer des situations fonctionnelles des chapitres suivants, d'une part par le fait que la fonction modélisant la situation y est rarement algébrique, et d'autre part, par le statut privilégié que les auteurs du manuel ont conféré au registre graphique dans les situations fonctionnelles, qui rejoint le statut qui lui est déjà attribué dans les situations non fonctionnelles. Le registre graphique constitue, d'après les auteurs, un support intuitif puissant pour la mise en place des notions à installer, principalement celles de variation et d'extremum. Mais cet appui inconditionnel sur le registre graphique signifie, par ailleurs, que les auteurs ne jugent pas problématique les techniques de résolution qu'imposent ce registre. Or certaines recherches comme, celle déjà citée, de Duval (Duval, 1995) ont montré que non seulement les activités de conversion de registres, impliquant le registre graphique aux côtés d'un autre registre, sont loin d'être simples, mais que même les activités de traitement dans le registre graphique, comme la lecture des représentations graphiques, ne sont pas des tâches aussi naturelles qu'on pourrait le penser.

Enfin, si les activités mettant en jeu les situations fonctionnelles visent à permettre l'assimilation des notions de variable, de variables dépendante et indépendante, le fait qu'aucune des situations fonctionnelles ne propose la découverte des variables ou leur organisation en termes de dépendance fonctionnelle risque de compromettre cet objectif.

2.2.5 Conclusion

Un enseignement se souciant du sens à donner aux notions enseignées

Les auteurs ont nettement voulu inscrire ce chapitre d'introduction sur le concept de fonction sur la base d'un enseignement rattaché aux situations concrètes, via les situations fonctionnelles en nombre relativement élevé dans ce chapitre, et basé sur l'intuition par le recours au registre graphique, respectant en cela les directives du programme. Ils ont dans cet objectif écarté le registre algébrique qui persiste essentiellement dans les situations fonctionnelles. Ce premier chapitre vise alors la familiarisation avec la notion de fonction et ses divers modes de représentation tout en montrant son utilité pour représenter des situations concrètes qu'on pourra traiter avec ces outils graphiques ou algébriques.

Mode d'appréhension visé

Si la fonction présentée dans le cours est principalement abordée selon son aspect processus, l'analyse des exercices/problèmes indiquent une insistance plus grande sur son aspect loi de variation. Certes la variété des procédés permettant d'obtenir des fonctions, par le tableau de valeurs, par la programmation, de même que les tâches d'image/d'antécédent et de représentations de fonctions sur la base de la correspondance entre une valeur et son image font davantage allusion à une fonction-processus. Mais la part, beaucoup plus importante, consacrée aux exercices/problèmes où les notions de variation et d'extremum se trouvent impliquées de manière explicite comme dans les tâches de variation, d'extremum ou de tableau de variation ou de manière plus implicite à travers des tâches favorisant une approche plus globale de la fonction par l'intermédiaire du registre graphique ne laisse pas de doute sur le poids qu'accordent les auteurs à ce dernier aspect de la fonction.

Les aspects liés à l'appréhension de la fonction en tant que loi de variation, apparaissent ainsi prioritaires dès l'installation de la notion de fonction, et laissent quelque peu en marge la prise en compte de la fonction selon son aspect processus ou du moins laissent pour l'essentiel cette prise en compte à la charge de l'élève.

Par ailleurs, peu de place est accordée à la possibilité d'enclencher, sur une appréhension plus générale de la notion de fonction : malgré l'effort fait pour varier les moyens d'obtenir des fonctions, il n'y a pas de réelle diversification de registres dans la mesure où les exemples de fonctions exprimées dans des registres autres que les registres graphiques et du tableau de variation sont en nombre relativement réduit et surtout n'interviennent que dans un type de tâches bien précise. Par ailleurs, les fonctions proposées dans les différents exercices/problèmes sont toutes continues sur un intervalle ; aucun autre exemple de fonction, non numérique ou définie sur un ensemble discret, en particulier, n'est proposé. La condition de l'unicité de l'image, tout particulièrement, ne bénéficie que d'une place très discrète dans ce premier chapitre : implicitement prise en compte dans certaines tâches relevant du cadre numérique comme les tâches d'image/antécédent ou de représentation graphique par la technique point par point, elle n'est explicitement visée que dans un seul exercice du chapitre. Les élèves ne sont pas préparés à travers ce premier chapitre à envisager la fonction selon un mode d'appréhension plus général.

Place laissée à la notion de variable relativement à celle de variation

L'accent davantage porté sur l'appréhension de la fonction en tant que loi de variation est traduit au niveau des exercices/problèmes par une insistance sur les notions de variation et d'extremum au détriment de celle de variable. Cependant les programmes de Seconde visent comme un des objectifs principaux l'acquisition et la maîtrise de la notion de variable et proposent en ce sens quelques travaux spécifiques relevant du cadre numérique et de l'activité sur les situations fonctionnelles. Or ces travaux numériques, sont justement des travaux où la fonction est visée en tant que processus ; quant aux situations fonctionnelles, nous avons vu que celles proposées dans ce premier chapitre du manuel, ne prévoient ni la découverte des variables, ni même leur organisation en terme de dépendance qui permet entre autres la distinction entre variable dépendante et variable indépendante. L'absence de telles activités risque de compromettre cet objectif. En fait, les auteurs de ce manuel misent , à notre avis, dans ce premier chapitre sur l'acquisition première de la notion de variation qui doit englober, selon eux, celle de variable.

Mais viser la notion de variation avant la notion de variable pourrait s'expliquer par la difficulté de proposer aux élèves des exercices/problèmes imposant la recherche des variables en jeu tout en maintenant le temps didactique dans les limites du temps accordé par l'institution. Par là même nous justifions la faible apparition du registre de tableau de valeurs qui prendrait réellement son sens avec ce type de tâches et de recherche, au lieu d'être avec le registre de programmation, un registre marginal dont l'utilisation se limite au passage entre le registre algébrique et le registre graphique. Il serait intéressant de vérifier si les nouveaux programmes de mathématiques qui concèdent plus d'espace à l'usage de la calculatrice (programmable) et même à l'informatique, et à l'enseignement de domaine mathématique nouveau (mathématiques discrètes/statistiques) réussissent à organiser un enseignement où les modes d'appréhension de processus et de loi de variation soient mieux équilibrés, et ou les élèves seraient sensibilisés à une appréhension plus générale de la fonction.

Un appui inconditionnel sur le registre graphique

Le registre graphique est de loin le premier registre. Son importance, qu'il était déjà possible de déceler lors de l'analyse du cours, s'affirme dans les exercices/problèmes. Le statut qui lui est donné s'accorde avec la marginalisation voulue du registre algébrique et représente, pour les auteurs du manuel, la traduction des directives des programmes concernant l'introduction des premiers concepts sur une base intuitive. Par opposition avec le recours au registre du tableau de variations où les techniques de lecture qui lui sont propres priment sur l'acquisition des nouveaux concepts, le registre graphique, lui, est clairement le registre support visant l'installation des nouveaux concepts. Le choix de du registre graphique comme principal registre de ce premier chapitre s'explique également par la place accordée à la notion de variation dans la mise en place du concept de fonction, et explique en particulier pourquoi il a été préféré aux registres du cadre numérique. Cependant cet appui inconditionnel sur le registre graphique traduit une grande confiance, de la part des auteurs de ce manuel, dans le rôle à accorder à ce registre dans le domaine du didactique : il est utilisé pour permettre non seulement la familiarisation et la maîtrise des notions institutionnalisées, mais également une première rencontre à travers les exercices avec des notions non encore enseignées. Or ce rôle suppose une certaine transparence, au niveau de la maîtrise des techniques de résolution relatives aux tâches posées dans ce registre, qui est mise en doute par certaines recherches qui se sont penchées sur le rôle des registres de représentations sémiotiques dans l'enseignement et l'apprentissage.

Ainsi, l'appréhension de la fonction essentiellement comme loi de variation, la volonté de rattacher le concept de fonction à une première conception concrète et intuitive mais aussi les contraintes institutionnelles quant à l'organisation du temps didactique s'accordent avec une organisation praxéologique dont les techniques relèvent principalement du registre graphique.

2.3 Description et analyse du chapitre 3 : "Encadrements " - (uniquement la partie concernant la fonction valeur absolue) -

2.3.1 Organigramme du cours

.Définition de la valeur absolue d'un nombre réel

.Représentation graphique de la fonction valeur absolue

.Résolution de l'équation $|x| = a$ (a > 0)"
et de l'inéquation $|x|$ a (a > 0)"

Fonction valeur absolue utilisée selon son statut outil - résultat institutionnalisé dans le cadre algébrique

2.3.2 Description, commentaire et analyse du cours

Ce chapitre n'est pas entièrement consacré à l'étude de la fonction valeur absolue. Intitulé "encadrements", il vise principalement à familiariser les élèves avec les notions d'intervalles, d'encadrement, de valeur absolue, et à aborder l'étude des inégalités dans le but de les préparer au langage sur les approximations afin de pouvoir étudier sur une base plus formelle, à partir de la définition des inégalités, les notions de variations et d'extremum et à pouvoir l'année suivante envisager l'étude des limites. Si ce chapitre ne concerne donc pas directement notre étude, il permet néanmoins de préparer des connaissances à venir qui nous concernerons.

Les auteurs ont par ailleurs fait le choix d'introduire la fonction valeur absolue, dans la section consacrée à la notion de valeur absolue et ce sont précisément les trois paragraphes "fonction valeur absolue", "équation $|x| = a$ (a > 0)" et inéquation $|x| \leq a$ (a > 0)", de cette section qui nous intéressent ici.

Précisons que cette introduction de la valeur absolue en est une première approche, la deuxième prévue dans le chapitre 5 interprète la valeur absolue en termes de distance.

Objet d'enseignement : fonction valeur absolue

La section commence par la définition de la valeur absolue d'un nombre réel dans le registre verbal/symbolique :

- "La valeur absolue d'un nombre réel x, notée $|x|$ est x lui-même s'il est positif, et son opposé -x, si x est négatif".
- Quelques exemples numériques suivent cette définition. La première approche avec la notion de valeur absolue se situe donc dans le cadre numérique.
- Le paragraphe intitulée "fonction valeur absolue" est très succinct. La fonction y est représentée graphiquement ; le graphique est préalablement ainsi justifié :
- "La représentation graphique de la fonction valeur absolue $x \to |x|$ est la réunion des deux demi-droites :
- d1, d'équation $y = -x$ avec $x \leq 0$.
- d2 d'équation $y = x$ avec $x \geq 0$. " (Dimathème 2nde, p.55)

Cette justification de la représentation graphique de la fonction valeur absolue relevant du cadre géométrique, s'appuie implicitement sur la définition algébrique de la fonction valeur absolue, qui sera déduite de celle de la valeur absolue d'un nombre réel, et que le professeur se chargera d'éclaircir.

La fonction valeur absolue donne l'occasion de rencontrer un exemple de fonction quelque peu différente de celle présentée dans le chapitre 1 : deux expressions algébriques, plutôt qu'une, sont nécessaires pour la décrire ; ce qui permet d'élargir quelque peu le cadre de référence des fonctions fréquentées, ceci dans le but de promouvoir une appréhension plus générale du concept. Dans le même esprit, cette fonction peut permettre de renouveler les tâches d'images et d'antécédent et d'insister sur la notion d'intervalle de définition de la fonction précisément du fait de la difficulté relative de réaliser ces tâches dans le cas de fonction par intervalles. Le professeur insistera probablement sur le fait qu'il s'agit d'une fonction affine par intervalles ; les élèves connaissent et savent représenter les fonctions affines depuis le collège. La représentation graphique de la fonction valeur absolue est alors justifiée à partir de la reconnaissance de la classe à laquelle appartient la fonction. Cette justification constitue une des différences essentielles avec l'approche adoptée au chapitre 1 où les représentations graphiques de fonctions ne nécessitaient pas d'être justifiées. Mais il est vrai, qu'alors, le professeur décidera plutôt d'aborder ce chapitre après le chapitre "Fonctions affines" puisqu'un tel chapitre est prévu dans ce manuel.

Ceci est un choix possible pour le professeur dans la marge de manœuvre dont il dispose pour introduire la fonction valeur absolue. Les auteurs de ce manuel ne semblent pas avoir souhaité s'attarder outre mesure sur l'expression algébrique de la fonction. La fonction valeur absolue n'est pas étudiée comme le seront, nous le verrons dans les chapitres suivants, les autres fonctions usuelles du programme : aucun commentaire n'est apporté sur les variations de la courbe, ni sur ses propriétés (symétrie, extremum). Il semble que les auteurs s'intéressent uniquement à l'obtention de la représentation graphique de la fonction valeur absolue.

Objet d'enseignement : équation (inéquation) de type "$|x| \quad a; (a > 0)$".

Nous limiterons à la présentation de l'équation, celle de l'inéquation étant identique.

La résolution de l'équation de la forme $|x| = a$ est présentée dans le cours uniquement sur la base d'un exemple particulier :

"Résoudre l'équation $|x| = 2{,}8$, c'est trouver les antécédents de 2,8 par la fonction valeur absolue." (p.56)

Les antécédents sont ensuite déterminés dans le registre graphique du cadre fonctionnel, par le tracé de la droite $y = 2{,}8$. La technique graphique relative à cet exemple particulier est entièrement détaillée et présentée en tant que méthode. Ces explications permettent d'institutionnaliser le résultat général suivant à retenir :

"Pour $a > 0$, l'ensemble des solutions de l'équation $|x| = a$ est $\{a; -a\}$."

L'équation donnée dans le cadre algébrique est donc traduite dans le registre graphique du cadre fonctionnel pour être résolue. La fonction valeur absolue sert d'outil pour la résolution de cette équation/inéquation et la technique de résolution est une technique graphique, ce qui permet d'installer un jeu de cadres algébrique-fonctionnel. Bien que cette technique et sa justification technologique basée sur le cadre fonctionnel soient présentées en tant que méthode, le résultat général que les élèves doivent retenir est institutionnalisé dans le cadre algébrique.

Conformément aux directives générales du programme concernant la limitation du cadre théorique, les auteurs ne proposent pas de preuve générale pour ce résultat mais une illustration sur la base d'un exemple particulier. Ce résultat relevant du domaine algébrique ne se réfère donc qu'implicitement à la fonction valeur absolue.

2.3.3 Synthèse de l'analyse du cours

Les auteurs n'ont pas réellement l'objectif d'étudier la fonction valeur absolue, mais uniquement celui d'obtenir sa représentation graphique afin de l'utiliser au niveau technologique dans la résolution des équations (inéquations) du type "$|x| = (\quad) a$". Nous situons bien dans un cadre algébrique et le recours au cadre fonctionnel se situe au niveau technologique de l'organisation praxéologique relative à la tâche de résolution de ces équations/inéquations. Cependant la technique de résolution de ces équations/inéquations que les élèves auront à retenir relève uniquement du cadre algébrique, ce qui pose la question de savoir si l'outil fonctionnel n'intervient qu'au niveau de la démonstration donnée dans le cours ou s'il sera effectivement encouragé au niveau des exercices/problèmes. Autrement dit, la résolution de ce type d'équation/inéquation constitue-t-elle une occasion pour les élèves d'utiliser la fonction selon son statut outil, donc d'installer une dialectique outil/objet dans l'approche de l'enseignement sur la fonction afin de mieux favoriser son appropriation, ainsi que de présenter éventuellement une occasion de favoriser la distinction inconnue/variable ?

2.3.4 Analyse de la partie exercices/ problèmes

Les exercices et problèmes de ce chapitre susceptibles de nous intéresser se révèlent être en nombre très réduit. Nous avons exclus d'emblée 76 exercices/problèmes se rapportant aux sections de ce chapitre non comprises dans notre étude. Ils portent sur les encadrements, les inégalités, l'écriture d'intervalles, le calcul de quantités avec valeur absolue sans oublier des résolutions d'équations/inéquations et de systèmes de deux équations sans valeur absolue. Sur les 16 autres, 3 ont également été exclus bien que portant sur les fonctions car ils nous sont apparus trop peu significatifs en définitive. Les 13 autres, correspondent à des tâches d'équations/ inéquations avec valeur absolue dont voici un exemple typique :

"Résoudre l'équation et l'inéquation suivante et représenter les solutions sur un axe gradué :
a) $|x| = 1$;   b) $|x| \quad 1$".
La formulation de l'exercice n'est pas très explicite sur la méthode de résolution à adopter. Justement parmi ces exercices/problèmes l'un est un exercice corrigé, il nous éclaire sur la méthode que les auteurs souhaitent voir utiliser par les élèves :

"Résoudre dans R l'inéquation$|3x + 2| = 3$.
Les nombres réels dont la valeurs absolues est 3 sont 3 ou -3. On en déduit :
$|3x + 2| = 3$ si et seulement si $3x + 2 = -3$ ou $3x + 2 = 3$
(...)
d'où $x = - 5/3$ ou $x = 1/3$." (exercice rédigée 1, p.58)

Il nous faut remarquer que seules les équations de type $|x| = a$ ont été institutionnalisée en cours. Les élèves ont donc à leur charge la résolution d'équation/inéquations avec valeur absolue un peu plus complexes de type $|cx + d| = a$. Or la méthode proposée ne fait aucune référence au cadre fonctionnel et à une éventuelle résolution graphique. Les mêmes constatations également sont à faire pour un autre de ces exercices/problèmes classés T.P dont les indications ne font référence qu'à l'utilisation du cadre numérique et algébrique. Il nous semble donc que l'utilisation de la fonction valeur absolue selon son statut outil se limite effectivement, d'après le choix des auteurs du manuel, aux justifications de niveau technologique relevant du cours. La fonction valeur absolue ne sera donc pas impliquée selon son statut outil dans la résolution d'équations/inéquations avec valeur absolue dans les activités des élèves ayant reçu un tel enseignement.

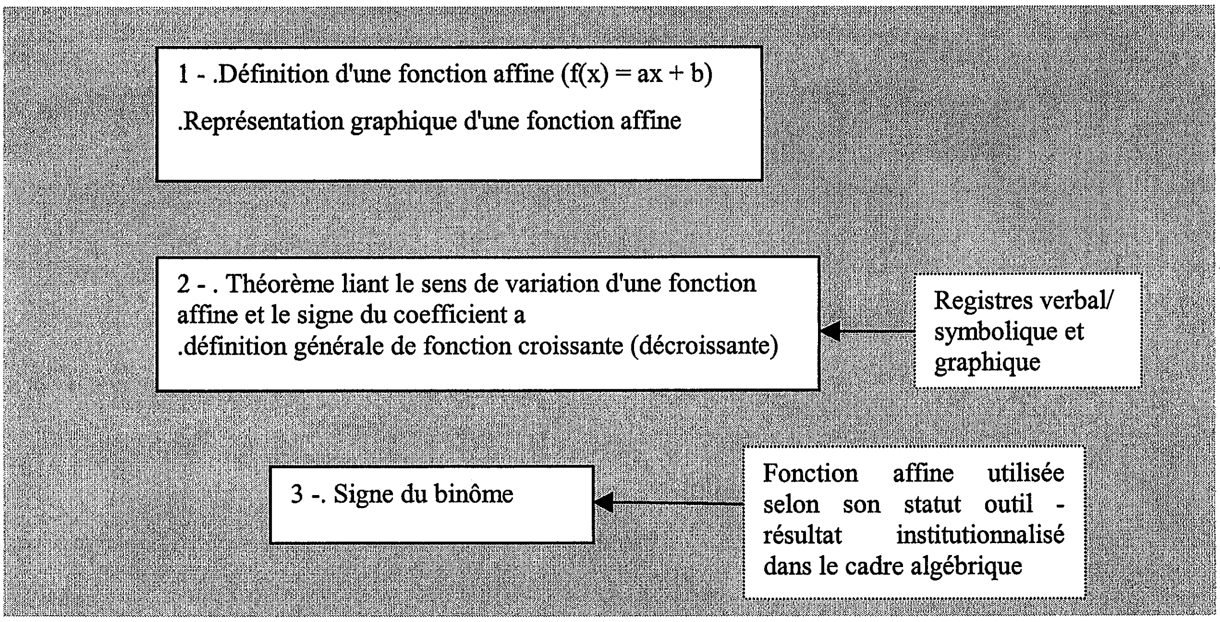
Ce qui nous conforte dans nos conclusions est que la deuxième approche de la valeur absolue prévue dans le chapitre 5, donc après le chapitre relatif aux fonctions affines, ne prévoit pas non plus d'étude de la fonction valeur absolue, ni d'utilisation de la fonction valeur absolue dans les résolutions d'équations/inéquations correspondantes. Au contraire, la valeur absolue y est interprétée, en terme de distance et c'est uniquement cet aspect géométrique de la valeur absolue qui est réinvesti dans la résolution de ces équations ou inéquations. Sur ce point cependant, l'exemple de la fonction valeur absolue est un cas d'exception parmi les différentes fonctions étudiées en Seconde. La notion de fonction trouve en général l'occasion, comme nous le verrons, d'être utilisée selon son statut outil à travers les activités de résolution d'équations ou d'inéquations.

2.3.5 Conclusion

Les exercices/problèmes relevant de notre étude étant, dans ce chapitre, en nombre insignifiant, nous renvoyons le lecteur à la synthèse de l'analyse du cours.

2. 4 Description et analyse du chapitre 4 : "Fonctions affines"

2.4.1 Organigramme du cours



2.4.2 Description, commentaire et analyse du cours

Ce chapitre entièrement consacré aux fonctions affines comme l'indique son titre : "Fonctions affines", est constitué de 5 sections qui ne nous concernent pas toutes. On est d'abord frappé, par l'abondance des définitions, contrairement au chapitre 1 : il peut y en avoir plusieurs dans une même section. La deuxième section "propriétés" en compte d'ailleurs 4. Ceci peut s'expliquer par le fait que les fonctions affines, déjà étudiées au collège, ne nécessitent plus, de l'avis des auteurs, d'introduction intuitive. Plusieurs objets d'enseignement sont visés ici : la fonction affine (et linéaire), les variations de la fonction affine et les variations d'une fonction quelconque, enfin l'objet d'enseignement, signe du binôme.

Par rapport au chapitre précédent, nous remarquons d'emblée que ces objets d'enseignement sont tous présentés de façon formelle. Enfin, d'autres objets d'enseignement sont étudiés dans ce chapitre qui ne relèvent pas de notre étude, mais soit de la géométrie et ne présentent pas alors d'aspect fonctionnel (coefficient directeur d'une droite, inéquation à deux inconnues...), soit qu'ils constituent un cas trop particulier (proportionnalité, pourcentage) de modélisation de la fonction affine qui ne se rapporte pas au concept de fonction en général et que nous avons par conséquent écarté. Nous remarquerons cependant que, dans sa conception, ce chapitre relie les notions nouvellement introduites aux savoirs anciens, étudiés dans les classes précédentes comme la proportionnalité ou à des savoirs d'autres domaines des mathématiques comme la géométrie.

L'objet d'enseignement : fonctions affines

La définition algébrique d'une fonction affine et sa traduction dans le registre graphique sont présentées dans la première section de ce chapitre sur une base formelle :

"Soient a et b, deux réels. La fonction f définie sur R par f(x) = ax + b est appelée fonction affine"

et

"la représentation graphique de la fonction f définie par f(x) = ax +b est la droite D d'équation y = ax + b" (Dimathème 2nde, p 74).

Les cas particuliers de fonction constante et linéaire sont également présentés à l'aide d'une définition algébrique et d'une illustration graphique.

L'étude des fonctions usuelles commence par celle d'une première classe de fonctions : les fonctions affines, déjà étudiés au collège. Cependant le sens de variation d'une fonction affine est un nouvel objet d'enseignement en classe de 2nde. Ce chapitre ne constitue donc pas une révision systématique de ce qui a été vue au collège même si ces premières définitions sont des rappels.

L'objet d'enseignement : variation

Cet objet d'enseignement est visé dans le dernier paragraphe intitulé "sens de variation" de la deuxième section du chapitre. Les deux premières visent à institutionnaliser la notion de coefficient directeur nécessaire pour celle de sens de variation.

Ce paragraphe qui nous intéresse précise que 3 types de fonctions affines sont à distinguer en fonction du signe du coefficient directeur : a > 0, a < 0 et a = 0. Pour chacun d'eux, une illustration graphique est proposée, suivie d'un commentaire. Par exemple, on peut lire pour le cas "a > 0" :

"quels que soient les réels x_1 et x_2 : si $x_1 < x_2$ alors $f(x_1) < f(x_2)$. Si a > 0, alors f est strictement croissante sur R ".

Ces illustrations et commentaires servant à institutionnaliser les définitions de fonction croissante et décroissante dans le cas d'une fonction affine, puis sans aucun intermédiaire supplémentaire, les mêmes définitions dans le cas général.

Ainsi :

"Soit f la fonction affine définie sur R par f(x) = ax + b.

Si a > 0, alors f est strictement croissante sur R.

Si a < 0, alors f est strictement décroissante sur R.

Si a = 0, alors f est constante sur R".

Puis,

"Une fonction f est croissante sur un intervalle I lorsque pour tous réels x_1 et x_2 de I, si $x_1 < x_2$ alors $f(x_1) \leq f(x_2)$.

Elle est décroissante sur un intervalle I lorsque pour tous réels x_1 et x_2 de I, si $x_1 < x_2$ alors $f(x_1) \leq f(x_2)$".

La fonction affine n'étant pas un objet nouveau en Seconde, il nous semble par conséquent, que l'objectif de ce début de chapitre est d'institutionnaliser les concepts de fonction croissante, décroissante sur une base plus formelle. Cette formalisation s'accorde avec le recours conjoint aux deux registres registre algébrique et graphique pour l'institutionnalisation des concepts, par opposition à une marginalisation du registre algébrique et une utilisation quasi-exclusive du registre graphique caractéristique du chapitre 1. Dans ce but, les auteurs envisagent une formalisation en deux étapes : le concept de variation se restreint d'abord au cas particulier de fonctions affines, avant d'être généralisé à celui d'une fonction quelconque.

Les auteurs ont choisi de justifier le lien entre le sens de variations des fonctions affines et le signe du coefficient directeur en s'appuyant sur le registre graphique : Ainsi, le coefficient directeur sert à *justifier* l'existence de trois types (selon le signe de a) de fonctions affines, et donc *justifie* les trois types de représentations graphiques correspondantes. Le sens de variation obtenu dans chaque cas, est alors *justifié par une lecture graphique.* Cependant la technologie qui détermine la technique de résolution de la tâche de variation d'une fonction affine est institutionnalisée dans le registre verbal-symbolique. Ainsi, le registre graphique est exploité au niveau de la justification des nouveaux savoirs institutionnalisés dans le cours, il ne devrait plus a priori intervenir au niveau des techniques à mettre en oeuvre pour la résolution des tâches impliquant ces savoirs.

Il nous semble que le choix du cas particulier de fonction affine comme point de départ pour la formalisation de la notion de variation de fonction, s'explique ici, précisément par le fait que la représentation graphique d'une fonction affine peut-être obtenue de façon fiable (la représentation graphique d'une fonction affine se justifie algébriquement) par opposition à l'obtention d'une courbe par la technique point par point, seule disponible pour l'instant, dans le cas d'autres exemples de fonctions. Les auteurs semblent souhaiter, de façon générale, une formalisation graduelle des connaissances. C'est ainsi que nous comprenons également les commentaires des graphiques permettant la lecture du sens de variation comme " si $x_1 < x_2$ alors $f(x_1) < f(x_2)$", dans le cas d'une fonction croissante. Ce commentaire apparaît plus formel que celui, relevant du registre verbal, qui était utilisé dans le premier chapitre "plus x est grand, plus f(x) est grand".

C'est sur la base de ces premiers commentaires, donc sur la base de la visualisation dans le registre graphique à travers un exemple particulier de fonction croissante et décroissante, que sont institutionnalisées les définitions formelles de sens de variation utilisant les inégalités. Il s'agit cependant de se familiariser avec ces définitions qui ne sont pas pour l'instant impliquées dans la tâche de détermination du sens de variation. En particulier, cette définition n'est pas réinvestie pour justifier le sens de variation des fonctions affines, sur une base uniquement algébrique (analytique). Il faut néanmoins souligner qu'un T.P (sur lequel nous ne reviendrons pas dans l'analyse des exercices et problèmes du chapitre) est entièrement consacré à cette démonstration qui est réalisée en utilisant les inégalités ; lesquelles inégalités ont fait l'objet d'un enseignement, rappelons-le, dans le chapitre précédent. Il semble donc que les auteurs de ce manuel ont préféré se maintenir, à ce stade de l'enseignement, à un cadre théorique limité, qui se traduit par la persistance d'un appui sur le registre graphique au niveau des justifications données dans le cours. Ils suggèrent néanmoins une familarisation des élèves avec des exigences théoriques plus grandes, et qui auraient pour conséquence de se départir d'un recours au registre graphique. Le professeur pourra choisir d'inclure cette démonstration dans le cours, en fonction de ses penchants personnels et en tenant compte du niveau général de sa classe.

Nous voyons donc que les auteurs sont attentifs à introduire les connaissances nouvelles à la fois de façon très graduelle et en prenant appui sur les connaissances anciennes : Ici, le registre graphique est le support d'une formalisation graduelle des connaissances (en interaction avec le registre verbal dans un premier temps, puis le registre des inégalités pour une définition des variations plus formelle) alors que l'exemple de la fonction affine constitue la base à partir de laquelle les variations d'une fonction quelconque sont abordées et aussi le premier exemple de fonction pour laquelle le sens de variation est justifié.

Cependant, l'introduction du sens de variation d'une fonction quelconque relativement au sens de variation d'une fonction affine, n'est pas proposé dans les programmes. Il s'agit du choix personnel des auteurs dans la marge d'interprétation que leur laisse le programme, et dans leur volonté de lier l'enseignement du nouveau à celui de l'ancien. Nous pouvons nous interroger sur la validité d'un tel choix : les variations des fonctions affines et leur lecture dans le registre graphique est un cas très particulier ; le passage de ce cas particulier au cas général n'est peut-être pas aussi évident. Mais il est vrai que les variations de fonctions dans le cas général seront reprises ultérieurement. Cette présentation de la notion sens de variation confirme la confiance des auteurs dans le registre graphique, que nous avons soulignée dans le premier chapitre.

Ces nouvelles définitions formelles de fonction croissante, décroissante imposeront certainement, nous le vérifierons dans l'analyse des exercices/problèmes, de nouvelles techniques de détermination des variations d'une fonction, en particulier pour les fonctions affines : alors qu'au chapitre précédent seules les techniques de lecture graphique ou du tableau de variations étaient possibles, de nouvelles techniques basées sur le registre algébrique sont mises en place.

L'objet d'enseignement : signe du binôme "ax + b (a 0)"

L'équation "ax + b = 0" est d'abord résolue dans le cadre algébrique : "... a une unique solution - b/a, autrement dit f (- b/a) = 0". Sur la base de la connaissance du sens de variation d'une fonction affine, 2 cas d'étude sont distingués, selon que "a > 0 et donc f est strictement croissante" ou "a < 0 et f est strictement décroissante". Pour chacun d'eux une fonction est tracée dans le registre graphique, et le point (- b/a; 0) est marqué. A chacun des graphiques correspond un tableau de signes du binôme que justifient les variations de la fonction.

Cette section vise donc à institutionnaliser la technique graphique de résolution de la tâche de signe du binôme. La technique algébrique (à l'aide du tableau de signe) sera présentée dans le chapitre suivant. Dans cette première technique, le concept de fonction est impliqué en tant qu'outil et le recours au registre graphique permet, de l'avis des auteurs du manuel mais aussi des programmes, une résolution de la tâche de signe du binôme sur une base plus intuitive grâce à la visualisation du signe de ax + b. Justement, il nous semble que la difficulté de cette tâche vient du fait que l'expression algébrique ax + b, dont on recherche le signe, y est considérée comme un tout, relativement à la résolution d'inégalités (ax + b < 0 et ax + b > 0), que l'on étudie au collège, et où l'attention se porte davantage sur l'inconnue x. Dans cette nouvelle tâche, la difficulté consiste à considérer x relativement à ax + b, l'approche fonctionnelle permet précisément de considérer globalement l'expression algébrique en x, soit la variable dépendante. De façon générale, nous avons souligné dans le chapitre II que les techniques graphiques de résolution d'équations et d'inéquations, en tant que relevant du cadre fonctionnel, présentaient l'intérêt de favoriser le passage de la notion d'inconnue à celle de variable. Cette technique graphique de résolution de la tâche du signe du binôme présente donc le double intérêt de constituer une technique plus intuitive pour cette tâche, et de favoriser l'assimilation de la notion de variable.

Mais l'intérêt de cette technique se situe également à un autre niveau :

- tout d'abord les notions de fonctions et de signe de fonction y sont impliquées en tant qu'objet, ce qui représente l'intérêt de faire fonctionner la dialectique outil/objet dans le but d'une meilleure appropriation de la notion de fonction.
- La notion de variation y est impliquée en tant qu'outil relativement à une approche de cette notion visant, jusque-là, son statut objet. De manière équivalente, la dialectique outil/objet est exploitée cette fois relativement à la notion de variation.

- enfin, cette technique permet de mettre en place un outil d'étude d'autres variations et d'autres signes, dans une approche graduelle de l'enseignement basant le nouveau sur l'ancien.

2.4.3 Synthèse de l'analyse du cours

L'enseignement des fonctions affines présente un double but dans ce chapitre. D'une part, en tant qu'objet connu depuis le collège, il sert d'appui pour un enseignement plus formel des notions de fonctions croissante et décroissante ; formalisme que les auteurs conçoivent par un recours conjoint aux deux registres algébrique et graphique, par opposition à la présentation plus intuitive du chapitre précédent basée quasi-uniquement sur le registre graphique. Ici, la représentation graphique de fonction est justifiée sur une base algébrique. D'autre part, les variations de la fonction affine sont utilisées selon leur statut outil dans la technique graphique de détermination du signe du binôme. Cette tâche algébrique est donc résolue à l'aide d'un passage dans le cadre fonctionnel qu'implique le recours au registre graphique. Le cadre fonctionnel permet la résolution sur une base plus intuitive de cette tâche algébrique, en retour, la tâche algébrique permet de donner plus de sens aux notions de variations, et donc de fonction, de même qu'elle amène à une meilleure assimilation de la notion de variable.

2.4.4 Analyse de la partie exercices/problèmes

45 exercices/problèmes en tout correspondant aux sections du cours que nous avons retenues relèvent de notre analyse.

2.4.4.1 Analyse des non situations fonctionnelles (32 exercices/problèmes en tout)

32 exercices/problèmes sur les 45 que nous avons retenus sont des non- situations fonctionnelles.

Analyse par cadres et registres utilisés

Nous exclurons le T.P que nous avons signalé dans l'analyse du cours et qui consiste à démontrer le sens de variation d'une fonction affine sur la base de la définition utilisant les inégalités. Nous sommes donc amenés à analyser 31 exercices/problèmes.

Les cadres

Nous constatons, dans ce chapitre également, que seules les situations fonctionnelles sont données dans un cadre de départ non fonctionnel, tous les autres exercices/problèmes s'inscrivent dans un cadre fonctionnel et la résolution de leurs différentes tâches ne supposent pas de changement de cadres.

Les registres

(voir tableau des registres du chapitre 4 du manuel de 2nde en annexe du chapitre III)

Le registre algébrique apparaît dans la majorité de ces exercices/problèmes. Quand il apparaît dans l'énoncé, il détermine le plus souvent la technique selon laquelle la tâche demandée est à résoudre. En tant que registre d'arrivée, il est obtenu par des tâches de représentation de fonction ou d'expression fonctionnelle. Seuls 6 exercices proposent des tâches à résoudre sans le recours au registre algébrique. Mais il faut souligner que les élèves peuvent choisir une technique graphique, au lieu de la technique algébrique qui semble être attendue par contrat, pour la résolution de tâches de variations ou de signe du binôme. Nous reviendrons sur ce point dans l'analyse des tâches/techniques.

Le registre verbal/symbolique apparaît dans 8 exercices/problèmes toujours présent dans l'énoncé et donc impliquée en tant que registre de départ dans les tâches à résoudre. Nous avons classifié ce registre dans notre chapitre II, comme registre où les fonctions sont définies par l'énonciation de certaines de leurs propriétés. Dans le cas particulier des fonctions affines, il s'agit de la donnée de 2 valeurs de la fonctions et de la précision du fait qu'il s'agit d'une fonction affine.

Le tableau de valeurs est d'utilisation rare. Il remplace le registre verbal/symbolique, dans deux exercices et est impliqué en tant que registre d'arrivé dans un seul exercice/problème. Soulignons qu'il est explicitement sollicité dans les exercices/problèmes où nous le signalons, et que tous les autres sont à résoudre sans y recourir.

Le tableau de variations est relativement rare. Ce qui se comprend par le fait qu'il s'agit de fonctions affines, pour lesquelles donc la détermination du sens de variation ne nécessite pas le passage par le tableau de variation. Cependant, nous soulignons, qu'il est explicitement sollicité dans 4 exercices/problèmes tous consacrés à la détermination du signe d'une fonction affine par le tableau de variation. Donc a priori pour des tâches, où ce registre n'est pas véritablement indiqué, même si son utilisation peut se justifier dans le cas précis des fonctions affines. Nous reviendrons sur ce registre et la tâche concernée dans l'analyse des tâches/techniques

Le registre graphique est d'utilisation fréquente modérée. Il est sollicité explicitement en tant que registre de départ ou d'arrivée dans 10 exercices/problèmes, essentiellement impliqué dans des tâches de conversion de fonction. Il peut permettre la résolution de l'exercice dans 4 autres cas, même si la technique implicitement demandée est une technique déterminée par le registre algébrique ou verbal symbolique. Enfin, il est remplacé par le registre de tableau de variation dans 4 exercices/problèmes. Dans ce cas, l'objectif est probablement de profiter de la congruence entre les deux registres.

Relativement au chapitre précédent, nous constatons une variété de registres de représentation sensiblement identique dans la banque d'exercices/problèmes, mais une différence au niveau du nombre d'apparition de chacun d'eux : la sollicitation des différents registres, autres que le registre algébrique, a tendance à diminuer ainsi que la variété des tâches dans lesquels ils sont impliqués. Le registre algébrique devient prépondérant. Ceci s'explique certainement par la volonté de réaliser une première formalisation des concepts introduits au chapitre précédent, via le cas particulier de la fonction affine.

Analyse par tâches et techniques

(voir tableau des tâches et techniques du chapitre 4 du manuel de 2nde en annexe du chapitre III)

Les tâches demandées de façon explicite ou implicite que l'on retrouve dans ces 31 exercices/problèmes sont les suivants :

- "Reconnaissance d'une fonction (affine)" (dans 4 exercices/problèmes),
- "Représentation de fonction" (dans 10 exercices/problèmes + 4 fois si l'élève choisi une technique graphique pour certaines tâches d'étude du sens de variation),
- "Expression de fonction"(dans 11 exercices/problèmes dont une seule fois où elle est implicite),
- "Etude du sens de variation" (dans 8 exercices/problèmes),
- "Détermination du signe d'une fonction" (dans 5 exercices/problèmes),
- "Image/antécédent" (dans 6 exercices/problèmes dont 2 implicite),
- "Equation/inéquation" (dans 3 exercices/problèmes),
- "Comparaison de fonctions" (dans 1 exercices/problèmes).

Ils apparaissent dans les exercices principalement en tant que tâches isolées : 25 exercices sur 32 ne demandent que la réalisation d'une seule tâche. Ils se présentent plus rarement en association de deux tâches, et jamais en association de plus de deux tâches. Nous allons considérer plus en détail chacun de ces types de tâches pour mettre en évidence la technique attendue et préciser ceux dont la résolution impose également celle d'autres sous-tâches.

La tâche de reconnaissance d'une fonction affine apparaît dans la grande majorité des cas (4 exercices sur 5) en tant que tâche unique. Les fonctions sont données dans le registre algébrique ou dans le registre graphique. Il s'agit là d'une application directe du cours qui vise à distinguer une classe particulière de fonctions.

Il va de soi que cette tâche apparaît en tâche unique, elle ne serait pas justifiée dans un exercice composé de plusieurs tâches devant concerner une fonction affine puisque le chapitre est uniquement consacré à ce type de fonctions. Par ailleurs, remarquons l'importance qu'accordent les auteurs à la reconnaissance de cette classe de fonctions relativement au peu d'importance accordée, dans le chapitre précédent, à la reconnaissance d'une fonction en général

La tâche de représentation de fonction est explicitement demandée dans 10 exercices. Dans 6 d'entre eux, il s'agit de représenter graphiquement une fonction donnée par son expression algébrique ; dans l'un de ces 6 exercices, la conversion registre algébrique/tableau de valeurs est également demandée. Dans 4 exercices, il s'agit de la représentation du tableau de variation à partir de l'expression algébrique de la fonction.

Soulignons que dans 5 des 6 exercices où une représentation graphique est à faire, la fonction est affine par intervalles. Les auteurs n'ont pas insisté sur la tâche de représentation graphique d'une fonction affine, connue depuis la troisième et donc jugée routinière. Le recours aux fonctions affines par intervalles permet d'une part de renouveler cette tâche qui devient plus problématique. Mais en retour, cette tâche permet de se familiariser avec ces fonctions qui n'ont pas été étudiées en cours. Un exercice rédigé permet de préciser la technique correspondant à cette tâche. Elle permet en particulier de désigner les valeurs particulières (bornes des intervalles) de ces fonctions pour lesquelles il est nécessaire de calculer les images. Certains exercices prévoient alors des tâches d'image/antécédent ou de tableau de valeurs en sous-tâches préalables, alors que d'autres, dans le but de rendre cette tâche plus complexe, ou plus routinière, laissent ces sous-tâches à l'initiative de l'élève.

Concernant la tâche de représentation de fonction où un tableau de variation est demandé, contentons-nous pour l'instant de remarquer que l'un des objectifs de cette tâche est la familiarisation avec le tableau de variation, registre dont la maîtrise est, dans ce manuel, entièrement laissé à la charge de l'élève. Nous analyserons cette tâche de façon plus précise lors de l'analyse de la tâche de signe de fonction à laquelle elle est toujours associée.

La tâche d'expression de fonction est explicitement demandée dans 9 exercices, toujours comme tâche unique. Elle correspond dans un seul de ces exercices à établir l'expression algébrique d'une fonction affine donnée dans le registre graphique. Dans deux autres exercices, la même tâche est rendue plus problématique, dans la mesure où les fonctions concernées sont affines par intervalles. Comme pour la tâche de représentation graphique de fonctions affines par intervalles, celle-ci vise également à la familiarisation avec ces fonctions.

Enfin, les 8 autres exercices correspondent à une série du type "définir la fonction affine vérifiant f(-2) = -1 et f(4) = 2". La tâche correspondant aux exercices de ce type est d'après notre classification une tâche d'expression fonctionnelle dont le registre de départ est le registre verbal symbolique, soit une tâche pour laquelle l'expression algébrique doit être déterminée à partir de la donnée de certaines de ces propriétés. Il nous semble que de façon générale, cette tâche vise une meilleure familiarisation avec la classe de fonction affine, et en particulier avec le fait que deux points de la fonction suffisent à la caractériser entièrement. Deux techniques de résolution sont valables. La première consiste à utiliser une première fois, la formule donnant le coefficient directeur ($[(f(x_1) - f(x_2))/(x_1 - x_2)] = a$), à l'aide des deux points donnés dans l'énoncé, afin de déterminer la valeur du coefficient, puis à utiliser une Seconde fois cette formule afin d'obtenir l'équation de la fonction. La deuxième technique consiste à résoudre un système d'équations en se servant de la représentation générale d'une fonction affine dans le registre symbolique-algébrique et des deux points de la fonction donnés dans l'énoncé. Puisque la résolution d'un système de deux équations à deux inconnues, n'est envisagée dans ce manuel, qu'après le chapitre sur les fonctions affines, il nous semble que la première technique est celle favorisée et ce d'autant plus qu'elle fait appel à des calculs plus simples, limitant quelque peu le recours au registre algébrique.

La tâche de variation de fonction apparaît dans 8 exercices/problèmes : Elle est explicitement demandée quatre fois en tant que tâche unique. Dans 4 autres exercices, elle est impliquée en tant que sous-tâche de la tâche de signe de fonction. Dans ce dernier cas nous l'analyserons avec la tâche de signe.

En tant que tâche unique, la fonction affine s'exprime alors une seule fois dans le registre algébrique et trois fois dans le registre verbal/symbolique, c'est à dire qu'elle y est uniquement définie par la donnée de deux valeurs et de leurs images correspondantes. Il nous semble que la technique attendue par contrat est celle basée sur le signe du coefficient directeur mais nous ne pouvons pas exclure que certains élèves choisissent la technique graphique qui suppose alors que la représentation graphique de la fonction soit réalisée en tant que sous-tâche implicite. Si la technique choisie, est celle du coefficient directeur, celle-ci suppose dans le cas des fonctions exprimées dans le registre verbal symbolique, que celui-ci soit déterminé en tant que sous-tâche implicite. Le recours au registre verbal/symbolique fait de cette tâche de variation une tâche moins routinière que celle pour laquelle la fonction est exprimée dans le registre algébrique. Par ailleurs, et comme nous l'avons souligné pour la tâche d'expression fonctionnelle dans le cas d'une fonction donnée dans le registre verbal/symbolique, il nous semble que l'utilisation de ce registre permet de souligner la propriété des fonctions affines que constitue leur caractérisation par deux de leurs points uniquement.

La tâche de signe de fonction, fait l'objet de cinq exercices dont un T.P. Dans un seul de ces exercices, la fonction est donnée uniquement dans le registre graphique. L'expression algébrique n'est pas demandée. La tâche est à résoudre par la technique de lecture graphique institutionnalisée dans le cours.

Dans le T.P, une technique équivalente à celle exposée dans le cours, est présentée. Cependant le registre support de cette technique est le registre du tableau de variations au lieu du registre graphique. La tâche de variation y est explicitement demandée. Cette technique est exigée dans les 3 autres exercices, mais la tâche de variation n'y est plus explicite, elle est implicitement incluse dans celle de tableau de variations. Plusieurs constatations sont à faire ici :

- Nous avons fait remarquer lors de l'analyse des registres de ce chapitre, que le tableau de variations n'était impliqué que dans cette tâche. Ce qui se conçoit dans la mesure où les fonctions concernées sont des fonctions affines, et que leurs variations peuvent être *lues* à partir de l'expression algébrique de la fonction ; les auteurs préfèrent insister sur cette dernière technique, en tant que nouvelle technique institutionnalisée dans ce chapitre. Il nous semble que dans ce contexte la tâche de signe vise à donner un prétexte pour la traduction du sens de variation dans les registres graphique ou du tableau de variation, préparant ainsi l'étude du signe de fonctions plus complexes et au-delà l'étude des variations à partir du signe de la dérivée. Quelques remarques sont à faire quant au recours au tableau de variations pour cette tâche :

- Il est a priori étonnant que seul le registre du tableau de variations soit envisagé au niveau de la technique de résolution, alors que le recours au registre graphique se limite au cours. Il nous semble que cette tâche/technique apparaissant dans les exercices est ici concevable précisément par le fait que les fonctions concernées sont affines, et donc ne s'annulent qu'une seule fois, relativement à d'autres fonctions où le registre graphique sera largement préféré, car il permet mieux de visualiser les points où la fonction s'annule. Il nous semble que dans ce chapitre comme dans le chapitre 1, et à travers des tâches où le tableau de variations n'est a priori pas un registre approprié, l'objectif visé au-delà de la familiarisation avec la technique de résolution de la tâche, est la familarisation avec le registre lui-même, et dans ce cas précis avec la technique de passage de la détermination du sens de variation de la fonction à sa consignation dans le tableau de variation. Pour ce faire, les auteurs exploitent la congruence entre les deux registres. Soulignons que, pour la première fois, le registre de tableau de variations est utilisé selon la fonction précise qu'il aura par la suite.

La tâche d'image/antécédent apparaît dans 6 exercices problèmes. Elle n'est jamais impliquée en tant que tâche isolée, mais toujours en association avec une autre tâche :

- associée dans deux 2 exercices à une tâche d'équation/inéquation elle vise à donner à cette dernière une dimension fonctionnelle, soit à aider à faire le lien entre la tâche d'équation et celle de recherche d'antécédent.
- Dans 4 exercices, elle est associée à une tâche de représentation graphique de fonction par intervalles. Deux exercices demandent explicitement cette tâche, deux autres ne la demandent pas, et visent à en faire une sous-tâche routinière dans la technique de représentation des fonctions affines par intervalles. Elle peut cependant dans ce dernier cas être réalisée à l'initiative de l'élève.

Il nous semble par conséquent que les tâches d'image et d'antécédent ne visent pas directement les notions d'image et d'antécédent. L'intérêt de ces tâches réside dans leur rôle au niveau de la résolution de la deuxième tâche à laquelle elles sont associées dans un exercice donné. Par conséquent, il ne nous semble pas qu'elles soient proposées dans le but de favoriser une appréhension de la fonction selon son statut processus.

Les tâches d'équation/inéquation et de comparaison sont véritablement marginales dans se chapitre. Il s'agit d'occasions de rencontre implicite avec les techniques de résolution des tâches d'équation/inéquation dans le cadre fonctionnel, et avec la notion de comparaison de fonctions. Des occasions de même types ont été signalées dans le chapitre 1. Les tâches et les techniques présentées à l'occasion de ces exercices seront institutionnalisées par la suite.

Les fonctions affines étant des fonctions familières aux élèves, les exercices correspondant aux non situations fonctionnelles visent à approfondir la connaissance de ces fonctions, à les caractériser en tant que classe en insistant sur leurs propriétés spécifiques. Le nouvel objet d'enseignement, variations des fonctions affines, est abordé dans ce nouveau contexte. Cette approche de la fonction affine, définissant de telles priorités dans l'enseignement, explique qu'elle ne puisse être appréhendée selon son aspect processus : il y a donc peu de place réservée au registre du tableau de valeurs, et la calculatrice n'est jamais sollicitée. Des tâches moins routinières sont envisagées pour une fonction connue, en faisant intervenir d'autres registres comme le registre verbal/symbolique.

Elles permettent également, en tant que fonctions familières, d'introduire les fonctions affines par intervalles, ainsi que d'assurer la maîtrise du tableau de variation qui pour la première fois depuis le début de l'enseignement sur les fonctions est engagé selon le rôle précis qu'il conservera par la suite. Fonctions affines par intervalles et tableau de variations sont entièrement laissés à la charge de l'élève puisqu'ils n'apparaissent qu'en exercice. Ceci s'inscrit probablement dans le cadre général d'un enseignement interactif où des espaces de découverte où l'élève est plus responsable et plus actifs dans la construction de ses connaissances, lui sont aménagés.

Cependant, si la maîtrise du tableau de variations, est laissée à la charge de l'élève sur la base de la congruence avec le registre graphique, le fait que les fonctions par intervalles ne soient pas institutionnalisées dans le cours soulève la question de savoir si les élèves pourront effectivement s'approprier cet objet, dont l'importance réside essentiellement dans le fait qu'il propose un exemple de fonctions, important pour une conceptualisation plus générale de la notion de fonction. Nous reviendrons sur ce point au cours de l'analyse du chapitre suivant.

L'équilibre plus grand dans ce chapitre relativement au chapitre 1 du manuel, entre le registre algébrique et le registre graphique, traduit une volonté de formaliser graduellement l'enseignement en s'appuyant moins sur le registre graphique et davantage sur le registre algébrique. Ainsi, le registre graphique n'est plus incontournable dans les tâches proposées, relativement aux nouveaux outils liés à l'étude des variations des fonctions et au signe des fonctions, il n'intervient plus au niveau de la résolution des exercices. Il continue cependant à avoir un rôle d'importance dans les justifications apportées dans le cours lors des démonstrations des résultats institutionnalisés. Cependant, il nécessite est lui-même d'être validé par le registre algébrique.

2.4.4.2 Les situations fonctionnelles (13 exercices/problèmes)

Analyse par cadres et registres utilisés

Les cadres

Les 12 situations fonctionnelles de ce chapitre sont donc énoncées dans un cadre non fonctionnel et supposent alors une modélisation. Cette modélisation est toujours à la charge des élèves, de plus la fonction modélisant la situation est toujours à exprimer dans le registre algébrique (ce qui n'était pas le cas dans le premier chapitre).

Les registres

(voir tableau des registres du chapitre 4 du manuel de 2nde en annexe du chapitre III)

Le registre graphique est encore très présent et nous verrons que, souvent, la tâche de représentation graphique ne nécessite pas d'être justifiée sur la base de l'expression algébrique de la fonction. Ce qui situe cet enseignement sur la base d'une approche intuitive et qui, explique, que *le registre algébrique*, n'y soit pas encore prépondérant.

Le tableau de variations est absent de ces situations fonctionnelles, ce qui n'est pas étonnant puisqu'on a ici des fonctions monotones et un critère algébrique permettant de déterminer le sens de variation.

Le tableau de valeurs est marginal, il n'apparaît que rarement car il est, en général, remplacé par des tâches d'images ou d'antécédent. L'explication réside dans le fait que les fonctions à établir sont affines et que deux points suffisent pour caractériser les fonctions de cette classe.

Analyse par tâches et techniques

(voir tableau des tâches et techniques du chapitre 4 du manuel de 2nde en annexe du chapitre III)
Nous exclurons de notre analyse par tâches et techniques l'une des situations fonctionnelles pour l'avoir jugée trop atypique de part l'objectif visé. Il s'agit d'une activité préparatoire pour laquelle la tâche unique demandée est d'exprimer algébriquement chacune des 5 situations proposées, afin de reconnaître parmi elles, celles qui sont affines. Cette activité vise donc à préparer le cours en introduisant les fonctions affines sur une base concrète. La tâche de modélisation, en particulier, n'y est pas jugée problématique, d'ailleurs 4 sur 5 situations sont d'origine géométrique et donc supposées familières pour les élèves.

Nous avons donc 12 situations fonctionnelles à analyser qui sont classées aussi bien en activité, qu'en T.P, exercices et problèmes. D'ailleurs les 3 problèmes de ce chapitre sont des situations fonctionnelles.

Les tâches demandées que l'on retrouve dans ce type d'exercices sont les suivantes :

- Représentation de fonction" (dans 9 exercices)
- "Expression de fonction" (dans 8 exercices),
- "Reconnaître une fonction (affine)" (dans 2 exercices),
- "Image/antécédent" (dans 8 exercices),
- "Comparaison de fonctions" (dans 6 exercices)
- "Domaine de définition" (dans 2 exercices),
- "Réciproque d'une fonction (affine)" (dans un 1 exercice).

Les tâches les plus fréquentes pour les situations fonctionnelles sont les tâches d'expression et représentation de fonction. La tâche de représentation de fonction est principalement celle de représentation graphique. En effet, la seule autre représentation de fonction apparaissant dans les situations fonctionnelles est l'obtention d'un tableau de valeurs directement à partir du registre verbal de la situation fonctionnelle. Mais elle est rarement demandée, et de plus, quand elle l'est, la tâche de représentation graphique l'est également. Nous avons distingué 3 types de situations fonctionnelles, en fonctions du rôle et du statut des registres graphique et algébrique dans chacune d'elles :

- le premier type, au nombre de 3, pour lesquels l'accent est mis sur la propriété de variations proportionnelles caractéristique de la classe des fonctions affines,
- le deuxième type, au nombre de 5, pour lesquelles l'expression algébrique si elle apparaît en tant que tâche explicite ou implicite, n'est à résoudre qu'après la représentation graphique de la fonction.
- Le troisième type, au nombre de 4, plus classique, pour lesquelles l'expression algébrique est demandée explicitement. Elle précède et justifie la représentation graphique de la fonction, si celle-ci est à réaliser.

a) *Le premier type de situations fonctionnelles* se caractérise par le fait que la tâche d'image/antécédent y est une tâche importante puisque 2 de ces 3 situations se limitent à ces tâches. Elles ne peuvent être résolues sans qu'il ne soit supposé que la fonction est affine, la technique est donc une technique propre aux fonctions affines. Considérons l'exercice suivant :
"le prix de location d'une voiture comporte une partie fixe et une partie proportionnelle au kilométrage parcouru. La location coûte 660 F pour 110 km et 1032 F pour 220 km.
1° Quel est le prix de la location pour une distance parcourue de 300 km ?
(..)" (Exercice 69, p.93)

Dans le cas de cet exercice, cette information est implicitement donnée dans l'énoncé par la description de la situation "comporte une partie fixe et une partie proportionnelle", pour les deux autres exercices dont un est classé T.P, l'information est plus explicite. Comme il n'est pas demandé d'établir l'expression algébrique de la fonction, nous pensons que cette formulation de l'énoncé vise à favoriser l'utilisation de la technique basée sur la formule donnant le coefficient directeur, plutôt que sur celle reposant sur la résolution d'un système à deux équations (voir, ci-dessus, la tâche d'expression fonctionnelle pour une fonction affine donnée dans le registre verbal-symbolique). Cette première technique souligne, à notre avis, de façon plus claire la spécificité de la classe des fonctions affines qui fait que deux de ses points suffisent pour la caractériser. D'autres tâches mettant l'accent sur cette propriété sont également proposées dans les non situations fonctionnelles.

b) *Le deuxième type de situations fonctionnelles* se caractérise, nous l'avons dit par le fait que la représentation graphique précède l'expression algébrique. Celle-ci n'est pas toujours déterminante dans la résolution des tâches demandées par la suite, d'ailleurs dans 2 de ces 5 situations fonctionnelles, l'expression algébrique n'est pas une tâche à réaliser, alors que pour une troisième elle en est la dernière. Ces situations fonctionnelles apparaissent donc comme des situations pour lesquelles la fonction qui modélise la situation est à obtenir dans le registre graphique. Dans le chapitre 1 de ce manuel où de telles situations ont été repérées, nous avons conclu que les auteurs visaient, à travers elles, une approche intuitive et concrète de la fonction en tant qu'outil pour l'étude de situations réelles. Ici, il s'agit également d'aborder les fonctions affines par intervalles sur une base concrète, et de se familiariser avec la tâche de modélisation de ce type de fonctions puisque 4 sur 5 de ces situations fonctionnelles sont modélisables par de telles fonctions.

La modélisation s'appuie, généralement, sur une phase de familiarisation avec la fonction dans le cadre numérique, par la résolution de tâches d'image à partir du registre verbal de la situation. Mais les élèves sont néanmoins guidés implicitement dans leurs démarches car les situations leurs sont familières, et justifient par elles-mêmes qu'on ait une fonction affine. Considérons, le problème suivant :

Un train part de A à zéro heure. Entre chaque arrêt on suppose que sa vitesse est constante et égale à 120 km/h. Il s'arrête 3 mn en B et en D, et 4 mn en C (les distances, AB, BC, CD et DE sont données). Représenter graphiquement, sur du papier millimétré, le mouvement de ce train (mettre le temps en abscisse, et la distance à A en ordonnée). Déterminer les heures d'arrivée et de départ aux gares B, C, D et l'heure d'arrivée en E.

Les élèves savent, depuis le collège, qu'à vitesse constante, le temps relativement à la distance est une fonction affine. Les périodes d'arrêt doivent pouvoir être interprétées comme étant des intervalles où la fonction est constante. Dans ce contexte, on comprend pourquoi les tâches d'image dans la phase de familiarisation relevant du cadre numérique, se limite au calcul de deux valeurs pour la fonction affine, et au calcul de deux valeurs pour chaque branche dans le cas des fonctions affines par intervalles. Ceci explique de même pourquoi le tableau de valeurs est peu sollicité dans ces situations.

La représentation graphique est justifiée par l'obtention de ces deux points. Quand la tâche d'expression fonctionnelle (dans le registre algébrique) est demandée, l'élève est guidée par le fait qu'il connaît la forme générale de la fonction à établir, et notamment dans le cas d'une fonction affine par intervalles, les différents intervalles à prendre en compte.

L'enseignement des fonctions affines, en tant que cas particulier de fonctions, est laissé entièrement à la charge de l'élève, puisqu'elles sont absentes du cours. Les situations fonctionnelles en proposent une approche concrète, le registre graphique constitue un support intuitif (de l'avis des auteurs) pour leur mise en place.

c) *Le dernier type de situations fonctionnelles* : Les 4 situations concernées sont plus classiques. L'expression algébrique est toujours demandée. La phase numérique de familiarisation avec la situation est éventuellement laissée à la charge de l'élève, car elle n'est explicitement demandée que dans une seule de ces 4 situations. Quand la représentation graphique est demandée, et si d'autres tâches lui succèdent, elles sont à résoudre par les deux techniques algébrique et graphique.

Il nous semble que les auteurs visent à mettre en place, à travers ce cas particulier de situations que modélisent des fonctions affines, des outils pour l'étude d'autres situations fonctionnelles :

- l'accent est mis sur la technique de modélisation, et c'est dans ce but que la phase numérique est à la charge de l'élève ; ceux-ci doivent apprendre à la mettre en œuvre si nécessaire.
- Le registre graphique semble y perdre son statut au profit du registre algébrique qui devient respectivement un registre aidant à conjecturer les résultats et un registre servant à justifier les résultats.

En conclusion, nous avons vu que différents types de situations fonctionnelles sont proposées dans ce chapitre. Chacun d'eux visent un objectif spécifique. Ils permettent de donner une approche plus concrète de la propriété de la proportionnalité des variations des fonctions affines, ainsi que des fonctions affines par intervalles, en tant que cas particulier de fonctions, non institutionnalisés dans le cours. Ces deux objectifs étaient également visés dans les situations non fonctionnelles. Ils visent à mettre en place les outils pour l'étude d'autres situations selon un modèle plus classique, précisant déjà les rôles ultérieurs des registres graphiques et algébriques.

2.4.5 Conclusion

Mode d'appréhension visé

Les fonctions affines étant des fonctions familières pour les élèves, leur enseignement est organisé de façon à en approfondir la connaissance et à les caractériser en tant que classe particulière, dans la mesure où d'autres classes de fonctions devront être étudiées par la suite. Les objectifs d'enseignement qui visent alors leurs propriétés spécifiques et la traduction de ces propriétés dans les registres algébrique, graphique et verbal-symbolique, ainsi que l'étude des variations de la fonction affine selon une approche plus formelle expliquent que peu de place puisse être réservée à des tâches visant une appréhension de la fonction selon son aspect processus. La place réservée aux variations à travers des exercices l'impliquant selon son statut objet, et outil, mais aussi la place réservée à la maîtrise du tableau de variations laissent plutôt penser à une appréhension de la fonction en tant que loi de variation. Par ailleurs, le passage assez rapide à l'étude d'une classe de fonctions qui ne permet pas d'envisager d'autres catégories de fonctions peut constituer une entrave pour une conception plus générale de la notion de fonction.

Un enseignement reliant le nouveau à l'ancien, et soucieux d'une évolution graduelle vers une formalisation plus grande

Outre les notions liées aux fonctions affines en tant que classe, ces fonctions familières servent de base pour l'appropriation des fonctions affines par intervalles et du tableau de variation. Mais les fonctions affines, qui donnent lieu à des calculs plus simples, servent également à avancer la formalisation de la notion de variation, maintenant institutionnalisée sur la base de la définition des inégalités, ainsi qu'à mettre en place des outils nouveaux pour l'étude ultérieure d'autres variations de fonctions et d'autres signes. Les notions, nous l'avons constaté, sont formalisées de façon graduelle : le cas des fonctions affines permet de conserver une assise graphique, même si le registre graphique ne suffit plus à lui seul à justifier les résultats ; si une technologie plus formelle est introduite, elle n'est pas encore engagée au niveau de la justification des techniques de résolution des tâches correspondantes.

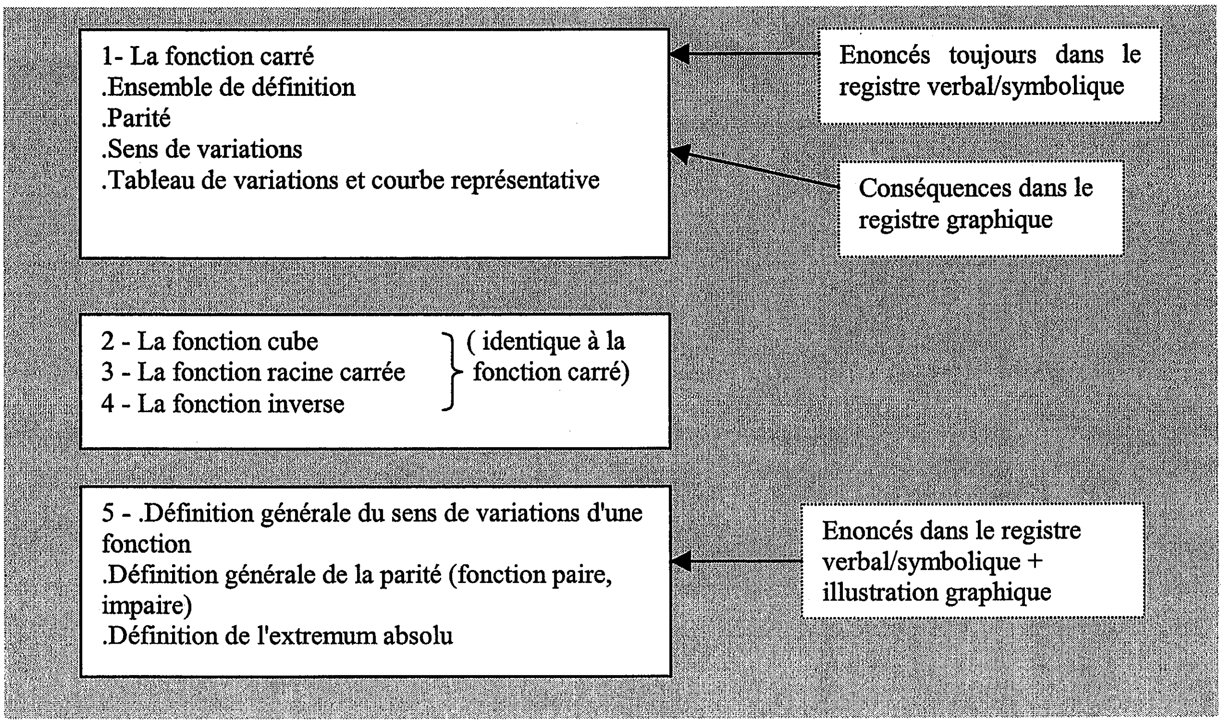
Registres et cadres sollicités

Dans un esprit de continuité avec le chapitre précédent, et dans le cadre d'un enseignement favorisant une approche intuitive et concrète des nouveaux objets d'enseignement, une place importante est réservée aux situations fonctionnelles qui permettent une approche concrète des notions à mettre en place (notamment la propriété des variations proportionnelles de la fonction affine, et les fonctions affines par intervalle) et permettent de varier les cadres mettant en jeu les notions nouvelles dans le but d'une meilleure appropriation de celles-ci.

Le registre graphique est particulièrement sollicité pour l'introduction d'objets nouveaux alors que s'il intervient également quand des notions plus familières sont impliquées, il ne suffit plus à lui seul pour justifier les résultats à établir, le registre algébrique intervient alors en interaction avec lui au niveau de la justification ; c'est également dans le registre algébrique que les résultats à retenir sont institutionnalisés. Les autres registres sont secondaires relativement à ces registres principaux ce qui se traduit par leur implication dans des catégories de tâches restreintes.

2.5 Description et analyse du chapitre 6 : "Fonctions classiques"

2.5.1 Organigramme du cours



2.5.2 Description, commentaire et analyse du cours

Ce chapitre intitulé "Fonctions classiques" porte sur les fonctions de référence, objets d'enseignement de la classe de Seconde, autres que la fonction affine et que les fonctions trigonométriques, il nous concerne donc dans sa totalité. Les fonctions de référence étudiées ici sont la fonction carré, la fonction cube, la fonction racine carrée et la fonction inverse. Chaque fonction fait l'objet d'une section distincte, la dernière section du chapitre est consacrée à l'institutionnalisation des notions relatives aux fonctions quelconques vues lors de l'étude des cas particuliers de fonctions.

2.5.2.1 L'objet d'enseignement : fonction carré $f : x$ x^2

Dans cette section les notions d'ensemble de définition, de parité (fonction paire), de sens de variation, de tableau de variations, de courbe représentative et d'extremum (minimum) sont mises en place relativement à la fonction carré. Il ne s'agit donc pas, pour l'instant, de les présenter dans le cas général, ce qui explique peut-être qu'aucune définition "officielle" ne soit donnée.

L'objet d'enseignement : ensemble de définition de la fonction carré.

L'ensemble de définition de cette fonction est présenté dans le registre verbal/symbolique du cadre fonctionnel : "Pour tout nombre réel x, le nombre x^2 existe".

Contrairement aux notions de sens de variation et d'extremum, c'est la première fois que le terme ensemble de définition est utilisé dans le manuel, au niveau du cours. Cette notion est cependant apparue dans de rares exercices/problèmes sous une forme contextualisée dans des situations fonctionnelles à travers la question "quelles valeurs peut prendre x ?". Ici, la notion d'ensemble de définition est vue à travers un exemple particulier selon les indications du programme. Il est possible de remarquer que les auteurs ne font pas allusion au fait qu'à chaque valeur de x, ne correspond qu'une seule valeur x^2.

L'objet d'enseignement : parité de la fonction carré

La propriété de parité (fonction paire) est présentée et justifiée dans le registre verbal/symbolique du cadre fonctionnel : "Pour tout nombre réel x, $f(-x)= (-x)^2 = x^2 = f(x)$."

Cette propriété est traduite à l'aide d'un commentaire et d'une illustration dans le registre graphique. Le cadre géométrique est ici le cadre sollicité.

L'objet d'enseignement : sens de variation de la fonction carré

Le sens de variation est donné, sur l'intervalle $]0; +\infty[$, et ce résultat est justifié dans le registre verbal/algébrique du cadre fonctionnel par la technique des inégalités sur la base des définitions de fonction croissante, fonction décroissante, données dans le chapitre "Fonctions affines" :

"Pour tous nombres réels a et b tels que $0 \leq a < b$, on a : $a^2 < b^2$."

Ici également, un commentaire précise la signification de cette propriété au niveau de la représentation graphique de la fonction : "ça monte sur $]0; +\infty[$".

Le sens de variation de la fonction sur l'intervalle]- ; 0[est déduit de la parité de la fonction. C'est donc le cadre géométrique qui est ici exploité pour justifier ce résultat du cadre fonctionnel.

La notion de parité est utilisée, selon son statut outil, pour justifier des variations de la fonction sur l'intervalle]- ; 0[. Les auteurs n'ont pas souhaité utiliser, sur le deuxième intervalle, la technique des inégalités probablement dans le but de réduire la technicité algébrique et de se baser sur l'intuition graphique. Cette approche permet également d'utiliser la notion de parité selon son statut outil, et de faire fonctionner la dialectique outil/objet relativement à cette notion.

Les objets d'enseignement : Tableau de variations et courbe représentative de la fonction carré

Nous les présentons simultanément conformément à leur présentation dans le manuel.

Le tableau de variations est dressé et ainsi justifié : "les résultats précédents sont rassemblés dans un **tableau de variations**" (en gras dans le texte).

Aucune autre indication quant à la méthode de construction du tableau de variations n'est indiquée. Nous avons vu dans les chapitres précédents que la maîtrise du tableau de variation était entièrement à la charge des élèves à travers des exercices appropriés. Par ailleurs, dans le chapitre "Fonction affine", la tâche proposée impliquant ce registre visait précisément l'appropriation de la technique de traduction des informations obtenues par l'étude des variations de la fonction dans le registre verbal/symbolique vers le registre du tableau de variations.

Le graphique de la fonction carré est tracé. Aucun point n'apparaît sur le graphique. L'obtention d'un graphique plus précis sera probablement visée dans les exercices/problèmes. Les auteurs nous apprennent que cette courbe est "la parabole d'équation $y = x^2$ ". Un commentaire précise de "bien vérifier que le tableau de variations et la représentation graphique donnent les mêmes variations". La technique de conversion du registre du tableau de variations vers le registre graphique ne fait pas, non plus, l'objet d'un enseignement particulier. N'oublions pas qu'elle a été travaillée en exercice dans le chapitre 1.

L'objet d'enseignement : minimum de la fonction carré

"0" est présenté comme étant le minimum en "0" de la fonction carré.

Ce résultat est également justifié dans le registre algébrique du cadre fonctionnel d'après la technique des inégalités : "Pour tout nombre réel, on a : $x^2 \leq 0$, c'est-à-dire que $f(x) \leq 0$."

Soulignons que c'est la première fois que le minimum (absolu) est rencontré. La définition des inégalités relativement au minimum et au maximum n'a pas encore été vue. La première rencontre avec cette notion se réalise à travers un exemple particulier selon les directives des programmes. Le manuel ne fait pas de lien explicite entre la lecture du minimum dans les registres graphique et du tableau de variations, et le registre algébrique ; mais il est fort possible qu'il soit sous-entendu que les professeurs le feront. Ceci explique la raison pour laquelle, il est présenté après le tableau des variations et la représentation graphique de la fonction qui servent probablement ici de registre de conjecture du minimum..

Rappelons que l'extremum local (sans mention de l'adjectif) a été présenté sur une base intuitive dans le registre graphique et en liaison avec les variations de la fonction. Ici, c'est le minimum absolu (toujours sans mention de l'adjectif) qui est institutionnalisé. Aucune relation entre les deux notions n'est réalisée. Le but est peut-être d'envisager une approche implicite de ces deux notions et de leurs différences avant de les préciser ultérieurement de façon explicite.

2.5.2.2 A propos des autres fonctions de référence

Nous nous limiterons à l'analyse de la fonction carré, la présentation des autres fonctions lui étant parfaitement similaire à quelques nuances près, bien sûr, concernant les particularités de chacune d'elles (ensemble de définition différent de R, fonction impaire au lieu de paire, absence d'extremum...).

Les mêmes remarques que celles faites pour la fonction carré doivent être faites ici quant à l'exploitation du registre verbal/symbolique du cadre fonctionnel pour la présentation des résultats, à l'exploitation du registre algébrique du cadre fonctionnel pour justifier certains résultats (concernant les variations et les extremums, en particulier, ou le domaine de définition), à celle du cadre géométrique pour traduire dans le registre graphique les résultats concernant la parité de la fonction. Enfin le registre graphique n'est jamais exploité pour la mise en place des différents résultats. Il sert éventuellement à les illustrer.

Pour chacune des fonctions, l'étude de ses différents aspects, qui font l'objet d'une justification dans le registre algébrique, permet d'obtenir sa représentation graphique. Les différentes fonctions sont donc implicitement étudiées selon un plan précis dont l'aboutissement est l'obtention de la représentation graphique. Nous soulignerons en particulier le fait que la détermination du minimum dans le cas de la fonction racine carrée se réalise avant la représentation graphique, par la technique des inégalités. Ceci confirme que la position de la tâche d'extremum dans le cas de la fonction carré se justifie par le fait que la notion et sa justification selon la technique des inégalités étaient rencontrées pour la première fois, aussi les auteurs ont-ils envisagé de le conjecturer dans un premier temps. Une fois la notion introduite, la tâche lui correspondant prend sa position habituelle dans le plan classique d'une étude de fonction.

2.5.2.3 Les objets d'enseignement : sens de variation, parité, extremum.

Ces notions sont institutionnalisées dans le cas général, cette fois, dans la dernière section du chapitre. Il s'agit donc de véritables définitions quoique ce terme n'apparaisse jamais.

Les technologies que constituent les définitions des inégalités dans le cas des variations et de l'extremum sont institutionnalisées. Elles ont été impliquées dans le cours à travers des exemples particuliers dans des tâches de variations et d'extremum. On peut donc supposer que dès lors les tâches de variations et d'extremum pourront être justifiées par la nouvelle technique des inégalités.

Soulignons que dans cette section non plus, le lien entre extremum et variations n'est pas pris en charge par le cours, ce qui se conçoit dans la mesure où l'extremum est ici l'extremum absolu, de même qu'aucune relation n'est établie entre l'extremum (local) du premier chapitre, et l'extremum (absolu) de ce chapitre. Rappelons que la notion d'extremum local n'est pas au programme.

2.5.3 Synthèse de l'analyse du cours

Ce chapitre présente les fonctions usuelles (ou de référence) selon un double objectif : d'une part, ces fonctions sont elles-mêmes objet d'enseignement, et d'autre part, elles servent de point d'appui pour l'institutionnalisation des différentes notions relatives à l'étude de fonctions que sont les notions de sens de variation, d'extremum, et de parité à mettre en place en classe de Seconde. En cela, l'organisation de ce chapitre nous rappelle celle du chapitre "Fonctions affines" où justement les fonctions affines présentaient un double objectif similaire. Cependant du fait de leur particularité, les fonctions affines ont uniquement permis d'introduire, la notion de sens de variations.

Mais l'introduction de la notion de sens de variations d'une fonction, souligne l'approche graduelle et progressive de l'enseignement qu'ont envisagée les auteurs : Elle est institutionnalisée selon une approche intuitive à l'aide du registre graphique dans le chapitre d'introduction ; puis, sur la base de l'exemple particulier de la fonction affine et toujours avec le registre graphique comme support intuitif, la notion est revue de façon plus formelle et la définition des inégalités est institutionnalisée. Enfin, dans ce chapitre, cette définition est exploitée à un niveau technologique et justifie une nouvelle technique de résolution de la tâche de variations.

De façon cohérente avec une institutionnalisation des différentes notions concernées sur une base plus formelle, les nouvelles positions des registres algébrique et graphique, déjà constatées dans le chapitre sur les fonctions affines, s'affirment. Le registre algébrique est clairement le registre dans lequel les différentes propriétés des fonctions sont étudiées et par là-même justifiées. Les définitions maintenant énoncées dans le registre verbal-symbolique, imposent de nouvelles techniques, algébriques cette fois, relativement aux techniques de lecture graphique ou du tableau de variation. Ceci s'accorde également avec le fait que la représentation graphique de fonction devient clairement dans ce chapitre un objectif de l'étude de fonctions. Le tracé d'une fonction ne peut plus alors être utilisé pour déterminer ses variations ou ses extremums. C'est l'inverse qui se produit maintenant, la représentation graphique se doit d'être justifiée par le recours au registre algébrique et de fait, la tâche emblématique d'étude de fonction sous sa forme classique prend corps dans ce chapitre.

Cependant l'introduction d'une nouvelle notion se fait encore en prenant appui sur un autre registre que le registre algébrique, en l'occurrence le registre graphique ou du tableau de variations, comme nous avons pu le voir à travers la première rencontre avec le minimum (absolu). Par ailleurs, des tentatives sont faites pour limiter le recours au registre algébrique quand cela semble possible. Nous en avons eu un exemple à travers l'exploitation de la parité dans le cadre géométrique pour justifier le sens de variation de la fonction carré sur le deuxième intervalle]-   ; 0]. Enfin, dans un souci de donner du sens aux nouvelles notions, elles peuvent être impliquées selon leur double statut objet et outil, comme pour les notions de parité et d'imparité.

Le statut du tableau de variations se précise également : il va servir à rassembler les informations concernant les variations de la fonction afin d'en faciliter le tracé. Dans ce sens l'obtention du tableau de variations se base sur de l'ostension : les élèves observent et reproduiront par la suite. On peut prévoir qu'il y aura peu ou pas d'exercices visant à la maîtrise des techniques de lecture relatives au tableau de variations comme cela était le cas notamment dans le premier chapitre.

2.5.4 Analyse de la partie exercices/problèmes

59 exercices/problèmes ont été retenus comme relevant de notre étude. Il ne nous a pas semblé nécessaire de distinguer ici les situations fonctionnelles des autres exercices. Celles-ci y ont un statut marginal puisqu'elles ne sont qu'au nombre de quatre alors qu'elles représentaient respectivement environ le tiers et le quart des exercices/problèmes dans les chapitres "Vers la notion de fonction" et "Fonctions affines".

2.5.4.1 Analyse par cadres et registres utilisés

Les cadres

La majorité des exercices/problèmes sont énoncés dans le cadre fonctionnel et leur traitement ne nécessite pas de changement de cadre. Nous avons retenu par ailleurs quelques exercices/problèmes qui, énoncés dans le cadre algébrique, nécessitent un changement de cadre pour leur résolution. Il s'agit bien sûr d'équations ou d'inéquations correspondant aux fonctions étudiées qui font intervenir les sous-cadres fonctionnel et des équations du cadre algébrique. Par ailleurs, sur les 4 situations fonctionnelles du chapitre, seules trois nécessitent une conversion vers le cadre fonctionnel à la charge de l'élève, cette conversion étant réalisée dans l'énoncé pour l'une d'entre elles. Par conséquent, si les changements de cadres n'ont que peu d'impact sur l'aspect intuitif des différentes notions étudiées dans ce chapitre, ils présentent une conception nouvelle pour la résolution d'équations et d'inéquations. Enfin, le cadre géométrique se trouve également impliqué dans l'obtention de la représentation graphique de certaines fonctions.

Les registres

(voir tableau des registres du chapitre 6 du manuel de Seconde en annexe du chapitre III)

Le tableau des registres et changements de registres établit clairement *la primauté des registres algébrique et graphique* dans les exercices de ce chapitre. En effet, la grande majorité des exercices de ce chapitre ont recours au registre algébrique. Généralement présent dans l'énoncé, c'est dans ce registre que la fonction est exprimée au départ. Ainsi, sur tous les exercices/problèmes de ce chapitre relevant du cadre fonctionnel, trois seulement ne sont pas exprimés dans le registre algébrique et n'y ont pas du tout recours. Il s'agit de deux exercices énoncés dans le registre du tableau de variations et d'un autre énoncé dans le registre verbal/symbolique pour lesquels une seule tâche est demandée qui ne nécessite pas de changement de registre. Nous reviendrons dans l'analyse des tâches et techniques sur ces exercices pour souligner leur marginalité. Deux autres exercices sont certes énoncés dans le registre verbal/symbolique mais nécessitent pour être résolus une conversion vers le registre algébrique qui apparaît alors que registre de travail.

Si nous excluons ces 5 exercices/problèmes, ainsi que 3 des 4 situations fonctionnelles, 51 exercices/problèmes sont posés dans le cadre algébrique et le registre algébrique : 12 d'entre eux, ne nécessitent aucun changement de registre, 2 d'entre eux sont également énoncés dans le registre graphique, et tous les autres, soient 37 sur 59 exercices, comportent pour l'une de leurs tâches, une représentation graphique de la fonction, soit une conversion du registre algébrique vers le registre graphique. Quant aux trois situations fonctionnelles que nous avons exclues, le passage vers le cadre fonctionnel nécessite, dans leur cas, une première conversion vers le registre algébrique, puis une représentation graphique de la fonction modélisée. Ainsi les registres graphique et algébrique sont de loin les registres les plus importants de ce chapitre mais l'analyse des tâches et techniques nous permettra d'évaluer le statut véritable de chacun d'eux.

Quant aux registres du tableau de valeurs, de programmation et du tableau de variations, leur nombre d'apparitions, en particulier dans le cas du tableau de variations qui est présent dans 18 exercices sur 59, ne doit pas masquer leur marginalité relative du fait de leur implication dans des tâches peu variées. Ceci sera également dévoilé par l'analyse des tâches et techniques.

2.5.4.2. Analyse par tâches et techniques (59 exercices/problèmes)

(Voir tableau des tâches et techniques du chapitre 6 du manuel de Seconde en annexe du chapitre III)

Les tâches qui apparaissent dans la banque d'exercices de ce chapitre sont les suivantes :

- "Représentation de fonction" (dans 37 exercices/problèmes, la tâche de représentation graphique de fonction étant présente dans ces 37 exercices/problèmes),
- "Etude des variations" (dans 17 exercices/problèmes),
- "Extremum" (8 exercices/problèmes),
- "Equation/inéquation" (dans 17 exercices/problèmes),
- "Transformations-1 (éventuellement suivie de "transformations-2")" (dans 3 exercices/problèmes),
- "Domaine de définition" (dans 8 exercices/problèmes),
- "Parité-1" (dans 7 exercices/problèmes),
- "Parité-2 (utilisation de la parité)" (dans 3 exercices/problèmes),
- "Image (explicite dans 1 exercice/problème; implicite dans les tâches de représentations graphiques de fonctions par la technique point par point),
- "Antécédent", (uniquement implicite dans les tâches de résolution graphique d'équations),
- "Expression de fonction" (dans 4-6 exercices/problèmes dont 1 fois implicitement),
- "Comparaison de réels" (dans 3 exercices/problèmes),
- "Reconnaissance de fonction" (dans 2 exercices/problèmes).

Compte tenu des objets d'enseignement présentés dans le cours ainsi que du nombre d'apparitions des différentes tâches relevées ci-dessus, quatre tâches se dégagent comme principales tâches de ce chapitre : la tâche d'étude des variations d'une fonction, la tâche d'extremum, la tâche d'équation/inéquation et la tâche de représentation graphique de fonction. Cependant la tâche de représentation graphique de fonction n'apparaît que très rarement, en tant que tâche isolée, et est généralement associée, dans les différents exercices/problèmes, aux trois autres premières tâches. Nous n'en ferons donc pas une analyse séparée.

La tâche d'étude des variations

Elle se résout, principalement, selon la technique algébrique des inégalités institutionnalisée dans le cours. Si nous excluons les deux exercices/problèmes, où il ne s'agit pas vraiment de déterminer le sens de variation d'une fonction mais plutôt de réfléchir sur le concept de variation, et où les élèves peuvent s'aider de représentations algébriques ou graphiques, aucune technique n'étant précisée, nous remarquons que pour 14 des 15 exercices/problèmes, la tâche d'étude des variations se réalise selon cette technique des inégalités contre une seule fois seulement, dans le cadre d'un exercice résolu, selon la technique de lecture graphique.

Il nous a semblé intéressant d'étudier dans quels types d'associations de tâches pouvait apparaître cette tâche. Ainsi, sur les 14 exercices/problèmes où elle est à résoudre selon la technique des inégalités, nous constatons qu'elle est suivie 9 fois de la tâche de représentation d'un tableau de variations qui se repère dans notre tableau par la mention "Représentation de fonction" selon la technique "Alg > Tvar". La tâche de représentation graphique de la fonction est également demandée 11 fois sur ces 14 exercices/problèmes : 7 fois sur 11, elle succède à la tâche du tableau de variations et 4 fois sur 11, elle précède l'étude du sens de variation de la fonction.

L'association des tâches sens de variations, tableau de variations et représentation graphique, est significative de l'association de tâches qui traduit le modèle classique d'étude de fonctions et qui prend, nous l'avions remarqué dans le cours, clairement corps dans ce chapitre, même si la technique de détermination des variations sera remplacée par une autre technique dans les classes supérieures.

Quant à la présence de la tâche de représentation graphique avant la tâche d'étude des variations, elle ne va pas à l'encontre de ce modèle classique d'étude de fonctions que l'on veut mettre en place dans ce chapitre. Dans ce type d'exercices/problèmes où la représentation graphique est explicitement demandée par l'outil de programmation, il nous semble que l'objectif est alors double : d'une part, le tracé constitue une base intuitive pour la détermination des variations à valider ensuite dans le registre algébrique, d'autre part l'élève prend conscience, ne serait-ce qu'implicitement, des limites d'une représentation graphique obtenue par la technique "point par point", et de la nécessité de justifier ce tracé par une étude mathématique des variations de la fonction. D'ailleurs, nous remarquons en ce sens que dans l'un de ces exercices, le tableau de variations est demandé deux fois, avant et après l'étude algébrique des variations de la fonction. Par ailleurs, il faut remarquer que les expressions algébriques des fonctions correspondantes sont plus complexes, ce qui justifie ce passage dans le cadre numérique. Nous remarquons donc que le cadre numérique, et la représentation graphique sont exploités, à travers cette tâche, afin de permettre aux élèves d'aborder des exemples de fonctions plus complexes (ce ne sont pas les fonctions usuelles). Mais, contrairement à ce qui se faisait dans les chapitres précédents, les résultats obtenus par ces méthodes plus intuitives ne suffissent pas à eux seuls et doivent être validés dans le registre algébrique.

Le but final poursuivi est probablement que les élèves prennent à leur initiative par la suite, dans les cas qu'ils jugeront plus complexes, ce passage par le cadre numérique ; le registre graphique (à ce stade la représentation graphique sera probablement obtenu par la calculatrice à écran graphique) sert alors de registre de conjecture pour une justification dans le cadre algébrique.

Ces exercices/problèmes, où apparaissent ce type d'association de tâches, visent dans leur ensemble nous semble-t-il, non seulement l'apprentissage du type de tâche emblématique qu'est l'étude de fonction sous sa forme classique, mais aussi l'apprentissage de la technique des inégalités utilisée pour justifier la tâche d'étude des variations. Ceci se confirme notamment par le fait que la tâche d'étude des variations est rarement associée à plus d'une tâche, autre que les tâches de tableau de variations et de représentation graphique. Le travail de la technique vise l'appropriation de la notion de sens de variation d'une part, et la préparation au langage de l'approximation dans le but de préparer les élèves au champ de l'analyse. Par ailleurs, cette définition qui met en relation les variations de la variable x, et les variations conséquentes de la variable f(x), à travers le langage des inégalités favorise à la fois un approfondissement de la notion de variable et une appréhension de la fonction en tant que loi de variation.

Enfin, précisons que les élèves sont toujours guidés dans l'utilisation de cette technique dont le choix n'est jamais laissé à leur initiative : les intervalles de monotonie sont en général donnés dans l'énoncé. Dans les cas les plus difficile, la tâche est souvent précédée d'une tâche de réécriture algébrique servant d'aide implicite pour le travail sur les inégalités, en conformité avec les directives du programme. En voici un exemple :

"Soit la fonction f définie sur R par f : x □ $2x^2 - 4x + 3$. (...)

2° Vérifier que pour tout réel x, $f(x) = 2(x-1)^2 + 1$.

3° a) soit a et b deux réels tels que $1 \leq a < b$.

Montrer successivement que :

.$0 \leq a-1 < b-1$.

.$(a-1)^2 < (b-1)^2$.

.$2(a-1)^2 + 1 < 2(b-1)^2 + 1$.

b) En déduire les variations de f sur $[1 ; +\infty[$

c) Etudier de même les variations de f sur $]-\infty ; 1]$." (exercice 59, p.145)

Enfin, une troisième caractéristique de ce type d'association de tâches, est que la propriété de parité quand elle est vérifiée, est rarement exploitée dans ces exercices/problèmes pour déduire le sens de variation de la fonction sur le deuxième intervalle de définition, comme nous le montre l'exercice suivant :

"Soit la fonction f définie sur R par f : x □ $1/2\, x^2 + 2$. (...)

3° a) soit a et b deux réels positifs tels que $a < b$.

Montrer successivement que :

. $a^2 < b^2$.

.$1/2\, a^2 < 1/2\, b^2$.

.$1/2\, a^2 + 2 < 1/2\, b^2 + 2$.

b) En déduire les variations de f sur $[0 ; +\infty[$

c) Etudier de même les variations de f sur $]-\infty ; 0]$." (exercice 36, p.141)

Bien sûr, le professeur pourra, lui, choisir d'utiliser la notion de parité pour déduire le deuxième résultat du premier, mais il nous semble que ceci confirme la volonté des auteurs d'insister sur le travail de cette technique difficile.

La tâche de détermination des extremums

Elle est demandée dans 8 exercices/problèmes dont un problème qui est une situation fonctionnelle. Cette tâche doit être résolue une fois sur la base d'une lecture graphique, et une fois sur la base d'une lecture graphique et/ou du tableau de variation, soit sans recours au registre algébrique. Mais ces deux exercices problèmes sont respectivement une activité préparatoire et un exercice rédigé. L'activité vise à présenter la fonction carré avant son institutionnalisation, or nous avons vu que c'est à travers cette fonction que la notion d'extremum (absolu) était rencontrée pour la première fois. C'est donc dans le cadre d'une première rencontre sur une base intuitive avec la fonction carré et avec le minimum de cette fonction qu'il faut comprendre le recours à cette technique de lecture. Les tâches/techniques proposées dans l'exercice rédigée sont probablement à comprendre de façon similaire (voir tableau des tâches et techniques du chapitre 6, exercice rédigé n°1).

Dans les 6 exercices/problèmes relevant du registre algébrique, la technique des inégalités, institutionnalisée dans le cours, est demandée pour 5 d'entre eux. Les élèves sont aidés pour la mise en œuvre de cette technique : dans trois de ces 5 exercices/problèmes, l'extremum est donné dans l'énoncé ; dans les deux autres, il est à conjecturer à partir de la représentation graphique de la fonction préalablement demandée. Soulignons que cette tâche de représentation graphique est bien, avec une seule tâche d'expression fonctionnelle pour l'unique situation fonctionnelle concernée, la seule tâche associée à la tâche d'extremum dans ces 5 exercices/problèmes.

Il nous semble alors que cela est un indicatif, comme nous l'avons remarqué pour la tâche de déterminations des variations selon la technique des inégalités, de la volonté d'insister sur l'apprentissage de cette technique et de ne pas laisser l'attention de l'élève se disperser dans la réalisation d'une autre tâche. Ici, de façon équivalente, le registre graphique prend le statut de registre de conjecture, pour l'instant sollicité par l'énoncé. L'accent porté sur le travail de la technique des inégalités tant pour la tâche d'étude des variations que pour la tâche de recherche d'extremum explique que les deux tâches et leurs techniques respectives ne soient pas associées dans un même exercice problème. De plus, comme nous l'avons souligné plus haut, l'extremum établi par cette technique, n'étant pas l'extremum local, ne se déduit pas des seules variations de la fonction. Le travail de cette technique prépare également la classe de terminale quand on travaillera l'analyse et la notion de limite.

Enfin, un seul exercice associe la tâche d'extremum et la tâche de variation. Ce sont les deux seules tâches de l'exercice (exercice n°48, chapitre "Fonctions classiques", tableau des tâches et techniques). La tâche de variation selon la technique des inégalités précède celle d'extremum, et il est demandé "d'en déduire le minimum". Il est précisé que l'extremum recherché est un minimum pour en faciliter la déduction à partir de la connaissance des variations de la fonction. Ici, le minimum recherché est un minimum local, le lien entre les variations de la fonction et l'extremum relatif est donc souligné de façon informelle et se situe dans la continuité de ce qui avait été institutionnalisé, sur une base intuitive, dans le chapitre 1.

Le lien entre sens de variations et extremum local est au programme de 1ère. Il constitue, à travers cet exercice, un nouvel exemple de moment de rencontre informelle avec des nouvelles notions, que se réservent les auteurs dans l'organisation de leur enseignement. Les notions seront revues de façon plus officielles et institutionnalisées par la suite. Cependant, nous aimerions souligner que, concernant précisément la notion d'extremum, le passage d'une première approche intuitive de la notion d'extremum local dans le chapitre 1, à celle formelle, d'extremum absolu dans ce chapitre, sans que le lien et les différences entre les deux types d'extremums ne soient mis en évidence. Il nous semble au contraire que ces deux notions soient présentées dans une certaine illusion de continuité puisque rien a priori ne distingue les deux types d'extremum. Cet exemple met peut-être en lumière, la difficulté que peut représenter l'installation première d'une notion sur une base intuitive.

La tâche d'équation/inéquation

C'est également une des tâches importantes dans ce chapitre où elle apparaît dans 17 exercices/problèmes dont 3 problèmes et est souvent présente plusieurs fois dans un même exercice/problème, notamment pour la résolution d'équation(s) d'abord, suivie de la résolution d'inéquations. La tâche d'équation/inéquation est rarement associée, dans un même exercice/problème à d'autres tâches que celle de représentation graphique de la fonction précédée éventuellement d'une tâche visant à faciliter cette représentation, et de la tâche de résolution algébrique de l'équation/inéquation. Plusieurs techniques de représentation graphique sont sollicitées pour cette tâche :

- la représentation graphique est obtenue après l'étude des variations de fonctions selon la technique des inégalités, dans deux exercices seulement. La technique des inégalités est bien sûr explicitement demandée comme toujours pour la tâche d'étude des variations selon cette technique (voir ci-dessus).

- la technique de mémoire pour les fonctions usuelles vues dans le cours, ou la technique de fonction affine, valable uniquement dans le cas d'une fonction affine (voir techniques relatives à la tâche de représentation graphique d'une fonction, Chapitre II) sont des techniques auxquelles le recours se fait par contrat : les élèves savent qu'ils peuvent reproduire sans justification les représentations graphiques des quatre fonctions du cours, de même qu'ils savent tracer des fonctions affines. Ces tracés de courbes font, en principe, partie des connaissances disponibles.
- les techniques de changement d'origine et/ou d'échelle pour les fonctions "qui s'obtiennent simplement à partir des fonctions usuelles" (d'après les programmes de 2nde) est demandée dans 7 exercices/problèmes. La technique de changement d'origine la plus fréquemment utilisée concerne la tâche de réécriture algébrique de la fonction (voir chapitre II). Cette tâche fait, en général, l'objet d'une sous-tâche indépendante comme dans l'exemple suivant :

  "... $f(x) = x^2 - 4x + 3$ ...
  1° Montrer qu'il existe deux réels p et q tels que :
  $f(x) = (x+p)^2 + q$.
  (...)" (exercice 65 p 145, voir tableau des tâches et techniques du chapitre IV).
  Ou encore, la fonction est donnée de façon à mettre implicitement en évidence les transformations à effectuer pour retrouver la forme usuelle, comme dans l'exercice suivant :
  "Tracer la représentation graphique ... de ...$f(x) = 2 - (x-1)^2$.
  (...)" (exercice 57, p.144).

Enfin dans deux cas, les fonctions sont représentées graphiquement dans l'énoncé.

Cette tâche d'équation/inéquation et la fréquence des différentes techniques de représentation graphique de fonction qui lui correspondent, confirment le fait que les exercices/problèmes de ce chapitre ont tendance à se concentrer sur une tâche et sa technique associée. Nous l'avons vu avec les tâches de détermination des variations, de recherche d'extremum et maintenant nous le voyons avec la tâche d'équation/inéquation. Il nous semble que, dans ce contexte, les techniques de représentation graphique propres aux fonctions affines et usuelles, et les techniques de changement d'origine et/ou de repère, qui sont à la fois moins coûteuses techniquement (qui présentent moins de difficulté technique) et qui permettent d'obtenir des représentations graphiques fiables (relativement à la technique point par point dans la mesure où, dans ce chapitre, la représentation graphique de fonction se doit d'être justifiée par ses variations, ce qui nous semble être implicitement le cas par le biais des techniques de représentations graphiques attendues) réussissent à éviter l'implication dans un même exercice/problème de deux tâches/technique nouvelles.

Du point de vue des équations/inéquations demandées, il faut préciser que dans la majorité des exercices/problèmes, l'équation est à résoudre à la fois algébriquement et graphiquement. Les solutions sont en général des petits entiers ou des fractions simples facilement lisibles sur le graphique afin que la technique de lecture graphique soit écologiquement viable. Il faut souligner aussi qu'une bonne partie des équations/inéquations, sont des équations du second degré. Ce chapitre prépare donc à l'enseignement des équations du second degré au programme de Première. Les équations mettant en jeu des fonctions rationnelles se ramènent, elles, du point de vue de la résolution algébrique soit à des équations du second degré que l'élève peut résoudre par factorisation, soit à des équations du premier degré, également à sa portée. Les deux équations à radicaux proposées, alors qu'elles ne sont pas au programme de Seconde, ne sont à résoudre que graphiquement ; ce dernier cas représente un nouvel exemple d'utilisation exclusive du registre graphique pour une approche intuitive d'objets d'enseignements qui seront à revoir en cours de scolarité.

La résolution de cette tâche dans le registre graphique lui donne une dimension fonctionnelle. Ici, la fonction est utilisée selon son statut outil dans la résolution d'une tâche algébrique. Cette tâche de résolution d'équation/inéquation, apparaît comme une occasion de solliciter la fonction selon son statut outil et en retour d'aborder les résolutions d'équations et d'inéquations en évitant une trop grande technicité algébrique et en leur donnant plus de sens. Par ailleurs, rappelons qu'un des objectifs de ce type de problèmes peut être celui de favoriser une meilleure appropriation des notions de variables et d'inconnue.

Cependant, la technique graphique de résolution d'équations/inéquations n'a pourtant pas été institutionnalisée dans le cours. Mais il est vrai que cette technique a été présentée en tant que méthode au niveau du cours, dans le chapitre 3 de ce manuel, pour le cas particulier de résolution d'équations/inéquations simples avec valeur absolue. Il est possible que la généralisation de la tâche soit considérée comme susceptible d'être laissée à la charge de l'élève et deux des cinq T.P et un des quatre exercices résolus de cette banque d'exercices/problèmes sont prévus à cet effet. Bien sûr, le choix du professeur peut être différent sur ce point précis. Il peut inclure dans le cours une *méthode* de résolution graphique d'équations, parallèlement aux méthodes algébriques plus classiques. Mais nous aimerions souligner ici le choix des auteurs de laisser cet objet d'enseignement à la charge des élèves, probablement dans le cadre d'un enseignement aménageant pour l'élève des occasions de découvrir lui-même de nouvelles connaissances. Or ici, c'est par l'institutionnalisation de cette méthode graphique que le professeur pourra souligner la dimension fonctionnelle du problème algébrique, faire ressortir l'intérêt de l'outil fonction, lier éventuellement la résolution de l'inconnue à la recherche de l'antécédent, etc. Ce qui pose le problème du choix des objets d'enseignement susceptibles d'être entièrement laissés à la charge de l'élève et ceux qui doivent faire l'objet d'une institutionnalisation. Rappelons, que les fonctions affines par intervalles, n'ont pas non plus fait l'objet d'une institutionnalisation dans ce manuel.

Les tâches de transformation

La tâche de "Transfo-1" suivie éventuellement de la tâche de "Transfo-2" doivent être vues, dans ce chapitre, comme un autre moyen d'obtenir le tracé d'une fonction à déduire d'une fonction usuelle. C'est du moins ainsi qu'elle apparaît dans deux des trois exercices/problèmes où cette tâche est demandée. Le troisième est justement un T.P qui vise à introduire les translations dans l'étude de fonctions. Ces tâches de "Transfo-1" et "Transfo-2" sont toujours explicitement demandées, ce qui n'a rien d'étonnant puisque les transformations ne sont pas officiellement qu'au programme de Première française. Ceci explique également leur rareté dans ce chapitre et leur limitation aux cas de translations. Ces tâches constituent un nouvel exemple de rencontre informelle avec une notion qui est appelée à être revue et approfondie plus tard au cours de la scolarité. De part leur nombre, elles sont marginales, le professeur décidera selon les capacités de ses élèves et ses priorités d'enseignement, si elles sont ou non à considérer dans sa classe. La tâche de transformation comme celle de représentation graphique selon la technique de changement d'origine et/ou d'échelle permettent de manipuler globalement la fonction donc selon son statut objet.

La tâche de domaine de définition

Elle est demandée huit fois. Quoiqu'il ne s'agisse pas d'un objet d'enseignement à institutionnaliser officiellement en classe de Seconde, elle doit cependant être résolue sept fois par des techniques numériques-algébriques (dont une fois où les conjectures graphiques, à l'initiative de l'élève, ne sont pas exclues) contre une seule fois à partir de lecture graphique uniquement. Dans ce dernier cas, l'exercice/problème concerné est classé activité. Ainsi, les auteurs ne jugent pas nécessaire d'introduire cette nouvelle notion sur une base intuitive à partir de lecture graphique ou de manière contextualisée à travers les situations fonctionnelles. Mais cette tâche, quoique rare, a néanmoins été relevée, dans les chapitres précédents et toujours dans des situations fonctionnelles. Ici, elle est donc reprise, sur une base plus formelle de manière ostensive, quoique limitée à des cas particuliers de fonctions : les élèves auront à reproduire la technique dans ces exercices/problèmes.

Les tâches de parité

La tâche de "parité-1" est demandée deux fois dans le registre graphique mais il s'agit alors de préparation au cours. Les exercices/problèmes concernés sont des activités, la question est posée dans le cadre géométrique (il s'agit de repérer des symétries dans le tracé des courbes des fonctions de référence) car les termes fonction paire et fonction impaire ne sont pas encore connus. Nous retrouvons là l'usage du registre graphique sur une base intuitive, ici, en préparation à l'étude des fonctions usuelles. Les cinq autres exercices/problèmes demandent par contrat, la résolution algébrique institutionnalisée dans le cours. Dans trois de ces exercices/problèmes la tâche est isolée ou associée à celle de domaine de définition. Dans un seul exercices/problème elle est suivie de la tâche de parité-2 pour la déduction du sens de variation sur la deuxième partie de l'intervalle où la fonction est définie.
La tâche de parité-2 est également demandée en tant que tâche isolée pour une fonction donnée par un tableau de variations.

La rareté des tâches de parité peut s'expliquer par le fait qu'il s'agit juste en 2nde de se familiariser avec une notion qui doit être revue en 1ère. Nous remarquons également, que la notion de parité est rarement impliquée selon son statut outil (quasi-absence de tâche de parité-2), ce qui se justifie, nous semble t-il par des raisons écologiques : les auteurs ayant à choisir entre l'exploitation de la propriété de parité dans le tracé de la courbe d'une part, et le travail de la technique des inégalités pour l'étude des variations de la courbe d'autre part, ont choisi d'opter pour le travail de cette dernière technique (se reporter à la tâche d'étude des variations).

La tâche d'image/antécédent

Dans ce chapitre, la tâche d'image est présente explicitement dans une des trois situations fonctionnelles, dans les deux autres elle n'est pas demandée et y est éventuellement laissée à la charge de l'élève. Tout dépend de la maîtrise qu'il aura acquise de la tâche de modélisation et de sa capacité de modéliser une situation sans exploration numérique préalable.

Les deux concepts d'image et d'antécédent sont également présents implicitement dans deux exercices pour lesquelles l'unique tâche demandée (tâche d'expression fonctionnelle) se ramène à une conversion de fonction du registre verbal/symbolique vers le registre algébrique. Il s'agit cependant d'exercices très particuliers où la technique de résolution requise constitue le véritable objectif de l'exercice (ici, la résolution d'un système d'équations à 4 inconnues). La technique vise autre chose que la tâche demandée. Enfin, il ne faut pas oublier que le concept d'image apparaît implicitement dans les tableaux de valeurs et le recours à la programmation sollicités pour la représentation graphique de fonction par la technique point par point, alors que le concept d'antécédent est également implicitement présent dans les résolutions d'équations/inéquations.

La progression de l'enseignement sur les fonctions explique probablement la rareté des tâches explicites d'image/antécédent. Les notions ayant été institutionnalisées au début de l'enseignement sur les fonctions et étant par ailleurs familières depuis le collège dans le cas particulier des fonctions affines, sont davantage visées dans ce chapitre dans l'objectif d'être approfondies.

Autres tâches

Enfin, les tâches, de **reconnaissance de fonctions**, d'expression de fonctions et de **comparaison de réels** (comparaison de x, x^2, x3, inégalités où la fonction est impliquée en tant qu'outil au niveau de la résolution) sont très marginales aussi nous ne nous étendrons pas là-dessus

La rareté de la tâche d'expression fonctionnelle s'explique en grande partie par le nombre limité de situations fonctionnelles dans ce chapitre.

La tâche de reconnaissance de fonctions n'est que rarement demandée de façon explicite mais il est vrai que l'ensemble des tâches apparaissant dans ce chapitre vise la connaissance des propriétés caractéristiques de chacune des classes de fonctions usuelles, donc vise implicitement la capacité de distinguer ces fonctions entre elles.

Quant à la tâche de comparaison de réels (il s'agit dans l'un des exercices de comparer les réels x, x^2 et x^3 pour x positif), elle est posée dans le cadre algébrique. La technique de résolution demandée est une technique algébrique mais l'outil fonctionnel est également sollicité par l'intermédiaire de représentations graphiques de fonctions permettant de visualiser la position relative des différents réels. Ainsi dans ce chapitre ce sont essentiellement des tâches relevant a priori du cadre algébrique, tâches d'équations/inéquations et de comparaison de réels, qui permettent l'utilisation de la fonction selon son statut outil.

Nous terminerons par une remarque sur le nombre limité des situations fonctionnelles :
Rappelons-nous que les programmes insistent sur la place de choix à accorder aux activités de résolution de problèmes en général et à l'étude de situations (fonctionnelles) en tant que telles, en particulier, aussi bien pour introduire que pour approfondir les notions mathématiques ; comment en conséquence expliquer leur marginalité dans ce chapitre ?

Il nous semble que ceci pourrait s'expliquer par la nature des objets à mettre en place dans ce chapitre. Comme nous l'avons remarqué dans l'analyse du cours, peu de notions nouvelles sont introduites dans ce chapitre. Les notions de sens de variation et d'extremum, en particulier, ont été mises en place dès le chapitre d'introduction. Elles y ont été vues de façon contextualisée (à travers des situations fonctionnelles) et sur une base intuitive (par l'intermédiaire du registre graphique). Dans ce chapitre, elles sont revues sur une base formelle, par les définitions des inégalités respectives à ces deux notions, et sont surtout intégrées dans de nouvelles organisations locales puisque les tâches d'étude des variations ou de détermination d'extremum doivent être résolues selon les nouvelles techniques amenées par ces définitions. Mais ces techniques sont difficiles à mettre en œuvre donc difficile à maîtriser à ce stade de la scolarité, aussi sont-elles coûteuses en exercices d'apprentissage. Ici, c'est le travail de la technique qui permet l'appropriation de la notion. La nécessité de travailler la technique explique que ces notions peuvent difficilement être envisagées sous une forme contextualisée dans des situations fonctionnelles, de même qu'elle n'apparaissent pas dans des problèmes où plusieurs tâches se référant souvent à différentes notions sont en général associées.

Pour maintenir les situations fonctionnelles dans ce chapitre, en tant que problèmes permettant de donner plus de sens aux différentes notions en relation avec les fonctions, dans la mesure où les tâches d'étude de variations et de détermination d'extremum, y sont classiquement souvent présentes, il faudrait accepter que ces tâches soient résolues selon d'autres techniques que celles institutionnalisées dans le cours, en particulier des techniques graphiques. Or, ce chapitre met en place également un nouveau plan d'étude de fonction selon lequel la représentation graphique de la fonction se doit d'être justifiée par une étude préalable relevant du registre algébrique. La représentation graphique obtenue par la technique point par point, ne peut servir qu'à établir des conjectures. Il pourrait être envisageable alors d'accepter pour l'étude des situations fonctionnelles des techniques graphiques de résolution pour des graphes obtenus par la technique de changement d'origine/d'échelle à partir des fonctions de référence dont justement les variations et extremum ont été justifiées dans le cours. Ceci pose la question de toute la subtilité entre la passage d'un enseignement présenté de manière contextualisée et sur une base intuitive à un enseignement plus formel : à quels moments des techniques plus intuitives doivent-elles être abandonnées au profit des nouvelles techniques plus formelles ? Est-il possible que se côtoient autour d'un même thème d'enseignement des techniques plus intuitives et d'autres plus formelles pour la résolution d'un même type de tâche ? Il nous semble que les auteurs sont réticents à ce genre d'arrangement.

2.5.5 Conclusion

Un enseignement plus formel pour des notions déjà vues, s'accordant avec un changement de statut des registres graphique et algébrique

Ceci est notamment vrai pour les notions de variation et d'extremum. Ces notions ont été abordées sur une base intuitive dans le chapitre 1, par le biais de leur contextualisation dans des situations fonctionnelles et de leur visualisation grâce au registre graphique : La mise en évidence du sens de variation ou de l'extremum d'une fonction ne nécessite pas, alors, de validation dans le registre algébrique. La notion de variation est revue selon une base plus formelle, à travers le cas particulier des fonctions affines. Le registre graphique y sert toujours de support pour établir et valider les résultats mais il est utilisé en interaction avec le registre algébrique. Dans ce nouveau chapitre, le registre graphique sert de registre de conjecture aussi les résultats établis doivent être validés dans le registre algébrique.

Nous avons donc un enseignement qui vise un passage progressif d'une appropriation intuitive des notions à une appropriation plus formelle. Le registre graphique n'est plus sollicité qu'en tant que registre de conjecture, et le recours à ce registre dans certains exercices/problèmes, est pris en charge par l'énoncé à travers certaines tâches, comme la double résolution algébrique et graphique d'équations ou la représentation graphique par la technique point par point précédent l'étude de la fonction dans le registre algébrique. On peut prévoir que par la suite cette sollicitation du registre graphique comme registre de conjecture sera laissée à la charge de l'élève.

Un chapitre davantage axé sur l'acquisition de techniques

En effet, l'enseignement des deux techniques des inégalités pour la résolutions des deux tâches d'étude des variations de fonction et de détermination d'extremum, ainsi que la technique de résolution graphique d'équations/inéquations, apparaissent comme les objectifs principaux de ce chapitre, où relativement peu de notions nouvelles sont à mettre en place. Par ailleurs, si les fonctions de référence et les classes de fonctions qu'elles définissent sont également un des principaux objets d'enseignement, leur acquisition par les élèves se réalise dans la pratique à travers la résolution de ces trois tâches/techniques principales auxquelles il faut cependant rajouter la tâche de représentation graphique de fonction.

Cependant la maîtrise de ces techniques, notamment celle des deux techniques des inégalités particulièrement difficile à mettre en œuvre à ce niveau de la scolarité, impose qu'un temps de travail suffisamment long soit consacré à leur apprentissage, et que l'effort des élèves puisse être concentré sur la résolution des tâches concernées. Ceci pourrait expliquer que ces différentes tâches ne soient que rarement associées, et qu'en particulier il y ait si peu de problèmes et de situations fonctionnelles dans ce chapitre. On distingue ainsi grossièrement trois classes d'exercices, ceux consacrés à l'étude des variations d'une fonction, ceux consacrés à la détermination d'un extremum et ceux visant la résolution graphique d'équations ou d'inéquations.

L'accent mis sur l'acquisition de techniques conduirait donc à une présentation des notions de façon assez segmentée qui ne pourrait être évitée qu'au prix de la coexistence de techniques intuitives et de techniques plus formelles pour un même type de tâche autour d'un seul thème d'enseignement.

La fonction impliquée selon son double statut outil/objet

La fonction, est visée selon son statut objet à travers l'étude de ses divers attributs ou propriétés également impliquée selon leur statut objet. Certaines tâches, comme les tâches de transformation, quoique très marginales, ou de représentation graphique par la technique de changement d'échelle d'origine permettent de manipuler globalement la fonction lui donnant également un statut d'objet.

La fonction est aussi exploitée selon son statut outil, essentiellement à travers la mise en jeu au sein du cadre algébrique des sous cadres des équations et des fonctions dans les résolutions graphiques d'équations/inéquations.

L'implication de la fonction dans un même chapitre selon son double statut, ainsi que la sollicitation de deux sous cadres pour travailler le concept favorisent une meilleure appréhension du concept.

Mode d'appréhension visé

Les tâches visant l'appréhension de la fonction en tant que processus sans être absentes, sont néanmoins trop restreintes à un type de tâche donné, dans un seul type d'exercices/problèmes, ce qui pourrait tendre à compromettre cette appréhension de la fonction.

L'accent mis sur les notions de sens de variations et d'extremum, à travers le travail des techniques des inégalités, tendrait à favoriser une appréhension de la fonction en tant que loi de variation.

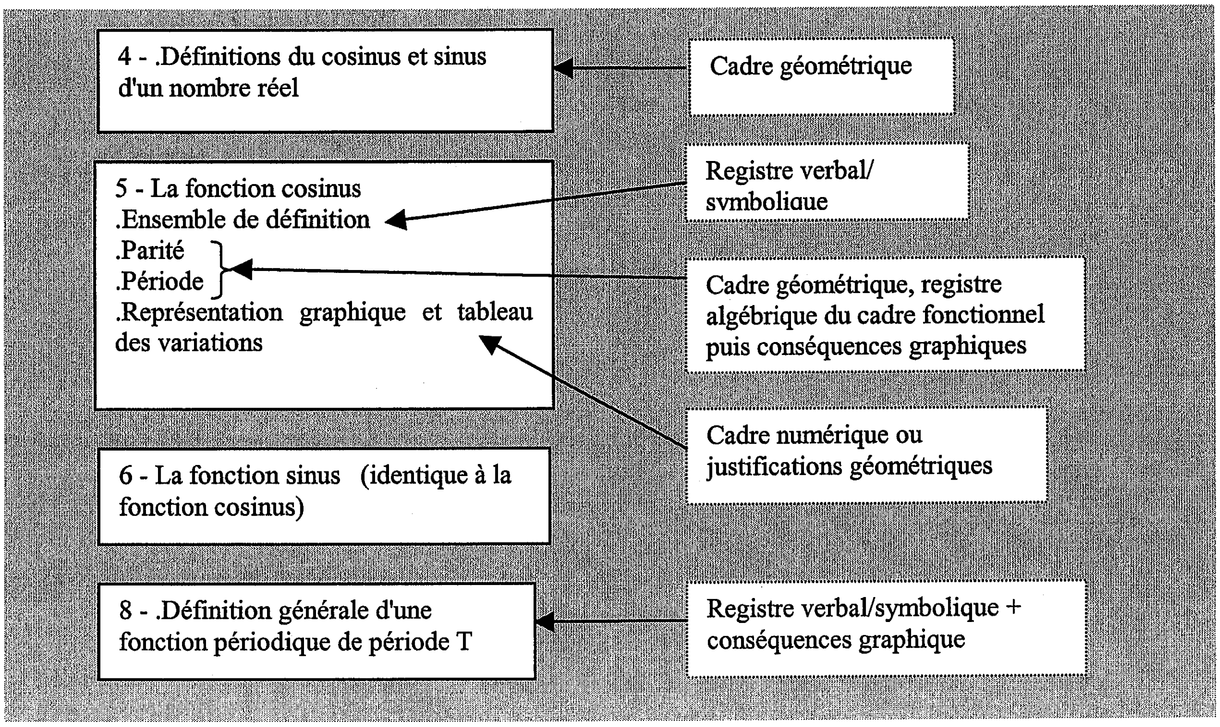
En parallèle de cette appréhension de la fonction en tant que loi de variation, commence à poindre une appréhension plus générale de la fonction, avec la proposition aux élèves de nombreuses tâches visant pour certaines son statut objet, et pour d'autres son statut outil. Cependant la vision restrictive des fonctions relativement à leur classe peut provoquer une difficulté à envisager la fonction selon ce mode plus général.

Problème de la non - institutionnalisation de certains savoirs

Certains savoirs ou savoir faire, comme la fonction affine par intervalles dans le chapitre précédent et la technique graphique de résolution d'équations/inéquations dans ce chapitre ne sont pas institutionnalisés. Ceci se conçoit dans le cadre d'un enseignement qui veut laisser quelque marge de manœuvre à l'élève. Mais l'élève peut-il réussir tout seul à prendre en compte toute la portée de la notion ou du savoir-faire concerné dans ce cas ? Concernant la technique graphique de résolution d'équations/inéquations, il nous semble qu'une institutionnalisation serait nécessaire pour la prise en compte effective de la dimension fonctionnelle de cette technique de résolution relativement à la technique uniquement algébrique et donc des interrelations entre les équations/inéquations et les fonctions correspondantes, afin que cette présentation ne soit pas lacunaire tout comme Assude l'a constaté auparavant pour l'équation et la fonction racine carrée en classe de troisième (voir, "objets d'enseignement", chapitre II).

2.6 Description et analyse du chapitre 7 : "Fonctions trigonométriques"

2.6.1. Organigramme du cours



2.6.2. Description, commentaire et analyse du cours

Nous nous limitons essentiellement aux sections relatives aux fonctions sinus et cosinus. Mais pour mieux comprendre comment sont définies ces fonctions trigonométriques, nous avons inclus dans notre analyse la section relevant de la partie géométrique où les notions de cosinus et de sinus d'un réel sont introduites. De plus, nous nous référons aux sections précédentes, relevant également de la partie géométrique, quand elles sont nécessaires pour une meilleure compréhension des sections qui nous concernent. Nous avons par contre exclu la notion de tangente, dans la mesure où l'étude de la fonction tangente ne fait pas partie du programme de Seconde, ainsi que la section consacrée aux propriétés des fonctions trigonométriques relatives aux angles supplémentaire et complémentaire, dans la mesure où le cadre fonctionnel ne s'y trouve pas impliqué.

2.6.2.1 Les objets d'enseignement cosinus et sinus d'un réel

Les notions de cosinus, sinus sont données dans le cadre de la géométrie analytique à partir de la situations fonctionnelle que constitue le déplacement d'un point M sur un cercle trigonométrique de centre O rapporté à un repère orthonormal direct (O, OA, OB), par la définition suivante:

"soit x un nombre réel, et soit M le point du cercle trigonométrique tel que x soit une mesure de l'angle orienté (OA, OM). Dans le repère (O, OA, OB), les coordonnées de M sont (cos x, sin x)".

La première propriété du cosinus et du sinus concernant les valeurs que peuvent prendre cos x et sin x est précisé : "Pour tout nombre réel x on a : $-1 < \cos x < 1$ et $-1 < \sin x < 1$".

Enfin, le lien est fait entre la définition du cosinus et du sinus relevant du cadre géométrique, et celle relevant du triangle rectangle enseignée en troisième qui permet d'énoncer une deuxième propriété algébrique, reliant les cosinus et sinus d'un réel donné : "pour tout nombre réel x, $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$".

Le manuel enchaîne sur l'étude de la fonction cosinus puis celle de la fonction sinus dans les deux sections suivantes, selon un plan d'étude similaire à celui de l'étude des fonctions usuelles. Nous nous limiterons à l'analyse de la fonction cosinus, celle de la fonction sinus lui étant similaire.

2.6.2.2 La fonction cosinus

La fonction cosinus est étudiée dans ce paragraphe. La construction de la fonction n'est pas clairement explicitée mais le professeur se chargera de la préciser comme étant la fonction qui à tout réel x fait correspondre l'abscisse du point M se déplaçant sur le cercle trigonométrique. Cette situation géométrique d'origine permet de déterminer certaines des caractéristiques de la fonction

L'objet d'enseignement : ensemble de définition de la fonction cosinus

Le domaine de définition est d'emblée établi : "Pour tout réel x, on peut calculer cos x. Donc l'ensemble de définition est R".

Il est donc sous-entendu, ici, qu'à tout réel correspond une mesure d'arc de cercle orienté (ou d'angle orienté, le lien entre les deux ayant fait l'objet de la section 2 du chapitre). Le cercle trigonométrique est donc implicitement considéré comme une représentation de l'ensemble des réels R : l'on admet l'enroulement de la droite des réels sur le cercle pour définir la longueur de l'arc. Il s'agit d'une approche intuitive liée au déplacement continu du point sur le cercle qui sera amenée à être justifier dans les classes supérieures.

La calculatrice, peut aider l'élève à se rendre compte qu'il est effectivement possible de calculer cos x pour tout réel x. Il n'y a pas d'indication particulière du manuel sur ce point.

L'objet d'enseignement : parité de la fonction cosinus

La propriété de parité est clairement établie à partir du cadre géométrique de départ, à l'aide d'une illustration qui montre que deux points M et M' du cercle trigonométrique, ayant respectivement pour coordonnées x et -x, ont même abscisse. Cette propriété est ensuite traduite algébriquement sur la fonction cosinus "pour tout nombre réel x, cos (x) = cos(-x)."

La conséquence graphique est soulignée : "sa représentation graphique ......admet l'axe des ordonnées comme axe de symétrie".

L'objet d'enseignement : périodicité de la fonction cosinus

La propriété de périodicité est énoncée, de même, à partir de la situation géométrique d'origine.

La conséquence graphique est précisée dans le cadre géométrique établi par la représentation graphique de la fonction : "La représentation graphique ...est invariante par les translations de vecteur ...".

La section 2 du chapitre, portant sur les mesures d'un arc orienté, a permis de faire une allusion implicite à cette propriété, sans la nommer alors, en remarquant qu'à plusieurs positions du point M sur le cercle, correspondaient une même mesure d'arc. Ce qui en justifie la traduction algébrique "pour tout réel x, cos (x + 2 pi) = cos x".

L'objet d'enseignement : représentation graphique et tableau de variation de la fonction cosinus

Trois étapes sont distinguées pour la représentation graphique de la fonction : la représentation se limite dans un premier temps à l'intervalle [0; π], sur laquelle nous reviendrons plus amplement.

Dans un deuxième temps, elle est complétée sur l'intervalle [-π ; π], par l'utilisation explicite de la parité.

Enfin, elle est obtenue sur R, par l'utilisation, explicite également, de la propriété de périodicité.

Représentation graphique sur l'intervalle [0; π]

L'intervalle [0; π] est choisi sans justification, dans ce paragraphe. Mais ce choix se base implicitement sur les propriétés de parité et de périodicité qui viennent d'être établies et le professeur se chargera de l'éclaircir.

Cependant pour obtenir la représentation graphique de la fonction sur cet intervalle, le manuel précise simplement :

" A l'aide de la calculatrice on peut tracer point par point la représentation graphique de la fonction cosinus sur l'intervalle [0; π] et dresser son tableau de variation".

Or, aucun autre moyen de justifier le sens de variation de la fonction cosinus n'est prévu dans le cours, ni dans les activités préparatoires, ni même dans les exercices classés T.P. D'ailleurs l'unique activité, sur les 4 de ce chapitre, portant sur les fonctions cosinus et sinus, demande de représenter graphiquement ces fonctions à l'aide de la calculatrice, par la technique point par point, puis de dresser le tableau de variations et de conjecturer d'autres propriétés de la fonction à partir de son graphique.

Il semble donc que les auteurs aient bien choisi de déterminer le sens de variation à partir du graphique et non de justifier la représentation graphique à partir de l'étude de ses variations. Ceci s'expliquent probablement par la volonté des auteurs de respecter les directives du programme quant à la limitation de l'étude des fonctions cosinus et sinus *à une simple prise de contact de caractère expérimental* et à l'injonction d'utiliser non seulement le cercle trigonométrique mais d'*exploiter* également *les touches de la calculatrice*. Le registre graphique n'est donc pas utilisé dans ce chapitre comme registre de conjecture du sens de variation mais comme registre permettant d'établir le sens de variations sur une base intuitive par le biais de la calculatrice. Il retrouve ici le statut qu'il avait dans le chapitre d'introduction.

Cependant les variations peuvent être justifiées directement à partir du cadre géométrique. Il est possible d'utiliser le déplacement du point sur le cercle trigonométrique, pour montrer que quand le point se déplace sur le cercle trigonométrique l'abscisse diminue, donc que la fonction cosinus est décroissante sur l'intervalle [0; π]. Il est loin d'être exclu que de nombreux professeurs choisissent plutôt de justifier la représentation graphique de la fonction cosinus à partir de son sens de variations, afin de s'en tenir au plan d'étude de fonction institutionnalisé dans le chapitre des fonctions usuelles. L'utilisation de la calculatrice n'est pas non plus exclue dans ce cas, soit après justification du sens de variations, pour l'obtention d'une représentation graphique plus précise. Il semble que les auteurs du manuel aient préféré laisser ce niveau de justification, à la classe de 1ère où de toutes façons les fonctions cosinus et sinus seront revues de manière plus approfondies. Il est également possible que les auteurs aient choisi de présenter les fonctions circulaires selon un niveau théorique moindre, compte tenu de la difficulté supposée que représente leur enseignement, laissant au professeur la liberté de proposer un enseignement plus avancé selon le niveau de ses élèves.

L'objet d'enseignement : "fonction périodique"

La définition générale d'une fonction périodique est donnée dans le registre verbal/symbolique sur la base des exemples des fonctions sinus et cosinus. Les conséquences de cette propriété sont établies dans le cadre géométrique dans le but de faciliter la représentation graphique complète de la fonction à partir de sa représentation sur une seule période.

2.6.3 Synthèse de l'analyse du cours

Les fonctions cosinus et sinus ont donc un double statut, comme nous l'avions remarqué avec les fonctions usuelles, elles sont d'une part objet d'enseignement et d'autre part servent d'illustrations et d'exemples concrets pour la mise en place de résultats plus généraux concernant la classe des fonctions trigonométriques (propriété de périodicité notamment et représentation graphique de ces fonctions).

La difficulté supposée de l'enseignement des fonctions circulaires relativement aux autres fonctions usuelles fait que deux possibilités sont offertes aux professeurs :

- Obtenir le sens de variation des fonctions cosinus et sinus à partir de la représentation graphique de la fonction non justifiée sur une base géométrique. L'approche visée est alors une approche plus intuitive par le biais de la calculatrice et du registre graphique. Mais cela ne risque-t-il pas de faire de la classe des fonctions trigonométriques, une classe quelque peu à part, relativement aux autres classes de fonctions usuelles ? Cependant cette situation sera comblée, en classe de Première.
- Obtenir le sens de variation de ces fonctions directement à partir de la situation géométrique de départ. Ce qui permet de justifier la représentation graphique, et donc d'étudier les fonctions trigonométriques selon un même plan d'étude que les fonctions usuelles.

Ces deux possibilités offertes au professeur soulignent la marge de manœuvre dont il dispose dans certains cas pour mieux prendre en compte le niveau de ses élèves.

2.6.4 Analyse de la partie exercices/problèmes

2.6.4.1 Analyse par cadres et registres utilisés

Les exercices/problèmes ne relèvent pas tous de notre étude, tout comme les sections du cours n'ont pu être toutes retenues dans le cadre de notre analyse. Nous avons sélectionné les exercices/problèmes de ce chapitre en nous basant, dans un premier temps, sur ceux qui se rapportaient aux différentes sections retenues pour le cours, auxquels il nous a fallu rajouter les équations/inéquations de type "cos x = (ou <) a" et "sin x = (ou <) a" qui sont apparues être un enjeu important du chapitre quoique non traité en cours. Ainsi sur une totalité de 44 exercices/problèmes, 30 ont fait l'objet d'une première sélection, ils se répartissent de la manière suivante :

- 13 d'entre eux, dont l'unique situation fonctionnelle de cette banque d'exercices/problèmes, relèvent clairement de notre analyse. Ils ont tous à l'exception de la situation fonctionnelle, le cadre fonctionnel pour cadre de départ.
- Enfin, les 17 autres comprennent uniquement des tâches de résolution d'équations/inéquations. Quoique ne faisant pas, à l'exception d'une seule, nécessairement référence au cadre fonctionnel, nous les avons conservées et nous tâcherons de déterminer jusqu'à quel point l'outil fonctionnel est impliqué dans leur résolution.

Les cadres

12 exercices ont ainsi pour cadre de départ le cadre fonctionnel et ne nécessitent pas de changement de cadre pour être résolus, sauf peut-être pour l'un d'entre eux dont l'objectif est une résolution d'équation à l'aide de la courbe de la fonction correspondante sur lequel nous reviendrons.

L'unique situation fonctionnelle du chapitre, d'ailleurs unique problème retenu dans ce chapitre, nécessite évidemment une conversion vers le cadre fonctionnel à la charge de l'élève.

Les changements de cadres que nécessitent les tâches de résolutions d'équations/inéquations seront soulignés dans l'analyse des tâches et techniques, mais le cadre fonctionnel n'y intervient pas, du moins pas de façon explicite.

Les registres

(voir tableau des registres du chapitre 7 du manuel de 2nde en annexe du chapitre III)

Sur les 13 exercices relevant du cadre fonctionnel, le tableau de variations apparaît 3 fois, il est toujours à obtenir à partir de la représentation graphique.

Le tableau de valeurs apparaît 4 fois de façon explicite, et 4 fois de façon implicite lié à la tâche de représentation graphique de fonction.

Tous ces exercices/problèmes ont recours au registre algébrique et/ou graphique, l'analyse des exercices/problèmes précisera la place de ces deux registres les plus importants ainsi que des autres.

Quant aux registres spécifiques, impliqués dans les 16 tâches d'équation/inéquation nous y reviendrons lors de l'analyse de cette tâche et de ses techniques associées.

2.6.4.2 Analyse par tâches et techniques

(voir tableau des tâches et techniques du chapitre 7 du manuel de 2nde en annexe du chapitre III)

Les tâches qui apparaissent dans la banque d'exercices/problèmes de ce chapitre, d'après le tableau des tâches et techniques sont les tâches de :

- "Représentation graphique" (dans 4 exercices/problème),
- "tableau de valeurs" (explicitement dans 4 exercices/problèmes, implicitement lié à d'autres tâches)
- "Parité-1" (dans 2 exercices/problèmes),
- "Périodicité-1" (dans 5 exercices/problèmes),
- "Périodicité-2" (dans 4 exercices/problèmes dont 3 sont des équations),
- "Variation" (dans 3 exercices/problèmes),
- "Extremum" (dans 1 exercice/problème),
- "Image/Antécédent (dans 2 exercices/problèmes),
- "Modélisation" (dans un exercice problème)
- "Comparaison de fonction" (dans 1 exercice/problème),
- "Equations/inéquations" (17 fois dont une seule fois avec implication du cadre fonctionnel).

Les différentes tâches demandées apparaissent dans la grande majorité des cas en tant que tâches isolées, ce qui s'explique en partie du fait que ce chapitre ne comprend que deux problèmes dont un seul nous concerne et qui est l'unique situation fonctionnelle du chapitre. En fait, ce sont essentiellement les tâches de tableau de variation, recherche d'extremum et représentation graphique qui apparaissent associées.

Dans l'analyse des exercices/problèmes, nous excluons la seule activité du chapitre, que nous avons déjà mentionnée lors de l'analyse du cours, qui vise à introduire les fonctions cosinus et sinus, et leur différentes propriétés, à partir de leur représentation graphique. Nous excluons également, la situation fonctionnelle et tout particulièrement les tâches relevées une seule fois dans le chapitre (modélisation, comparaison) et qui proviennent de la situation. Celle-ci n'étant pas significative du point de vue du sens que l'on veut donner aux fonctions trigonométriques, étant donné sa rareté dans le chapitre. Soulignons cependant, qu'elle nous rappelle fortement les situations fonctionnelles du premier chapitre qui insistaient essentiellement sur une approche intuitive du concept de fonction, puisque la situation est à exprimer uniquement dans le registre graphique, et que les techniques des diverses tâches demandées sont donc à résoudre selon des techniques numériques ou graphiques.

Les tâches de variation, d'extremum et de représentation graphique de fonction

Les tâches de tableau de variation et d'extremum sont toujours à résoudre à partir de la représentation graphique de la fonction. Celle-ci est soit donnée au départ, soit demandée en tant que tâche, la technique de résolution exigée est alors la technique point par point, comme dans l'exercice suivant :

"1° Tracer point par point la représentation graphique de la fonction g définit sur $[0, \pi]$ par $g(x) = \cos(2x)$.

2° Dresser le tableau de variation de la fonction g." (exercice n° 60, p.172)

Cette association ou succession de tâches nous semblent correspondre à la tâche d'étude de fonction, ou à la partie de cette tâche correspondant à l'étude de ses variations et à la recherche d'extremum. La technique point par point, en tant qu'unique technique demandée pour la représentation graphique nous semble confirmer nos remarques quant aux intentions du manuel de viser, en classe de 2nde, une approche intuitive des variations de la fonction trigonométrique, par le biais du registre graphique. Une approche plus formelle ne serait envisagée que dans la classe supérieure.

Précisons que la représentation graphique se limite toujours à une seule période et que celle-ci est donnée dans l'énoncé. La période ne sera donc pas réinvestie dans le cadre des tâches d'étude de fonction. La parité pourrait l'être éventuellement mais uniquement à l'initiative des élèves.

La tâche de tableau de valeurs

Cette tâche est demandée explicitement dans trois exercices, ainsi que dans l'unique la situation fonctionnelle. Dans les trois premiers exercices, il s'agit de compléter un tableau de valeurs à l'aide de la calculatrice, les valeurs de x étant données. Le premier tableau demande le calcul des valeurs correspondantes de cos x et sin x, alors que le deuxième (resp. le troisième) demande de calculer les valeurs de cos x et $\cos^{-1}(\cos x)$ (resp. sin x et $\sin^{-1}(\sin x)$). Il nous semble que ces exercices visent surtout à familiariser les élèves avec les touches de fonctions trigonométriques de la calculatrice, et à leur faire prendre conscience des limites de la calculatrice dans le cas de calculs trigonométriques dans la mesure où les valeurs obtenues ne peuvent qu'être que des valeurs approchées. Ils peuvent permettre également une rencontre informelle avec la notion de réciproque. Leur objectif premier n'est donc pas la réalisation de la tâche, soit le calcul d'images proprement dit, mais la familiarisation avec l'instrument permettant ces calculs. Dans ce sens nous nous demandons si ces tâches ne visent que de façon implicite une appréhension de la fonction en tant que processus.

La tâche de tableau de valeurs et aussi la tâche d'image, présentes toutes deux, dans la situation fonctionnelle sont à voir en tant que tâches relevant de la phase, précédant la modélisation, de familiarisation numérique avec la situation. Cette phase est probablement d'autant plus importante que les situations fonctionnelles modélisables par des fonctions trigonométriques ne sont pas du tout familières aux élèves. On peut s'étonner de leur rareté alors dans ce chapitre. Mais il est vrai que le chapitre sur les fonctions trigonométriques est relativement restreint probablement dans le cadre d'une première approche avec les fonctions trigonométriques et du fait de la limitation des fonctions étudiées aux seules fonctions cosinus et sinus de référence.

Par ailleurs, la tâche de tableau de valeurs est également implicitement présente dans la tâche de représentation de fonction par la technique point par point que nous avons vu plus haut. Ici, la tâche de tableau de valeurs a précisément la place que nous lui avons déjà constaté dans le chapitre "Fonctions usuelles". Elle fait partie intégrante de la technique point par point, et dans la mesure où la tâche de tableau de valeurs ou d'image, quand cette dernière lui est équivalente, a tendance à se circonscrire à l'obtention de la représentation graphique de la fonction, ainsi nous voyons que les tâches visant une appréhension de la fonction en tant que processus ont tendance à se restreindre ou à être souvent implicites.

Les tâches de parité

La tâche de parité-1 est demandée dans un seul exercice en tant que tâche unique. La technique demandée est la technique algébrique institutionnalisée dans le cours. Il est vrai que la notion de parité a été mise en place dans le chapitre précédent.

Les expressions de fonctions proposées dans cette tâches sont plus complexes que celles impliquées dans l'ensemble des autres tâches, comme par exemple, "f(x) = - sin x + 4 cos x". Il s'agit probablement de travailler la technique algébrique en préparation à l'étude de fonctions trigonométriques plus complexes l'année prochaine.

La tâche de parité-2 nous l'avons vu, dans l'analyse de la tâche de représentation graphique, n'est pas explicitement demandée dans les exercices.

Elle serait éventuellement laissée à l'initiative de l'élève en 2nde et sera probablement exigée l'année prochaine.

Les tâches de périodicité

La tâche de périodicité-1, est demandée 5 fois, 4 fois en tant que tâche isolée et une fois, dans la situation fonctionnelle, soit associée à plusieurs autres tâches.

En tant que tâche isolée, la période doit être justifiée dans le registre algébrique. Elle est alors soit donnée dans l'énoncé, soit à conjecturer à partir du registre graphique.
Dans la situation fonctionnelle, elle est à établir directement à partir de la situation fonctionnelle.

La tâche de parité-2 apparaît 3 fois :

- 2 fois, elle sert à compléter une représentation graphique de fonction,
- 1 fois, elle sert à déterminer l'image de certaines valeurs.

Il n'est pas étonnant que le manuel insiste davantage dans ce chapitre sur la propriété de périodicité, par rapport à celle de parité, d'une part parce que la parité a déjà été vue, d'autre part, parce qu'il s'agit d'une des caractéristiques principales des fonctions trigonométriques.

Les tâches d'équations/inéquations

Elles relèvent, nous l'avons dit, 16 fois sur 17 du cadre algébrique. Soulignons que la résolution d'équation se limite d'après le programme de 2nde *à la lecture inverse de la mesure principale d'un angle aigu.* Le manuel s'en tient à ces directives. Nous considérerons le cas des équations, celui des inéquations lui étant similaire au niveau des conclusions à tirer.

Les différents exercices demandent de façon systématique une résolution rapportée au cercle trigonométrique : "A l'aide du cercle trigonométrique, résoudre dans l'intervalle [0, pi/2] l'équation sin x = 1/2".

La résolution d'une équation trigonométrique, relativement au cercle trigonométrique, exige donc un retour au cadre géométrique initial, soit un changement de cadre, du sous-cadre des équations du cadre algébrique, vers le cadre géométrique à laquelle s'ajoute une conversion du registre algébrique vers le registre du cercle trigonométrique. Il faut positionner le point M, d'après la valeur de son abscisse ou de son ordonnée selon que l'équation est une équation en cosinus ou en sinus, puis lire la valeur de la mesure de l'angle correspondante, afin d'obtenir celle de x. La technique fait une référence explicite à la situation géométrique de départ (par le positionnement du point M sur un cercle trigonométrique), sans se référer de façon explicite aux fonctions cosinus (ou sinus) qui la modélise. La traduction de cette tâche en tant que tâche de recherche d'antécédent reste donc implicite dans le cas de la technique du cercle trigonométrique.

Dans certains exercices, une deuxième technique de résolution est demandée :
- la technique relevant de la représentation graphique de la fonction correspondante,
- la technique basée sur l'utilisation de la calculatrice.

La référence au cadre fonctionnel est probablement plus évidente dans le cas de la technique de la représentation graphique ne serait-ce que par la plus grande familiarité des élèves à traiter avec des tâches d'image/antécédent dans ce registre. Cependant, il est vrai qu'il n'est pas évident de recourir à la représentation graphique des fonctions trigonométriques pour la résolution des équations/inéquations correspondantes trigonométriques, du fait de la difficulté de lire les solutions sur le graphique, aussi un seul exercice demande cette technique de résolution.

La technique de la calculatrice est plus fréquemment demandée ; elle est obligatoire aux côtés de la résolution géométrique quand la valeur de l'équation n'est pas une valeur remarquable, comme dans l'exercice suivant : "A l'aide d'une calculatrice et d'un cercle du cercle trigonométrique, donner une valeur approchée pour sin x = 3/5." Il nous semble qu'elle permet également de se référer plus facilement au cadre fonctionnel par le biais des touches de fonctions de la calculatrice. Cependant pour une référence effective au cadre fonctionnel, il faudrait au moins une institutionnalisation de cette technique faisant une référence explicite au cadre fonctionnel en traduisant ces tâches, en tâches de recherche d'antécédent par la fonction cosinus (ou sinus), ou de recherche d'image par leur fonction réciproque. Ce qui ne semble pas être fait par le manuel qui s'en tient davantage à une référence géométrique. Bien sur, la référence au cadre géométrique s'explique par l'intérêt de la technique correspondante au niveau du sens qu'elle permet de donner aux résolutions d'équations et d'inéquations trigonométriques. Il en résulte, néanmoins que, de façon générale, l'outil fonctionnel est peu marqué dans la résolution d'équations/inéquations trigonométriques et que par conséquent ce type de tâches ne peut contribuer que modestement à l'appropriation des fonctions trigonométriques, or ces tâches représentent à elles seules la moitié des tâches proposées en exercices.

2.6.5 Conclusion

L'étude des fonctions circulaires, ou plus particulièrement des fonctions cosinus et sinus, s'organise autour de deux types de tâches principales : celles liées à la tâche d'étude de fonction mais envisagée, ici, de façon segmentée et celle de résolution d'équations et d'inéquations.

Segmentation des tâches liées à l'étude de fonction

La difficulté supposée que représente l'enseignement des fonctions circulaires, et notamment leur représentation graphique et l'étude de leurs variations font que la tâche d'étude d'une fonction trigonométrique est envisagée ici de façon segmentée en trois tâches distinctes : la tâche de parité, la tâche de périodicité, la tâche de représentation graphique à laquelle sont liées les tâches de d'étude des variations et de recherche d'extremum.

Les tâches liées à l'étude de fonction sont résolues selon leur nature de façon différente :

- les propriétés de parité et de périodicité sont à justifier dans le registre algébrique et le registre graphique sert alors essentiellement de registre de conjecture pour leur mise en évidence.
- les variations et extremum sont traités essentiellement dans le registre graphique, à partir d'une représentation graphique limitée à une période et obtenue par le biais de la calculatrice.

Pour les tâches de parité et de périodicité où le registre graphique se trouve impliqué en tant que registre de conjecture, le recours à une calculatrice à écran graphique peut-être suffisant. Mais pour la tâche de représentation graphique, il nous semble que l'insistance des auteurs sur la représentation graphique, limitée à une seule période, tracée à la main à l'aide des touches de fonctions de la calculatrice, traduit leur volonté de faire acquérir aux élèves une certaine pratique des représentations graphiques de fonctions circulaires. La représentation point par point permet de mieux disposer du graphique dans une phase d'apprentissage et de trouver les paramètres pour utiliser ensuite les propriétés de symétrie, parité ou autres propriétés algébriques des fonctions trigonométriques. Elle permet de mieux fixer les particularités des fonctions trigonométriques relativement aux autres fonctions institutionnalisées.

Rôle et statut du registre graphique

Cette approche confirme bien le double rôle du registre graphique que détermine l'avancement de la formalisation des notions impliquées dans les tâches où il est sollicité :

- le registre graphique permet de mettre en place les notions nouvelles, notamment celles liées aux variations. La justification puis la formalisation de ces notions, dans le cas des fonctions trigonométriques, n'est envisagée que pour l'année suivante. Le registre graphique détient ici le rôle que nous lui avons essentiellement souligné dans le chapitre d'introduction.
- le registre graphique est un registre de conjecture relativement aux tâches où les notions impliquées sont plus formalisées. Leur résolution nécessite une justification qui passe en général par le registre algébrique.

Du point de vue des possibles

Les auteurs ont choisi de limiter l'étude des fonctions trigonométriques (variations, extremum et représentation graphique) à leur étude sur une seule période, peut-être en référence aux directives données par les programmes à propos des résolutions d'équations et d'inéquations (voir ci-dessus tâches d'équations/d'inéquations). L'idée semble être alors de bien fixer, en classe de 2nde, les connaissances spécifiques aux fonctions trigonométriques à une seule période, la généralisation à l'ensemble du domaine de définition, étant reportée à la classe de 1ère. L'exemple des fonctions trigonométriques est en cela un nouvel exemple de l'approche progressive de l'enseignement français.

Cependant on peut se demander pourquoi il n'est que peu envisagée de généraliser les connaissances relatives aux fonctions cosinus et sinus, même si elle doivent se limiter à une seule période, à d'autres fonctions trigonométriques, en particulier les composées additives simples de sinus et cosinus comme A cos (ax + b) et B sin (ax + b) qui peuvent être obtenues directement dans le registre graphique par la technique de changement d'origine/d'échelle déjà rencontrée avec les fonctions usuelles. Or cette technique nous semble intéressante car elle permet entre autres d'assurer la maîtrise de la représentation graphique des fonctions trigonométriques de ce type en faisant ressortir leurs propriétés géométriques relativement aux techniques liées à la dérivée qui seront mises en place en Première, et qui, proposant une technique standard pour l'étude de toutes les fonctions, auraient peut-être tendance à masquer ces propriétés. De plus, la généralisation à d'autres fonctions que les seules fonctions cosinus et sinus, peut permettre d'élargir les exercices à proposer aux élèves relevant du cadre fonctionnel.

3. Analyse du manuel de Première

3.1 Description générale du manuel

Nous avons retenu le manuel de mathématiques "Transmath, 1ère", des éditions Nathan, 1994. Nos critères de choix pour le manuel de Première sont sensiblement identiques à ceux qui ont motivé notre choix du manuel de Seconde, quoique de l'avis des quelques enseignants qui nous ont conseillée sur le choix des manuels, les exercices proposés soient dans l'ensemble de difficulté quelque peu supérieure.

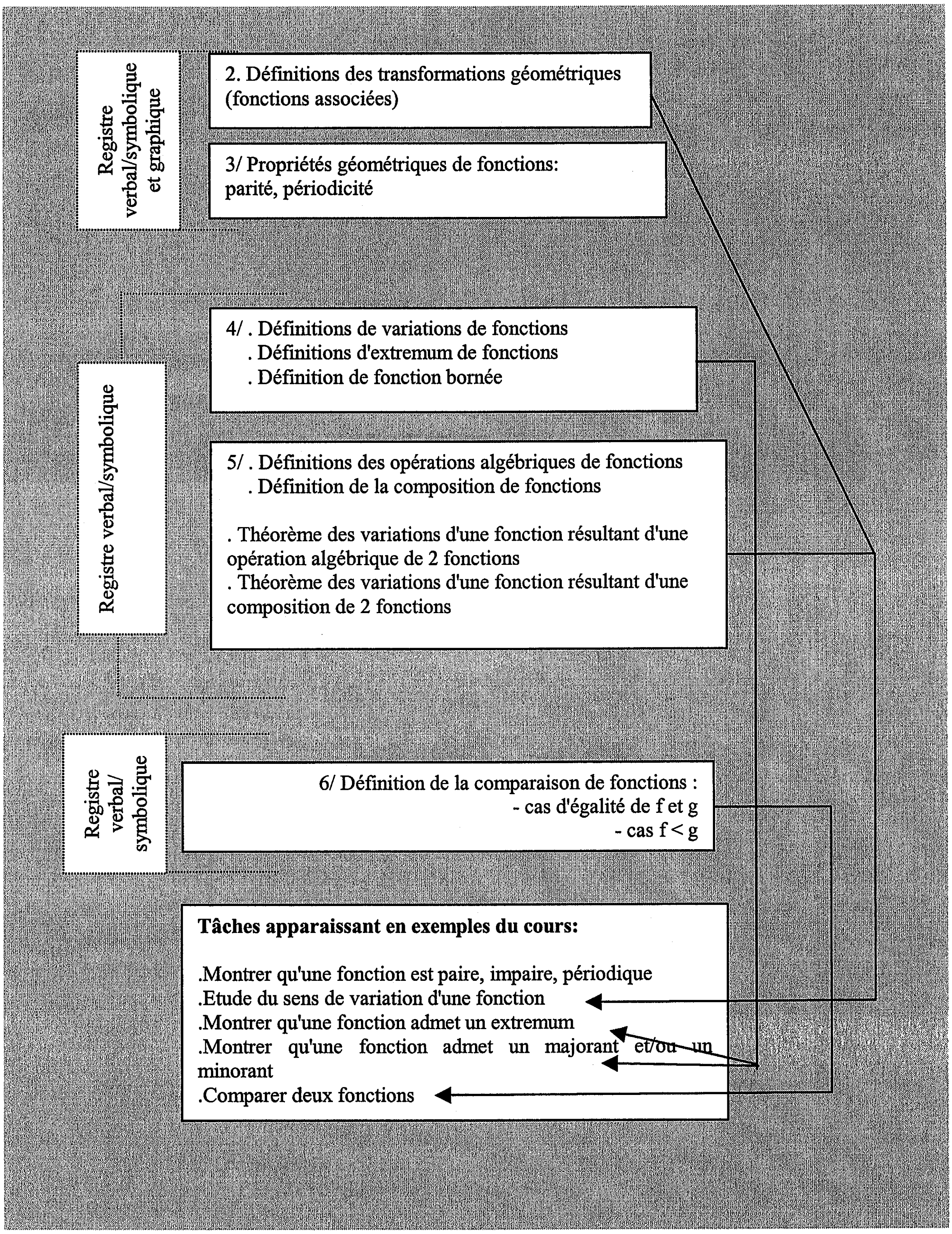
Quatre chapitres de ce manuel nous concernaient a priori, les deux chapitres d'algèbre (le chapitre 2 "Le second degré" et le chapitre 3 "Les polynômes") et les deux chapitres sur les fonctions (le chapitre 4, "Fonctions Numériques" et le chapitre 7 "Applications de la dérivation") puisque nous avons, bien sûr, écarté les chapitres d'analyse. Notre idée était d'étudier également comme, nous l'avons fait pour le manuel de Seconde, l'utilisation éventuelle de la fonction en tant qu'outil dans le domaine algébrique. Cependant une lecture attentive de ces deux chapitres a fait ressortir que dans le manuel de Première, certains domaines algébriques étaient assez nettement distingués du fonctionnel, comme prévu par ailleurs par les programmes. Ainsi, le chapitre sur les polynômes notamment, présente uniquement des traitements algébriques de polynômes (recherche de racine, factorisation, simplification, développement, etc.) sans souligner la dimension fonctionnelle que peuvent avoir ces activités : les pratiques algébriques développées n'y sont pas mises en relation avec l'objet fonction. Aussi, avons nous décidé en définitive de l'exclure de notre analyse en pensant que cela n'affecterait pas notre travail sur le fond. Nous retiendrons néanmoins que les résultats établis dans ce chapitre pourront être réinvestis par la suite dans l'étude de fonctions : recherche de racines de la dérivée pour déterminer le sens de variation, étude du signe d'une fonction, égalité de fonctions, etc. Nous avons procédé de même, pour le chapitre "le second degré". Soulignons que l'étude des polynômes du second degré également conçue dans le domaine algébrique est néanmoins appliquée à l'étude des fonctions du second degré (étude des variations, recherche d'extremum, représentation graphique). Mais puisque cette technique d'étude de fonctions se limite à une classe particulière de fonctions, nous avons également écarté ce chapitre de notre analyse en pensant qu'il n'apporte rien de nouveau du point de vue de l'avancement de la notion de variation prise dans sa généralité. Ceci permet également d'alléger quelque peu la présentation de notre travail . Nous retiendrons néanmoins l'existence de cette technique d'étude reliant les deux domaines algébrique et fonctionnel pour le cas des fonctions du second degré, dans la mesure où certains élèves pourraient la préférer aux autres techniques plus générales d'étude de fonctions et de leurs variations quand une fonction du second degré sera en jeu.

Précisons enfin, que sur les deux chapitres retenus en définitive, le premier présente des techniques d'étude de fonctions précédant l'utilisation de la dérivée qui n'est introduite que dans le chapitre 6 du manuel.

Chaque chapitre se décompose en cinq parties principales, les parties "activités", "cours", "travaux pratiques" et "exercices" sont identiques à celles du manuel de Seconde. Il faut leur ajouter la partie intitulée "Utilisation" qui succède au cours et présente les principales tâches et leur technique de résolution en application de l'environnement technologique présenté dans le cours. Elle rappelle "les exercices rédigés" du manuel de Seconde mais constitue une section plus conséquente pour les savoir-faire à institutionnaliser.

3.2 Description et analyse du chapitre 4 "Fonctions numériques"

3.2.1 Organigramme du cours



3.2.2 Description, commentaire et analyse du cours

Ce chapitre est consacré comme son nom l'indique aux fonctions numériques dans leur ensemble. Il est à rapprocher des chapitres "Fonctions classiques" et "Fonctions trigonométriques" du manuel de Seconde, les fonctions trigonométriques ne faisant pas l'objet d'un chapitre distinct dans ce manuel de Première. Le chapitre "Fonctions numériques" se présente ainsi en 6 sections traitant chacune d'une ou de plusieurs notions liées dont la plupart ont déjà été enseignées en classe de Seconde. Comme nous l'indique l'organigramme du chapitre, la première section, intitulée "Généralités" porte en fait sur le rappel des notions de fonction, image, antécédent, etc., sur lesquelles nous ne reviendrons pas. La deuxième section porte sur les "fonctions associées", la troisième sur les propriétés de parité et de périodicité, la quatrième sur la notion de variation et celles qui lui sont liées (monotonie, extremum), auxquelles il faut également ajouter ici la notion de fonction bornée (majorant, minorant). La cinquième section porte sur les opérations (dont la composition) de fonctions, enfin, la sixième section est consacrée à la comparaison de fonctions.

L'objet d'enseignement : fonction associées

Les quatre principales transformations géométriques à connaître en classe de Première sont définies dans cette section : la translation de vecteur a i + b j (non nécessairement colinéaire aux vecteurs des axes), la réflexion d'axe (Ox), la réflexion d'axe (Oy) et la symétrie de centre O (et non la symétrie centrale en général). Les définitions sont données à la fois dans le registre symbolique/algébrique du cadre fonctionnel (par une équation liant la fonction et sa transformée) et dans le registre verbal/symbolique du cadre géométrique. Une illustration dans le registre graphique accompagne également chacune de ces définitions.

Les auteurs de ce manuel ont choisi d'inclure les transformations dans le cours de Première alors que ce sujet n'apparaît dans le programme qu'en travaux pratiques et sans mention du terme transformation. Le cours se contente d'établir les différentes définitions relatives aux quatre transformations à enseigner. Comme nous l'avons souligné dans l'analyse des programmes, la fonction est plutôt à considérer, dans cette section, comme un objet puisque l'accent est mis sur sa forme globale grâce notamment à la présence du registre graphique.

Les objets d'enseignement : parité, périodicité

Les définitions générales d'une fonction paire, impaire, périodique de période T, sont de nouveau énoncées en classe de Première. Il n'y a d'ailleurs pas de différence entre les énoncés des classes de Seconde et de Première. Elles sont établies, comme en classe de Seconde, à la fois dans le cadre fonctionnel (registre verbal/symbolique) et dans le cadre géométrique (allure de la courbe).

En fait, la différence notoire entre les deux classes n'apparaît que dans les commentaires des définitions : l'accent y est mis d'une part sur les domaine de définition des fonctions, notamment pour les fonctions paires ou impaires ("il faut vérifier la symétrie de l'ensemble de définition par rapport à zéro") ; et d'autre part sur les conséquences de ces propriétés quant à l'intervalle d'étude de la fonction ("si une fonction est paire ou impaire, il suffit de l'étudier sur D_f [0; + [", si une fonction est périodique, de période T, il suffit de l'étudier sur D_f [0; T[". Ces notions, introduites en 2nde, se précisent en 1ère, quoiqu'elles ne fassent pas non plus l'objet d'un enseignement formel conformément aux indications des programmes. L'enseignement des notions d'ensemble de définition et d'intervalle d'étude est présentée de façon ostensive à travers les exemples des fonctions à étudier. Ces remarques mettent par ailleurs l'accent sur une tâche qui se dessine plus clairement en classe de Première, celle d'étude de fonction".

Les objets d'enseignement : variation, extremum, fonction bornée

Les notions de "fonction croissante", "fonction décroissante", de "minimum" et de maximum" déjà vues en Seconde sont définies de nouveau en Première. Les mêmes définitions (définitions des inégalités d'après notre appellation) sont reprises en classe de Première. Elles y sont directement énoncées dans le registre algébrique du cadre fonctionnel, sans premier passage intuitif, comme en classe de 2nde, par l'exemple des fonctions de référence. Cette même description reste valable pour la présentation des notions, nouvelles en Première, de "majorant", "minorant" et "fonction bornée". Quelques commentaires concernant le lien entre les notions de majorant, minorant et maximum, minimum suivent. Enfin, Le registre graphique n'est éventuellement présent qu'à titre d'illustration.

La nouveauté par rapport à la classe de Seconde apparaît également dans les commentaires. Ces notions vont être impliquées dans la tâche d'étude de fonction : "lors de l'étude d'une fonction, on décompose l'ensemble de définition en intervalles où la fonction est monotone", et une indication concernant la construction d'un tableau de variations est proposée : "On regroupe alors l'étude de variation sur un tableau dit tableau des variations de la fonction" (p.98).

C'est également dans cette section, en commentaire, que la finalité de l'enseignement sur les transformations apparaît: "il est possible, en utilisant le sens de variation des fonctions de référence et des fonctions associées, d'étudier des fonctions plus complexes" (p.99). Ainsi, la décomposition des fonctions complexes en fonctions de référence et fonctions associées entre dans la technique d'étude des variations de fonctions. Voilà que se dessine un nouvel environnement technique et technologique pour la détermination des variations de fonctions. De façon générale, la tâche d'étude de fonction se précise comme tâche emblématique en Première dans laquelle nombre de notions, dont celle de fonctions associées, pourraient être impliquées et y trouver leur finalité.

L'objet d'enseignement : opérations sur les fonctions

Cette section comprend non seulement les définitions des opérations algébriques de fonctions numériques et de l'opération de composition de deux fonctions numériques, avec précision sur le domaine de définition de la fonction résultante, mais également les théorèmes relatifs aux variations d'une fonction résultant d'une opération ou d'une composition d'autres fonctions aux variations connues. Définitions et théorèmes sont donnés dans le seul registre algébrique.

Le cadre fonctionnel est également mis en avant dans cette section, non seulement par l'énoncé des définitions mais également par la place consacrée aux variations de fonctions. Les différentes opérations de fonctions telles qu'elles sont vues dans ce chapitre ont une finalité : elles sont réinvesties dans l'étude des variations de fonctions plus complexes.

Les auteurs du manuel ont donc choisi d'inclure dans l'environnement technique et technologique de l'étude des fonctions ou plus précisément de l'étude des variations de fonctions, non seulement la composition de fonctions mentionnée par le programme mais aussi les opérations algébriques sur les fonctions. Cet environnement pour l'étude de fonctions est fondamentalement nouveau en Première. L'utilisation de la composition et des opérations algébriques selon leur statut outil contribue, comme nous l'avions souligné dans l'étude des programmes, vise probablement à donner davantage de sens à la notion d'opérations sur les fonctions, ainsi qu'à favoriser l'appréhension de la fonction en tant qu'objet puisque l'élève doit s'interroger sur les variations des différentes fonctions mises en jeu. Il nous faudra voir cependant dans l'analyse des exercices jusqu'à quel degré cette approche des opérations et de la composition est favorisée.

L'objet d'enseignement : comparaison de fonctions

La comparaison de deux fonctions en tant qu'objet institutionnalisé est également un objet nouveau en classe de Première, elle a néanmoins été rencontrée de façon informelle à travers des exercices/problèmes. Deux définitions se succèdent, celle de l'égalité de deux fonctions numériques (qui est une généralisation de la définition de l'égalité de deux polynômes, même si on peut se ramener à des techniques algébriques dans le cas des polynômes, ce qui n'est pas toujours vrai dans le cas général), et celle d'une fonction strictement inférieure à une autre. Si la première est donnée uniquement dans le registre verbal/symbolique du cadre fonctionnel, la seconde est donnée dans les deux cadres fonctionnel et géométrique, appuyée d'une illustration graphique.

Ces définitions déterminent l'environnement technique/technologique qui permet de réaliser les tâches de comparaison de fonctions. La technique du registre graphique est commentée en remarque, la technique du registre algébrique s'éclaircit grâce aux deux exemples résolus de cette section. Pour montrer que deux fonctions sont égales, la technique algébrique consiste en une réécriture algébrique. Pour montrer qu'une fonction f est inférieure à une autre fonction g, la technique algébrique proposée consiste à étudier le signe de l'expression "f(x) - g(x)", donc se ramène à l'étude du signe de la fonction résultant de la différence des deux fonctions f et g. En cela, cette section constitue une des finalités du chapitre sur les polynômes.

Cependant nous soulignerons une fois de plus, qu'il est fort peu probable que l'expression "f(x) - g(x)" soit considérée par les élèves comme référant à une fonction. D'ailleurs, cette référence, qui fait pourtant implicitement partie de la technique, occulte la tâche de comparaison proprement dite des deux fonctions de départ. Il nous semble que les élèves s'attacheront plutôt à l'expression algébrique elle-même qu'à sa signification en termes de comparaison de fonctions. Le recours au cadre géométrique par l'intermédiaire du registre graphique, avec l'étude de la position relative des deux courbes, renforce, par contre, l'interprétation en termes de comparaison de fonctions, en donnant une base intuitive plus solide. La comparaison de fonctions, dans le registre graphique, contribue également à l'appréhension de la fonction en tant qu'objet puisque les deux fonctions à comparer sont manipulées globalement.

3.2.3 Synthèse de l'analyse du cours

Il apparaît à l'analyse de l'ensemble des sections du chapitre que les notions sont présentées ici dans le cadre de la tâche emblématique d'étude de fonction. En effet, ce terme revient souvent dans le cours sans que ne soit précisé, pour autant, ce qu'il recouvre précisément. Néanmoins, il est possible de deviner à travers les lignes, par les notions présentées dans le cours, que l'étude de fonction comprend la détermination de certaines caractéristiques, propriétés et attributs de la fonction : celles de domaine de définition et d'intervalle d'étude, celles de parité, périodicité, et celles de variations, extremum, et majorant/minorant. Ces propriétés et attributs sont donc principalement considérés selon leur statut objet.

Les notions d'opérations/composition de fonction, introduites en tant qu'objet dans le registre algébrique s'intègrent parfaitement dans l'étude de fonctions. Utilisées alors selon leur statut outil, elles sont impliquées à un niveau technologique dans la détermination des variations de fonctions qualifiées de complexes, et permettent la résolution de cette tâche selon une technique bien différente de la technique des inégalités utilisée en classe de Seconde. La notion de fonctions associées, via les transformations, est essentiellement présentée selon son statut objet. Avec la tâche de comparaison de fonctions, dans le registre graphique surtout, elles aident par une manipulation globale de la fonction, à l'appréhension du concept de fonction selon son statut objet.

Remarquons pour terminer que les fonctions apparaissent dans ce chapitre dans un cadre général familier aux élèves. Nombres de notions ont déjà été vues en classe précédente et sont donc revues en Première aussi nous constatons que leur présentation se passe, en général, non seulement d'une introduction sur une base intuitive mais même d'une première présentation à l'aide d'exemples particuliers de fonctions.

Enfin, conformément aux directives du programme, les exigences au niveau théorique ne sont pas plus grandes en Première qu'en Seconde. Si on constate une absence d'introduction intuitive des notions, en partie liée au fait qu'une grande partie des notions ont déjà été vues en Seconde, la formalisation se limite, dans ce chapitre, à une succession d'énoncés formels définissant un environnement technologique pour la résolution de tâches à l'aide de techniques qui ne sont souvent présentées que de manière implicite et qu'il faut deviner dans les commentaires ou à travers les exemples du cours, et par une plus grande insistance sur le registre algébrique dès l'installation des différentes notions.

3.2.4 Analyse de la partie exercices/problèmes

3.2.4.1 Analyse par cadres et registres utilisés

Les cadres

La majorité des 80 exercices/problèmes retenus sont énoncés dans le cadre fonctionnel. Les changements de cadres éventuels dans un exercice, mettent principalement en jeu les cadres fonctionnel et le cadre géométrique. Ce dernier cadre apparaît comme un des principaux cadres, après le cadre fonctionnel, intervenant dans la mise en place des différentes notions enseignées. Le cadre numérique n'est pas envisagé, en général, comme cadre intervenant explicitement dans les stratégies de résolution. Nous reviendrons sur la place de ces différents cadres dans la synthèse du chapitre.

Les registres

(voir tableau des registres du chapitre 4 du manuel de 1ère en annexe du chapitre III)

Le tableau des registres et changements de registres établit clairement la primauté des registres algébrique et graphique dans les exercices/problèmes de ce chapitre de Première. La variété des registres, relativement à la classe de Seconde, est maintenu, mais, à l'exception des registres graphique et algébrique, l'utilisation de chacun des autres registres a tendance à se limiter à un type de tâche bien précis, ce qui a tendance à limiter leur impact dans l'acquisition des différentes notions visées. Ainsi, nous notons une disparition totale des registres de tableau de valeurs et de programmation (ils ne font pas l'objet d'une tâche explicite et ne peuvent être éventuellement présents que dans les techniques de résolution et à la seule initiative des élèves). Le tableau de variations est présent dans 12 exercices différents sur 80 mais il ne fait l'objet d'aucune exploitation, le registre verbal/symbolique, présent dans seulement 6 exercices différents sur 80, est donc très marginal. Ces deux points seront éclaircis dans l'analyse par tâches et techniques. Les registres algébrique ou graphique apparaissent en tant que registre de départ dans 76 exercices/problèmes, et sont souvent présents les deux à la fois, dans environ le tiers des exercices/problèmes. Le registre algébrique apparaît seul sans conversion vers le registre graphique dans 15 d'entre eux, alors que le registre graphique apparaît seul sans conversion vers le registre algébrique dans 11 d'entre-eux. L'analyse par tâches et techniques nous donnera la place véritable de chacun de ces registres.

3.2.4.2 Analyse par tâches et techniques (80 exercices/problèmes)

(voir tableau des tâches et techniques du chapitre 4 du manuel de 1ère en annexe du chapitre III)

Les tâches qui apparaissent dans la banque d'exercices de ce chapitre, d'après le tableau des tâches et techniques sont les tâches de :

- "Variation" (16 exercices/problèmes),
- "Représentation de fonction" (dans 20 exercices, la tâche de représentation graphique de fonction étant présente dans 14 d'entre-eux),
- "Opération/composition" (dans la très grande majorité des cas, intégrées en tant que tâche implicite ou explicite dans la tâche d'étude du sens de variation,
- " Transfo-1/transfo-2" (12 exercices/problèmes),
- "Centre/axe de symétrie (7 exercices/problèmes),
- " Parité-1/parité-2 " (18 exercices/problèmes),
- "Périodicité-1/ périodicité-2" (7 exercices/problèmes),
- "Majorant/minorant" (6 exercices/problèmes),
- "Extremum" (1 exercices/problèmes),
- "Comparaison de fonction" (9 exercices/problèmes),
- "Egalité de fonction" (2 exercices/problèmes),
- "Equation/inéquation" (6 exercices/problèmes),
- "Domaine de définition" (6 exercices/problèmes),
- "Image/antécédent" (6 exercices/problèmes),
- "Relation/fonction" (1 exercice),
- "Reconnaissance de fonction" (1 exercice),
- "Expression de fonction" (2 exercices/problèmes).

Les différentes tâches apparaissent généralement sous forme de tâches isolées, ce qui s'accorde avec le fait que le nombre de problème est relativement bas : 7 problèmes sur 8 ont été retenus, sur 80 exercices/problèmes. En fait, nous verrons que si deux tâches sont associées dans un exercices, il s'agit de deux tâches liées dans le sens où, soit elles constituent deux sous-tâches composant une même tâche à résoudre selon une technique bien précise, soit elles visent la mise en œuvre de deux techniques différentes pour la résolution d'une même tâche. Cette constatation sera éclaircie par quelques exemples au cours de l'analyse de ces exercices/problèmes.

La tâche d'étude des variations

Elle apparaît dans 16 exercices/problèmes différents. Nous excluons deux d'entre eux dont l'un est une tâche de réflexion sur la définition du sens de variation, et l'autre est une tâche de détermination des variations d'une fonction selon la technique graphique. Les 14 autres exigent deux techniques de résolution distinctes, toutes les deux nouvelles pour la classe de Première. Ainsi, la technique algébrique des inégalités, mise en place en Seconde est complètement écartée en Première alors que, rappelons-le, la dérivée n'a pas encore été enseignée et n'intervient donc pas au niveau de la détermination des variations d'une fonction.

- *La technique la plus courante* est celle basée sur *les théorèmes de variations* de *fonctions par opération (ou composition)* institutionnalisée dans le cours. Elle est présente dans 12 de ces 14 exercices/problèmes, dont un exercice rédigé et un T.P et est généralement demandée de façon plutôt explicite :

"A l'aide de la somme (du produit/ de la décomposition), déterminer les variations des fonctions suivantes ..." ou
"Quel est le sens de variation de f ? de g ? de fog ?"
"Montrer que f peut s'écrire sous la forme hog où h(x) = ... et g(x) =... Quel est le sens de variation de f ?"

Dans deux exercices seulement, cette technique n'est pas demandée de façon aussi claire mais elle nous semble néanmoins imposée par le contrat didactique étant donnée la formulation de l'énoncé :
"Etudier les variations des fonctions (...) à l'aide des fonctions de référence".

Notons que ces deux exercices sont des problèmes, ce qui peut laisser penser que la technique n'est pas explicitement demandée dans le but de laisser une plus grande initiative aux élèves.

La résolution de la tâche de variation selon cette nouvelle technique mise en place en Première suppose deux sous-tâches principales : la décomposition des fonctions par opérations (ou composition) en fonctions de référence ou qui en résultent simplement, et la détermination des variations de ces dernières. La décomposition des fonctions doit tenir compte des intervalles de monotonie des fonctions formant la fonction à étudier. Justement, ces intervalles sont précisés dans la majorité des 13 exercices/problèmes concernés : leur détermination n'est laissée à la charge des élèves que dans un seul exercice et un seul problème.

Quant à la détermination des variations des fonctions de référence ou de celles qui s'en déduisent simplement, elle se réalise selon la technique de mémoire suivie, si nécessaire, de la technique d'opération/composition. Ainsi, la détermination des variations de la fonction "$f(x) = (1/2)\ x^3$" d'après l'exemple résolu de ce chapitre :
"La fonction cube étant strictement croissante sur R, par produit par le nombre positif 1/2, f est croissante sur R".

Les deux techniques de mémoire et de d'opération/composition doivent donc être utilisées pour déterminer les variations de la fonction $f(x) = (1/2)\ x^3$ qui se déduit très simplement de la fonction cube. L'utilisation simultanée de ces deux techniques, dans des cas aussi simples, est laissée à l'initiative de l'élève, et semble être considérée comme non problématique puisqu'il est fait référence à cette tâche, dans les différents exercices/problèmes, par des formulations telles que : "rappeler des variations de la fonction ..." ou "dresser le tableau de variations de la fonction ...".

- *La deuxième technique* est présente dans deux de ces 14 exercices/problèmes. Ils utilisent une transformation comme outil de résolution : Il s'agit de déterminer les variations d'une fonction g à partir des variations d'une fonction f, en remarquant que g est la transformée de f ; Ainsi les deux questions extraites du problème suivant :

  "(...) Déterminer les réels a et b tels que pour tout réel x, on ait $h(x) = (x - a)^2 + b$.
  En déduire les variations de h sur [0; + [. (...)". (extrait du problème70, p.124)

Ici, la connaissance des variations de la fonction carré doit permettre à l'élève de déduire celle des variations de sa transformée h ; les énoncés de ces deux questions présentent un certain niveau d'implicite, nous semble t-il, quant au recours à l'outil de transformation. Néanmoins, ce sont bien les sous-tâches implicites de tranfo-1 puis de transfo-2 qui sont ici en œuvre pour l'identification de la transformation à partir de la réécriture algébrique de l'expression de la fonction transformée, puis l'application de la transformation identifiée pour obtenir les variations de la transformée. Les tâches transfo-1, transfo-2 apparaissent, ici, comme des sous-tâches naturalisées de la tâche de variation selon la technique de transformation (voir technique des opérations pour la tâche de d'étude des variations dans le chapitre I) . Le niveau d'implicite, qui vise à donner plus d'initiative à l'élève, rend la tâche à résoudre plus complexe et explique que cette tâche/technique soit proposée dans des exercices classés problèmes.

Par ailleurs, ces tâches de variation, les deux techniques confondues, et les sous-tâches qui leur sont liées apparaissent souvent dans des exercices/problèmes qui leur sont uniquement consacrés : c'est le cas de 9 exercices sur 14. L'objectif de ces exercices est donc clairement l'apprentissage des techniques correspondantes dont l'environnement technologique a simplement été exposé dans le cours. Nous nous trouvons alors face à un cours construit de manière plutôt classique : institutionnalisation de l'environnement technologique dans le cours et application à l'aide d'exercices entièrement consacrés à la notion et/ou à la technique. Nous remarquerons, dans ce qui suit, que cette présentation des notions nouvelles et des techniques de résolution relatives aux tâches concernées est générale dans ce chapitre.

La tâche d'étude des variations est rarement associée à d'autres tâches et ceci ne se réalise que dans des problèmes, lorsque, justement, l'objectif premier n'est plus uniquement l'apprentissage de la technique relative à la tâche. Ces problèmes pourraient faire déjà référence à l'étude de fonctions si souvent mentionnée dans ce chapitre et à laquelle les élèves sont déjà familiers depuis la classe de Seconde. Or, nous remarquerons dans un premier temps qu'ils réunissent rarement la tâche d'étude des variations et la tâche de représentation graphique de fonction, et que si ces deux tâches se trouvent réunies au sein d'un même problème (c'est le cas de deux problèmes seulement), la tâche d'étude des variations ne justifie pas, toujours, le tracé de la fonction. Ceci nous pousse à nous interroger sur la place de la tâche d'étude des variations relativement à celle de représentation graphique. Pourquoi les variations ne servent-elles pas à représenter graphiquement une fonction, et comment obtenir alors cette représentation graphique ? Et plus généralement, ceci nous pousse à nous demander ce que comportent les problèmes de type étude de fonction dans ce chapitre.

La tâche de représentation de fonction

Cette tâche apparaît certes dans 20 exercices/ problèmes différents et semble donc, par son nombre d'apparitions, être la tâche la plus importante de ce chapitre. Mais cette première constatation est à nuancer. Elle correspond, dans ce chapitre, aux conversions de registres suivantes : conversion du registre algébrique vers le registre graphique (13 exercices/ problèmes), du registre algébrique vers le registre du tableau de variations (7 exercices/ problèmes), enfin du registre du tableau de variations vers le registre graphique (4 exercices/ problèmes).

* Les techniques permettant de passer du registre algébrique vers le registre graphique sont au nombre de 4 :

- *La technique de mémoire ou de changement d'origine et/ou d'échelle* (présente dans 6 sur 13 exercices/problèmes), utilisée en Seconde pour les fonctions de référence ou celles qui s'en déduisent simplement. Cette technique n'est jamais précisée à l'élève en classe de Première, soit qu'elle soit jugée comme suffisamment maîtrisée par l'élève, soit que la possibilité lui soit laissée d'obtenir le graphe de la fonction à l'aide de la calculatrice graphique. Ce qui laisse à penser que l'obtention du tracé d'une fonction n'est pas un véritable objectif, du moins pour ces exercices là, le tracé servant plutôt à conjecturer certains résultats à valider dans le registre algébrique.
- *La technique point par point* explicitement demandée dans 3 exercices/problèmes dont 1 classé problème. Curieusement, dans deux de ces exercices/problèmes, l'étude des variations de la fonction est demandée mais ne va pas servir à tracer la fonction. Il s'agit respectivement d'obtenir le graphique d'une fonction somme et d'une fonction composée. La technique des variations et la technique numérique/graphique sont ainsi mises en parallèle. Il s'agit de l'unique occasion offerte dans cette banque d'exercices/problèmes où les opérations de fonctions soient abordées dans un autre registre que dans le registre algébrique.
- *La technique des variations par opération/composition* qui ne précède et justifie la représentation graphique de la fonction que dans un seul exercice.
- *La technique de symétrie liée à la valeur absolue.* Cette technique est uniquement valable pour les fonctions présentant une valeur absolue (dans 3 exercices dont un T.P présentant justement la technique en question). L'obtention de la courbe selon cette technique est bien un objectif en soi et semble être une création didactique permettant d'élargir le champ des tâches susceptibles d'être proposées à propos de l'étude des fonctions.

* Deux techniques permettent de passer du registre algébrique vers le registre du tableau de

variation :

- *La technique de mémoire qui apparaît dans 4 exercices,* est explicitement demandée et s'applique toujours à des fonctions de référence. Elle est suivie dans 3 exercices sur 4 de la tâche de représentation graphique de fonction. Le tableau de variations est demandé directement puisque l'étude des variations a dans ce cas été faite dans le cours. Mais l'élève étant supposé capable de dresser de mémoire le tableau de variations de la fonction, devrait, nous semble-t-il être également capable de tracer de mémoire le graphe de cette même fonction, aussi il se pourrait très bien qu'il n'utilise pas le tableau de variations pour tracer la fonction mais qu'il réalise dans ce cas là également une conversion directe algébrique-graphique.
- *La technique permettant d'obtenir le tableau de variations d'une fonction après l'étude de ses variations.* Cette tâche selon cette technique apparaît dans 3 exercices où la tâche de détermination des variations est demandée au préalable. Sur ces 3 exercices, un seul demande pour tâche supplémentaire la représentation graphique de la fonction. Cette constatation, associée au fait que nous n'avons répertorié qu'un seul exercice où l'étude des variations de la fonction justifie directement son tracé (sans passer par le tableau de variations), nous confirme dans l'idée que les variations de fonctions par opération/composition n'ont pas pour finalité dans ce chapitre de permettre de tracer le graphe d'une fonction, par contre la familiarisation avec l'obtention du tableau de variations à partir de l'étude des variations de la fonction est probablement un des objectifs de ce chapitre et elle est envisagée par ostension.

* La technique relative à la conversion du registre du tableau de variations vers le registre graphique ne nécessite pas d'être présentée. Nous noterons simplement que sur trois de ces quatre exercices, le tableau de variations est obtenu par la technique de mémoire et que cette conversion de registre est l'unique tâche du quatrième exercice. Les auteurs ont probablement voulu par ces exercices entraîner les élèves au tracé d'une courbe à partir d'un tableau de variation.

Nous n'analyserons pas les autres tâches de représentation de fonction, soit celles associées aux changements de registres suivants d'après notre tableau de registres :

la conversion du graphique au tableau de variation, du verbal/symbolique au graphique, et des deux registres algébrique et graphique vers le registre algébrique. Leur très faible apparition, dans un ou deux exercices et souvent en tant que tâche unique, en fait des exercices très marginaux.

Nous pouvons déjà remarquer concernant la relation entre les deux tâches d'étude des variations et de représentation de fonction, que l'étude des variations de fonction dans ce chapitre n'a pas pour objectif d'obtenir et donc de justifier la représentation graphique d'une fonction. Ainsi l'association des tâches étude des variations d'une fonction, représentation du tableau de variations et représentation graphique ne se réalise pas dans les exercices/problèmes de type étude de fonction. La tâche d'étude des variations de fonction a plutôt pour objectif l'acquisition des nouvelles techniques de résolution de cette tâche (techniques d'opération/composition ou de transformation) mises en place dans ce chapitre, ainsi que celui de rendre fonctionnel le concept d'opération/composition de fonction, et dans une moindre mesure, le concept de transformation de fonction. Enfin, les auteurs n'ont pas manqué de proposer aux élèves des exercices visant à dresser un tableau de variations à partir d'une étude des variations de fonction et à tracer une courbe à partir d'un tableau de variations, l'enseignement de ces conversions de registres étant essentiellement envisagé de manière ostensive et leur apprentissage laissé à la charge des élèves.

La tâche d'opérations algébriques et de compositions

Ces tâches ont été analysées avec la tâche d'étude des variations de fonctions. Soulignons donc simplement que seuls deux exercices sont prévus pour être uniquement consacrés à cette tâche et seulement pour le cas de la composition. Probablement parce que du point de vue de la technicité algébrique requise la composition est plus difficile que les opérations algébriques. Les exercices où apparaissent les tâches d'opérations algébriques et de compositions sont pour leur grande majorité des tâches de d'étude des variations. La tâche d'opération/composition y est demandée de façon plus ou moins explicite, nous l'avons dit. Enfin, ces tâches peuvent apparaître liées à la tâche de parité (voir ci-dessous tâche de parité) dans des exercices visant à l'étude de la conservation de la propriété de parité dans certains cas d'opérations algébriques ou de composition. Ceci montre bien que les tâches d'opérations et de compositions de fonction sont essentiellement proposées selon leur statut outil dans l'objectif de leur donner plus de sens.

Les tâches de transformations (Transfo-1 et 2)

Ces tâches apparaissent dans 12 exercices. Huit d'entre eux consistent , à obtenir une fonction à partir d'une autre par une succession des tâches Transfo-1 et Transfo-2 (voir techniques relatives aux tâches de transformations géométriques dans le chapitre II) explicitement demandées : l'objectif y est donc l'acquisition des techniques nécessaires à la reconnaissance d'une transformation puis à l'obtention de la transformée d'une fonction.

Les transformations, quoique plus rarement (dans 4 exercices/problèmes) dans cette banque d'exercices/problèmes, sont aussi impliquées selon leur statut d'outil pour la détermination des variations ou du tableau de variations de la transformée d'une fonction. Cette utilisation des transformations, dans le cas de la détermination des variations d'une fonction, a déjà été présentée ci-dessus lors de l'analyse des techniques liées à la tâche d'étude des variations, où nous avions souligné que les tâches de transfo-1 et transfo-2 y étaient implicites, et qu'elles étaient intégrées dans la tâche de variation selon la technique de transformation. Dans les deux autres exercices, les tâches de transfo-1 et surtout de transfo-2 sont plus explicites, aussi nous les repérons dans notre tableau des tâches et techniques par les mentions transfo-1 puis transfo-2. Ainsi, l'exercice :

"(L'expression algébrique de la fonction f est donnée dans l'énoncé)
1° Déterminer les réels a et b tels que, pour tout réel x : f(x) = (x-a) 3 + b
2° Rappeler le tableau des variations de la fonction cube f(x) = x3.
En déduire celui de la fonction f et le tracé de la courbe." (exercice 15, p.115)

Ici, le tableau des variations de la fonction cube permet de justifier le tableau des variations de la fonction transformée, par ailleurs la fonction d'origine est explicitement donnée. Rappelons que degré d'implicite ou d'explicite présent dans l'énoncé a motivé la distinction que nous avons faite entre tâche de variation selon la technique de transformation et les tâches de transformation de type 1 et 2 (voir techniques relatives aux tâches de transformations géométriques, chapitre II). Par ailleurs, il nous semble plus facile, du moins dans les débuts de l'enseignement des transformations, de passer d'un tableau de variations d'une fonction à celui de sa transformée que directement des variations d'une fonction à celles de sa transformée.

Mais il nous semble que, sur le fond, les tâches de tableau de variations et de détermination des variations de la fonction sont équivalentes dans la mesure où tableau de variations et variations de la fonction de la fonction transformée sont également justifiées par la connaissance de la fonction d'origine. (Voir Chapitre II, les techniques relatives aux tâches de transformation géométriques, ainsi que la technique des opérations pour la tâche de détermination des variations d'une fonction).

Ainsi, les tâches de transformation en tant qu'outil s'intègrent dans des problèmes d'étude de variations de fonction. Cette utilisation de la transformation est entièrement à la charge de l'élève puisqu'elle n'est pas présentée dans le cours. Elle est intéressante en ce sens, car l'élève doit par ses propres moyens, déterminer la technique de résolution par adaptation de la technique d'opération/composition de détermination des variations. Elle fait partie des rares tâches/techniques proposées aux élèves dans cette banque d'exercices/problèmes qui laissent plus d'initiative à l'élève et ne soient pas une pure application du cours.

En tant qu'objet, les transformations n'apparaissent que ponctuellement dans une tâche relativement isolée du reste du problème car elle ne sont pas réinvesties dans le problème pour l'obtentions d'autres résultats. Il en est de même de la tâche de centre/axe de symétrie qui n'a d'autre valeur, en général, que celle d'être mise en évidence. Ces deux dernières tâches viennent souvent clore un problème. Elles nécessitent le recours au cadre géométrique et semblent être une création didactique permettant de varier les types de tâches en relation avec les fonctions et peut-être amener une utilisation ultérieure.

La tâche de mise en évidence d'un centre/axe de symétrie

Elle apparaît dans 8 exercices/problèmes dont un T.P entièrement consacré à la présentation de la technique de résolution : la technique de changement d'origine détaillée dans notre chapitre II. Nous remarquons que sur les 7 autres exercices, 6 d'entre eux sont entièrement consacrés à cette tâche : 4 sont précédées d'une tâche algébrique de réécriture de l'équation de la fonction visant à induire l'utilisation de la technique ; deux exercices et un problème laissent la tâche de réécriture algébrique à la charge des élèves.

- *"Soit la fonction f telle que $f(x) = (x^2+3x+1) / (x+2)$ et C sa courbe représentative obtenue à l'aide d'une calculatrice graphique (La représentation graphique de f est donc donnée).*
  1° Soit le point Ω de coordonnées (-2; -1). Déterminer une équation de la courbe C dans le repère (Ω ; i ; j).
  2° Que peut-on en déduire pour la courbe C ? (exercice 26, p.116)".

Quoique la question de mise en évidence d'un centre de symétrie ne soit pas explicitement posée, il nous semble que la tâche et la technique visées par les auteurs ne peuvent laisser aucun doute aux yeux des élèves. Remarquons que ces deux tâches sont liées dans le sens où elles se présentent comme deux sous-tâches relatives à la même tâche de mise en évidence d'un centre de symétrie par la technique algébrique de changement de repère. En effet, elles présentent la fonction, dans cet exercice et dans les 7 autres exercices/problèmes, dans les deux registres algébrique et graphique (le graphique étant d'ailleurs le plus souvent une image de calculatrice graphique), ce qui ne laisse aucun doute sur l'utilisation des registres graphique et algébrique respectivement pour conjecturer et valider le résultat. Pour cette tâche, comme pour la majorité de celles nouvellement introduites en Première, le fait qu'elle apparaisse souvent dans des exercices où elle est rarement associée à d'autres, montre que l'objectif du chapitre est l'acquisition des techniques de résolution qui lui sont relatives, et à travers elles l'acquisition de la notion impliquée dans la tâche.

Les tâches de parité ou de périodicité de type 1 ou 2

Celles-ci (voir l'inventaire des tâches et techniques, chapitre 2), bien que correspondant à des objets d'enseignement introduits en classe de Seconde, sont très nombreuses et apparaissent dans 23 exercices différents. Elles sont rarement associées les unes aux autres, puisque seuls deux exercices présentent à la fois une tâche de Parité-2 et de Périodicité-2 et deux autres présentent une tâche de Parité-1 et Parité-2 (implicite). De façon générale, chacune d'entre elles apparaît dans un exercice qui lui est entièrement consacré.

Mais alors que les notions de parité/périodicité n'étaient que très rarement utilisées selon leur statut outil en Seconde, les tâches de Parité-2 et Périodicité-2 sont relativement fréquentes en classe de Première (13 exercices présentent des tâches de parité-2 ou périodicité-2 contre 12 exercices pour les tâches de Parité-1 ou Périodicité-1). Ces exercices visent à compléter un tracé de courbe, un tableau de variations ou une étude de variation, voire à compléter la définition algébrique d'une fonction donnée sur une partie seulement de son domaine. Autrement dit, il s'agit de travailler ces techniques afin de pouvoir les utiliser ultérieurement lors d'études de fonctions. Ces tâches ne sont pas jugées comme problématiques et l'environnement technologique du cours suffit aux yeux des auteurs à rendre leur application possible. Les registres algébrique et graphique en sont les registres principaux.

Les tâches de Parité-1 et Périodicité-1 sont par contre déjà familières en classe de Première. Inscrite dans un problème (c'est le cas de 3 problèmes), la tâche de Parité-1 (ou Périodicité-1) facilite par la suite l'étude des variations de la fonction, l'obtention du tableau de variation, le tracé de la courbe. Elle constitue donc un préalable à la tâche de Parité-2 (ou Périodicité-2) qui devient ainsi implicite dans un problème d'étude de fonction. Par contre, la présence de ces tâches dans des exercices (c'est le cas de 6 exercices/problèmes sur 12) qui leur sont uniquement consacrés est l'occasion de proposer des exercices plus complexes. Dans ce sens, elles font souvent intervenir le registre verbal-symbolique comme registre de représentation de la fonction: il s'agit d'étudier la conservation des propriétés de parité (ou de périodicité) par opération/composition pour des fonctions quelconques ou d'étudier la parité (ou la périodicité) pour des fonctions données sous forme symbolique ou indexées, comme dans l'exemple suivant :

"Soit une fonction f définie sur R telle que pour tout x, $f(x + 1) = (1+f(x)) / (1-f(x))$.
1- Calculer $f(x + 2)$, $f(x + 3)$ et $f(x + 4)$.
2- Que peut-on en déduire pour la fonction f ?" (exercice 36, p.118).

Si la technique de résolution reste la même, sa mise en œuvre risque d'être plus difficile pour l'élève. L'une des raisons de cette difficulté provient probablement de la manière même dont la fonction est définie. Ces exercices, cependant peu nombreux, peuvent constituer une occasion de travailler sur des fonctions exprimées de façon *différente* et donc favoriser une appréhension plus générale du concept de fonction.

La tâche de majorant/minorant

Cette tâche est nouvelle en classe de Première et semble remplacer la tâche d'extremum qui ne fait qu'une seule apparition dans cette banque d'exercices/problèmes. La tâche de majorant/minorant apparaît dans 6 exercices, une seule fois dans le registre graphique seul, 5 fois dans le registre algébrique dont trois fois dans les registres algébrique et graphique.

Le registre graphique sert alors à conjecturer les majorants/minorants dans le cas où ceux-ci ne sont pas donnés dans l'énoncé. Par ailleurs, cette notion est présentée de façon ostensive sans insistance particulière sur les ressemblances et différences avec la notion d'extremum. Cependant cette tâche/technique, tout comme la tâche d'extremum, selon la technique des inégalités en 2nde, vise à préparer l'analyse en classe supérieure.

La tâche de comparaison

Elle est maintenant posée de manière formelle, ce qui est nouveau en classe de Première. Nous avions en effet remarqué qu'elle apparaissait en classe de Seconde, sous une forme contextualisée, en tant que tâche de retour à la situation initiale dans des situations fonctionnelles (un exemple où la comparaison est un cas d'égalité est donné dans l'analyse des exercices et problèmes du premier chapitre du manuel de Seconde).

Cette tâche est présente dans exercices/problèmes de ce chapitre dont deux classés problèmes. Trois exercices/problèmes se résolvent respectivement uniquement selon la technique graphique et uniquement selon la technique algébrique. Dans les 6 autres exercices/problèmes la même tâche est explicitement à résoudre dans les deux registres, comme dans l'exercice suivant :

"Soit la fonction f définie sur R\ {1} par $f(x) = (x^2 /(x - 1)$ et la fonction g définie sur R par $g(x) = x + 1$. (les courbes de f et g sont également données sur le même graphique).

1° Comparer les fonctions f et g sur l'intervalle]- ∞; 1[, puis sur l'intervalle]1; +∞ [

2° En déduire, suivant les valeurs de x, la position relative de la courbe C représentative de f et de la droite d'équation $y = x + 1$." (exercice 64, p.122)

Nous voyons que la résolution est d'abord attendue d'après la technique de résolution algébrique qui tient lieu de démonstration, les intervalles de comparaison étant même précisés (ce qui est d'ailleurs le cas de la grande majorité des exercices portant sur cette notion). Une conversion doit être ensuite réalisée dans le registre graphique qui peut se contrôler sur le graphique fourni. Le registre graphique sert donc à la fois de registre de conjecture et de registre permettant de contrôler les résultats. L'idée, à travers cet exercice, est de mettre en parallèle à la fois la résolution du cadre algébrique et celle du cadre géométrique dans le but de favoriser une meilleure compréhension de la notion. Le registre géométrique permet, de même, d'appréhender la fonction selon leur statut objet. L'intérêt porté sur l'acquisition des techniques et à travers elles sur l'appropriation de ces notions nouvelles explique encore une fois que la majorité des exercices (7 sur 9) portant sur la comparaison de fonctions sont entièrement consacrés à cette notion. Soulignons donc la présentation de cet exercice, où deux tâches sont liées dans le sens où elles visent la mise en meuve des deux techniques algébrique et graphique pour la résolution de la même tâche de comparaison de fonctions.

La tâche d'égalité de fonctions

Sous une forme formelle, la recherche d'égalité de fonctions est, comme la tâche de comparaison, nouvelle en classe de Première. Elle est néanmoins très marginale puisqu'elle n'apparaît que dans deux exercices uniquement consacrés à cette notion. Les fonctions y sont données dans le seul registre algébrique et la seule technique de résolution demandée est la technique de réécriture algébrique.

Cette tâche rappelle les tâches du chapitre sur les polynômes, aussi n'y a t-il pas de notion ou de technique de résolution véritablement nouvelle à enseigner.

La tâche d'équations/inéquations

Elle apparaît dans 6 exercices/problèmes dont 1 classé problème. Elle n'est présente ni en exercice résolu, ni en T.P. Ceci n'est pas étonnant, puisqu'il ne s'agit pas d'une tâche nouvelle en classe de Première. Cette tâche, et notamment la technique graphique de résolution était clairement un des objectifs d'enseignement de la classe de Seconde. Elle est donc considérée comme familière en classe de Première, de plus, il semble qu'elle cède la place dans ce chapitre à la tâche de comparaison de fonction. En effet, dans les tâches de comparaison, la résolution d'équation ou d'inéquation devient une étape de la technique de résolution graphique de la tâche de comparaison. La technique graphique de résolution de la tâche d'équation/inéquation apparaît privilégiée puisqu'elle est demandée dans tous les exercices/problèmes, la technique algébrique n'étant également demandée que dans 2 d'entre eux.

Dans les deux cas où les deux résolutions algébrique et graphique sont explicitement demandées, le registre graphique sert à conjecturer des résultats qui seront à valider dans le registre algébrique. Ces exercices se présentent comme une révision de la technique graphique de résolution d'équation/inéquation puisqu'il vise à marquer la dimension fonctionnelle de la tâche en proposant également des tâches d'images/ antécédents. Par ailleurs, comme pour la majorité des exercices équivalents en classe de Seconde, les solutions sont des petits entiers à déterminer ce qui permet la viabilité de cette tâche relativement au registre graphique.

Pour le cas des trois autres exercices, remarquons que les fonctions sont uniquement données dans le registre graphique, il n'y a donc pas de résolution algébrique possible. Ces tâches se présentent également comme en révision des résolutions graphiques d'équation de Seconde même si la technique algébrique n'est pas demandée. Il faut aussi souligner cependant qu'une de ces équations correspond en fait à la détermination graphique d'une solution approchée dans la mesure où l'élève ne dispose pas non plus de méthode algébrique de résolution.

Dans le problème enfin, l'équation à résoudre est une équation de degré 4 avec valeur absolue pour laquelle l'élève ne dispose pas non plus de méthodes de résolution.. Ainsi, si une partie des équations/inéquations est envisagée avec les mêmes attentes qu'en Seconde, une autre vise à préparer de nouvelles connaissances en relation avec la résolution d'équations. Il nous semble que cette nouvelle forme que prennent les tâches de résolution graphique d'équations sont nécessaires pour leur maintien en vie : avec l'institutionnalisation, en classe de Première, des méthodes de résolutions algébriques d'équations du second degré et de polynômes, le registre graphique ne peut conserver son intérêt que dans la mesure où il peut permettre d'aborder des tâches de résolutions d'équations que l'élève ne sait pas encore résoudre par des techniques algébriques.

La tâche de domaine de définition

Cette tâche, nouvelle en classe de Première, apparaît dans 7 exercices dont un problème. La technique de résolution attendue est toujours algébrique. Elle se présente, dans certains exercices, associée à la tâche de parité (1 ou 2), et/ou à la tâche de représentation graphique de fonction (selon la technique de changement d'origine/repère).

Ce type d'exercices , où les fonctions sont en majorité des fractions rationnelles ou contiennent des radicaux constitue une ébauche des exercices du type étude de fonction qui s'affirmeront dans le courant de l'année et surtout durant l'année de terminale, ébauche car nous avons vu que la tâche de variation suivie de la tâche de représentation graphique n'y sont pas systématiquement présentes.

Les tâches d'expression de fonction, de discrimination relation/fonction, de reconnaissance de fonction

Ces tâches ne sont pas des objectifs d'enseignement dans ce chapitre. La rareté de la tâche d'expression de fonction s'explique certainement par la quasi-absence de situations fonctionnelles. Les deux autres doivent être considérées comme suffisamment transparentes pour ne pas nécessiter de véritable apprentissage. Un rapide rappel à l'aide d'un ou de deux exercices suffit pour les auteurs.

3.2.5 Conclusion du chapitre "Fonctions numériques"

Appropriation des notions par le travail de la technique

Ce chapitre sur les fonctions se caractérise par le fait que relativement peu de nouveaux objets d'enseignement sont à mettre en place. La grande majorité des notions vues dans ce chapitre ont soit été pour certaines (sens de variation, extremum, parité, périodicité, etc.) institutionnalisées sur une base intuitive et concrète dans un premier temps, puis graduellement envisagées de façon plus formelle; Pour d'autres, elles ont fait l'objet de rencontres informelles à travers des exercices/problèmes (comparaison de fonctions, addition de fonctions, transformation) dès les débuts de l'enseignement sur les fonctions en classe de 2nde. L'enjeu de leur enseignement est donc ici, pour la plupart d'entre elles, d'assurer leur maîtrise sur cette base plus formelle. Dans ce but, l'accent est porté sur l'acquisition des techniques de résolution des différentes tâches dans lesquelles ces notions se trouvent impliquées.

La volonté de faire travailler les élèves sur les techniques explique pourquoi les exercices associent rarement différentes tâches et pourquoi, les tâches associées apparaissent être des tâches liées : elles correspondent à des sous-tâches d'une technique non encore naturalisée pour une tâche donnée ou, à deux techniques mettant en jeu deux cadres (le plus souvent algébrique et géométrique) différents pour une même tâche. Ces différentes tâches/techniques seront probablement intégrées, par la suite, dans les problèmes emblématiques d'étude de fonction, quand les élèves disposeront de la dérivée et quand les tâches, et les techniques associées, les composant et étudiées ici, leur seront plus familières. L'organisation de ce chapitre correspond à une phase obligatoire, semble-t-il, dans l'enseignement, où les notions sont présentées de façon segmentée dans le but de favoriser leur appropriation par le travail de la technique.

Les techniques sont souvent imposées aux élèves

L'analyse des exercices/problèmes (voir en particulier les exemples d'exercices) de ce chapitre a montré que le choix des techniques n'est pas en général, à la charge de l'élève, mais imposé explicitement ou implicitement par l'énoncé. Cette constatation s'accorde parfaitement avec le fait que le travail des techniques est un des objectifs principaux du chapitre. La tâche d'étude des variations est particulièrement révélatrice du fait que les techniques sont souvent imposées. Celle-ci est à résoudre en Première d'après la technique d'opération/composition ou, quoique plus rarement, la technique de transformation mais jamais par la technique des inégalités installée en classe de Seconde. Bien sûr, l'importance accordée à cette technique se justifie par son intérêt propre relativement à la technique de la dérivée dans la mesure où elle permet d'éviter des calculs, et aussi parce qu'elle permet de rendre fonctionnel (dans le sens de fonctionnalité) les concepts d'opération et composition de fonctions et dans une moindre mesure le concept de transformation de fonctions. Les concepts d'opération et de composition trouvent là l'occasion d'être utilisés selon leur statut outil et de prendre ainsi du sens alors que la limitation aux seules réalisations d'opérations ou de compositions de fonctions dans le registre algébrique risque de masquer la dimension objet de la fonction par un trop grand accent porté sur le calcul algébrique. Cependant, le fait que l'élève ne puisse décider du choix de la technique à utiliser pour cette tâche, et en général pour la majorité des tâches apparaissant dans ce chapitre, soulève la question de la marge d'initiative dont il dispose et qui nous semble en définitive assez réduite. Cette marge pourrait se trouver d'autant plus réduite si l'enseignant choisit d'inclure systématiquement comme objet d'enseignement du cours, toute notion mentionnée par les programmes, comme le fait le manuel. A titre d'exemple, le manuel choisit d'institutionnaliser les transformations alors que celles-ci ne sont envisagées par les programmes que sous forme de travaux pratiques, or ne pas les inclure dans le cours, laisse la porte ouverte à l'initiative des élèves. La même remarque pourrait être faite pour l'utilisation des opérations algébriques dans la détermination du sens de variation d'une fonction.

Les opérations sur fonctions

Les opérations sur les fonctions, notamment les opérations algébriques et de compositions de fonctions font partie des principales nouveautés de ce chapitre et plus généralement du programme de Première sur les fonctions. Elles nous semblent viser un double objectif :

- leur intérêt réside tout d'abord dans leur rôle incontournable au niveau de l'algèbre des limites et des dérivées qui sera mise en place dans les chapitres suivants,
- Mais aussi dans leur contribution potentielle à la construction de connaissances sur les fonctions comme objet.

Elles sont traités dans les programmes et dans le manuel étudié presque exclusivement dans le registre algébrique. Il nous semble pourtant que le calcul algébrique sur les fonctions risque de ne pas faire suffisamment ressortir la dimension fonctionnelle des tâches d'opérations de fonctions : l'élève risque de ne pas faire de différence entre ces calculs mettant en jeu les fonctions en tant qu'objet, et celles sur les expressions algébriques dont il a pris l'habitude en troisième. D'où l'intérêt que peut effectivement présenter à ce niveau l'exploitation des opérations selon leur statut outil au niveau de la détermination des variations de la fonction. Mais les opérations sur les fonctions ne sont pas un instrument très efficace pour décider des variations d'une fonction dans la mesure où elles ne peuvent s'appliquer qu'à une catégorie restreinte de fonctions : celles ayant les *bons sens de variations* sur les *bons intervalles*. Elles risquent par conséquent, pour des raisons écologiques, d'avoir une viabilité limitée et ce d'autant plus que la technique d'étude des variations à l'aide de la dérivée est également un objet d'enseignement du programme de Première. Nous nous demandons donc si l'enseignement des opérations sur les fonctions tel qu'il est conçu dans les programmes de Première peut avoir une contribution efficace à la construction de connaissances sur les fonctions comme objet, et s'il ne serait pas nécessaire de varier les situations didactiques et les registres mettant en jeu les notions d'opérations sur les fonctions (comme par exemple les exploiter également dans le registre graphique).

La fonction et les différentes notions qui lui sont liées sont abordées dans plusieurs cadres et registres associés, ou selon leur double statut outil/objet

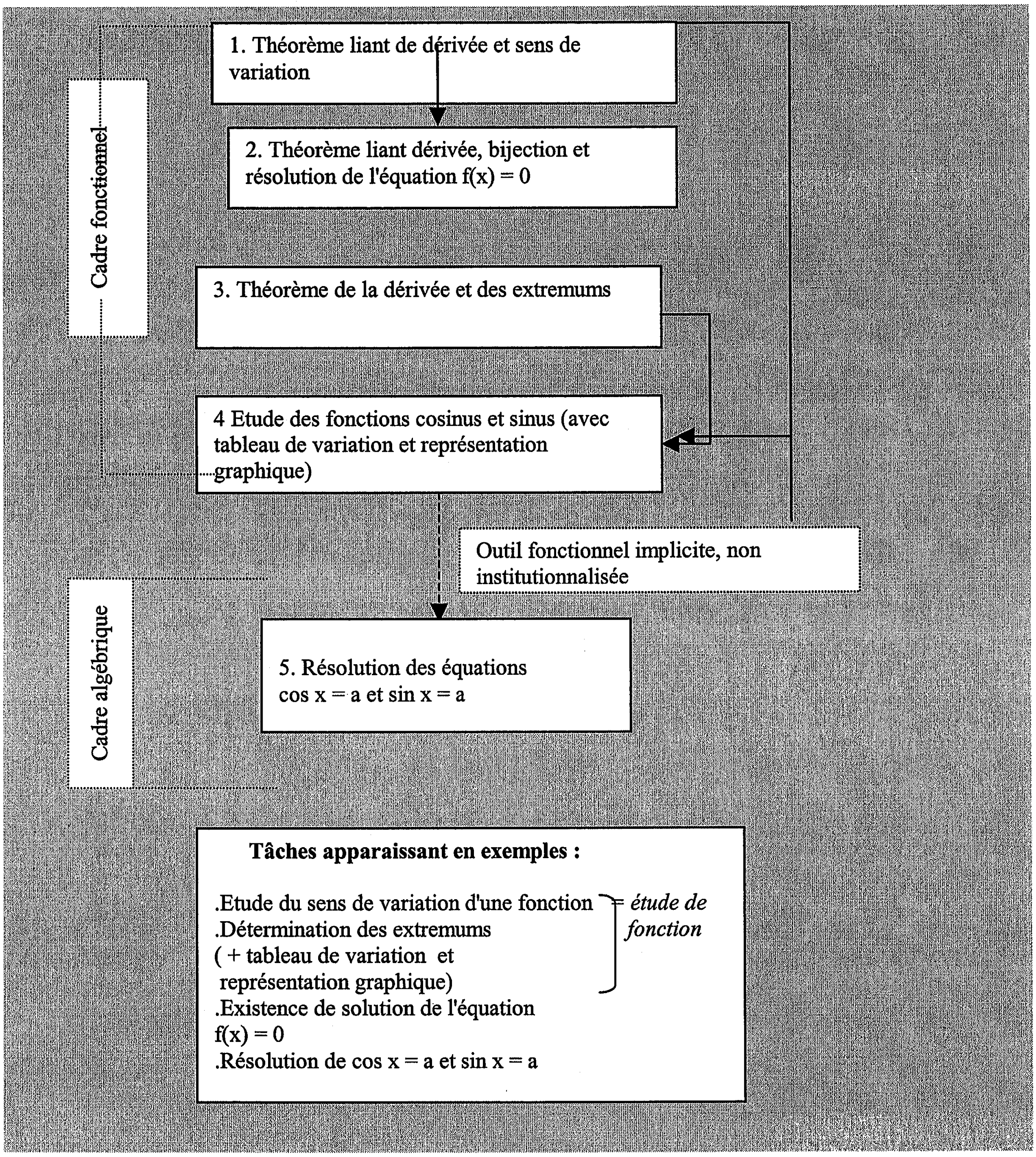
La fonction, et les différentes notions qui lui sont liées dans ce chapitre apparaissent pour certaines (opérations, composition, transformation) impliquées selon un double statut outil/objet, et pour d'autres, mises en jeu à l'aide des deux cadres algébrique et géométrique par l'intermédiaire du registre graphique, dans l'objectif d'en favoriser une meilleure appropriation.

Le graphique se présente alors comme registre de conjecture et de contrôle des résultats pour bien des tâches à valider ensuite dans le registre algébrique : tâches de majoration/minoration, de centre/axe de symétrie, de comparaison, etc. Les notions ou propriétés de fonction concernées ont, en effet, une expression algébrique et une expression graphique qui s'appuie sur des objets du cadre géométrique. Il s'agit donc d'exprimer dans le cadre géométrique des propriétés de la courbe représentative de la fonction ou d'un couple de fonctions, ces propriétés s'exprimant aussi dans le cadre algébrique dans le but est de les mettre en relation.

Par contre, nous constatons que le cadre numérique n'a pas véritablement sa place dans ce chapitre. Les tâches où le cadre numérique est explicitement demandé comme les tâches de calcul d'images sont rares. On ne peut certes pas affirmer qu'elles n'entreront pas dans les stratégies de résolution de certains élèves (pour obtenir, par exemple, un graphique de fonction par la technique de changement d'origine/repère ou de mémoire). Mais ce recours au cadre numérique est au mieux laissé à la charge de l'élève. Il n'est pas incontournable dans la stratégie de résolution et n'est, certainement pas, le cadre dans lequel la solution définitive est attendue.

3.3 Le chapitre 7 : "Applications de la dérivation"

3.3.1 Organigramme du cours



3.3.2 Description, commentaire et analyse du cours

Ce chapitre est consacré aux applications de la dérivation et va donc présenter un nouvel environnement technique/technologique pour l'étude des fonctions, lié à l'introduction dans le chapitre précédent du nouveau concept de la dérivée. Il se décompose en 5 sections, comme nous le montre l'organigramme ci-dessus : la première section relie les notions de dérivée et de sens de variation d'une fonction, la deuxième relie la notion de dérivée avec la propriété de bijection, la troisième porte sur les extremums d'une fonction, la quatrième est consacrée à l'étude des fonctions circulaires, la cinquième section, enfin, présente les techniques de résolution des équations trigonométriques de type "cos x = a" et "sin x = a".

L'objet d'enseignement : sens de variation d'une fonction par la technique de la dérivée

La section débute par l'énoncé du théorème reliant le signe de la dérivée d'une fonction numérique et son sens de variation, dans le registre verbal/symbolique. Notons que ce théorème, porte bien la mention théorème mais ne fait pas l'objet d'une démonstration. Il est vrai que la démonstration de ce théorème n'est vraiment accessible à ce niveau, et que, plus généralement, la démonstration de la majorité des théorèmes de cette section ne relève pas du niveau de la classe de Première. Il constitue la technologie qui justifie une nouvelle technique relative à la tâche d'étude des variations : celle que nous avons appelée technique de la dérivée pour la tâche d'étude des variations (voir les techniques relatives à la tâche d'étude des variation pour f exprimée algébriquement, chapitre II). Elle est présentée en application du théorème à l'aide de deux exemples d'étude de fonction respectivement de degré 3 et rationnelle :

La fonction est donnée dans le registre algébrique. La technique d'étude de la fonction comprend alors :

- la détermination du domaine de définition quand cela s'avère nécessaire (ici pour la fonction rationnelle) quoique le programme de Première souhaite limiter ce type de tâches.
- le calcul de la dérivée de la fonction et la détermination de son signe dans le cadre algébrique,
- la déduction du sens de variation de la fonction par application du théorème énoncé,
- enfin, la présentation des résultats de cette étude sous la forme d'un tableau de variations.

L'objet d'enseignement : dérivée et propriété de bijection

Deux théorèmes non démontrés et également énoncés dans le registre verbal/symbolique (Voir l'organigramme du chapitre 7) figurent dans cette section.:

- Le premier théorème relie les propriétés de stricte monotonie et de bijection d'une fonction sur un intervalle et précise que l'image de l'intervalle [a; b] par la fonction est l'intervalle [f(a); f(b)] (ou [f(b); f(a)], selon que f est strictement croissante ou décroissante).
- Le deuxième théorème concerne le nombre de solutions de l'équation "f(x) = 0" toujours sur l'intervalle où f est considérée.

Précisons que ces théorèmes sont présentés à l'aide d'un court énoncé reliant la propriété de monotonie à l'image d'une fonction sur un intervalle et à la résolution de l'équation $f(x) = \lambda$ sur cet intervalle. Le théorème relatif au nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$ est donc présenté comme une conséquence de ce résultat plus général.

Si aucune définition de la notion de la bijection n'apparaît dans ce chapitre, c'est probablement que les auteurs l'ont prévue à l'occasion de l'étude des transformations puisque les programmes préconisent à ce niveau "la notion de bijection est introduite à propos de l'étude des transformations (translations, symétries ...) et des équations de la forme $f(x) = \lambda$ ". Le professeur définira la bijection selon la progression de l'enseignement qu'il aura prévu. Il nous faut préciser que la bijection est à mettre en place, en Première, uniquement à travers des exemples et que tout exposé général est exclu. L'étude des fonctions réciproques à part le cas de la racine carré n'est d'ailleurs pas au programme.

La technique de résolution de la tâche du nombre de solutions de l'équation f(x) = 0 est présenté à travers l'exemple d'une fonction f de degré 3 donnée dans les deux registres algébrique et graphique :

- Le signe de sa dérivée f ' est déterminé sur un intervalle contenant l'antécédent de 0 où la fonction est monotone.
- On peut, grâce à la représentation graphique, remarquer que la fonction est strictement décroissante et déterminer l'image par f de l'intervalle considéré.
- Le nombre de solutions de l'équation paramétrique "f(x) = λ" est établi, puis le nombre de solutions de l'équation "f(x) = 0" est donné, en faisant remarquer que les extrémités de l'intervalle image sont bien de signes contraires.

Ainsi, la propriété de bijection d'une fonction sur un intervalle est présentée de façon ostensive. La notion de bijection intervient uniquement à titre d'outil dans la mise en évidence du nombre de solutions d'une équation. D'après cet exemple, le registre graphique est sollicité en tant que registre de conjecture pour aider à l'établissement de ces résultats.

L'objet d'enseignement : extremum d'une fonction

La notion d'extremum est déjà connue depuis la Seconde, cependant une nouvelle technologie, amenant une nouvelle technique pour en déterminer l'existence, est présentée dans cette section, de même que se distingue un type particulier d'extremum, l'extremum local. Aucune mention d'extremum absolu n'est faite dans cette section, mais il semble que le terme d'extremum y fasse allusion.

Cette technologie prend la forme d'un théorème énoncé dans le registre verbal/symbolique reliant l'existence d'un extremum local en a avec l'annulation de la dérivée et le changement de son signe en a. Le lien entre la présence d'un extremum et le changement du sens de variation de la fonction avant et après cet extremum est ensuite montré par ostension dans les deux registres du tableau de variations et du graphique. Rappelons que ce lien avait été souligné en Seconde lors de l'introduction de la notion d'extremum sur une base intuitive à l'aide du registre graphique.

Une technique nouvelle, que nous avons également appelée technique de la dérivée, pour la détermination d'un extremum (voir techniques relatives à la tâche d'Extremum pour f exprimée algébriquement, chapitre II), est ainsi institutionnalisée dans ce chapitre de Première. La résolution de la tâche d'extremum à l'aide de cette nouvelle technique est également illustrée à travers un exemple :
Une fonction étant exprimée uniquement dans le registre algébrique, sa dérivée est établie, l'étude du signe de la dérivée et celle du sens de variation de la fonction sont réalisées puis résumées dans un tableau de variation. Les extremums sont ensuite déduits en précisant leur nature.

En remarque, il est précisé l'importance de l'étude du signe de la dérivée et l'insuffisance de la condition sur l'annulation de la dérivée, par la mise en évidence d'un point d'inflexion sans qu'il ne soit fait mention de cette appellation.

Nous pouvons remarquer que le tableau de variations prend définitivement, dans ce chapitre, son statut de registre permettant de rassembler les informations obtenues de l'étude des variations de la fonction.

L'objet d'enseignement : etude des fonctions circulaires

Cette section propose, d'après son titre un plan d'étude de fonction. C'est la première fois depuis la classe de Seconde, qu'un plan d'étude de fonctions est présenté de façon aussi explicite.

Les fonctions étudiées dans cette section sont la fonction cosinus et la fonction sinus et le plan d'étude proposé est le suivant :

- précision du domaine de définition,
- étude de la parité et de la périodicité,
- déduction de l'intervalle d'étude de la fonction à partir de la parité et de la périodicité (il est simplement précisé quel intervalle d'étude les résultats ci-dessus permettent de choisir : "Il suffit donc d'étudier la fonction cosinus sur l'intervalle [0; π]"),
- recherche de la dérivée. Il faut préciser ici que la valeur des dérivées des fonctions sinus et cosinus à l'origine est un résultat à admettre et que la démonstration du cas général n'est pas exigible d'après les programmes. Le manuel fait admettre les résultats concernant l'obtention des dérivées des fonctions sinus et cosinus.
- L'étude de son signe et la déduction de son sens de variation sur l'intervalle d'étude sont établies à partir du cadre géométrique (déplacement du point M sur le cercle trigonométrique),
- construction du tableau de variations sur l'intervalle d'étude,
- représentation graphique de la fonction sur l'intervalle d'étude, puis représentation de la fonction sur R avec justification dans le cadre géométrique (par utilisation de la parité et de la périodicité).

Ce plan d'étude est très important en ce qu'il dépasse le cadre de l'étude des seules fonctions circulaires. Il institutionnalise la tâche emblématique d'étude de fonction, et impose la technique de la dérivée pour la déterminations des variations et de l'extremum d'une fonction.

L'objet d'enseignement : résolution de cos x = a et sinx = a

Le théorème institutionnalisant l'unicité de la solution de l'équation cos x = a (resp. sinx = a) dans l'intervalle [0 ; π] (resp. [-π /2 ; π /2]) avec a appartenant à [-1; 1] est donnée dans le cadre algébrique. Ce théorème constitue la technologie justifiant la technique de résolution des équations de ce type. Cette technique est ensuite illustrée dans le cadre de la géométrie analytique par le recours au cercle trigonométrique.

Il y donc inversion de l'ordre par rapport à la Seconde où le cercle trigonométrique intervenait en premier dans la mesure où il constituait une base intuitive pour la justification du nombre de solutions de ces équations sur une période. Maintenant, ce résultat peut - être justifié sur une base plus formelle à partir du théorème donnant l'unicité de la solution sur l'intervalle convenable par l'intermédiaire de la notion de bijection. Cette justification est proposée ici en exercice. Le professeur peut choisir de l'intégrer à son cours.

L'outil fonctionnel intervient donc précisément à un niveau technologique lors de l'institutionnalisation du résultat général concernant la résolution des équations de ce type. Il n'intervient pas dans la pratique des élèves, soit au niveau de la technique de résolution qui comme en classe de Seconde se situe à la fois dans le cadre algébrique, et dans le cadre géométrique par le biais d'une illustration à l'aide d'un cercle trigonométrique toujours demandée.

De façon générale, comme en Seconde, les interrelations entre les résolutions d'équations de type cos x = a et sinx = a et les fonctions cosinus et sinus correspondantes ne sont pas marquées au niveau de la technique de résolution mise en œuvre. L'utilisation implicite de la période pour obtenir les solutions de ces équations sur R (elles se limitaient aux solutions sur une seule période en Seconde) en tant que propriété spécifique des fonctions sinus et cosinus ne permettent que peu de souligner la dimension fonctionnelle de ces tâches.

3.3.3 Synthèse de l'analyse du cours

Les objets d'enseignement présentés dans ce chapitre ne sont en général pas nouveaux, qu'il s'agisse de la notion de variation ou d'extremum ou encore des fonctions trigonométriques : la nouveauté tient dans la mise en place de nouvelles techniques de résolution des tâches relatives à ces notions et donc de nouvelles technologies pour les justifier.

La nouvelle technique de détermination des variations d'une fonction, notamment, a une place centrale dans ce chapitre. Elle s'impose par rapport aux deux autres techniques enseignées précédemment (en Seconde et dans le chapitre "Fonctions numériques" du manuel de Première) et risque de les effacer complètement (ce qui devra être vérifié lors de l'analyse des exercices/problèmes).

Ce changement de technique se justifie par la puissance de la technique de la dérivée qui rend possible son application à toutes les fonctions numériques étudiées au niveau du lycée mais aussi parce qu'elle permet une économie technologique. En effet, le recours à la dérivée permet non seulement de résoudre la tâche de d'étude des variations mais aussi la tâche de détermination des extremums, et surtout parce que, grâce à la dérivée, il est possible de déterminer les intervalles de monotonie d'une fonction alors qu'en Seconde, on ne pouvait démonter la monotonie que sur un intervalle qui de plus devait être donné ou déterminé graphiquement.

L'étude de fonction ne prend d'ailleurs véritablement sa place en tant que tâche emblématique que grâce à l'enseignement de cette nouvelle technique : la détermination des variations d'une fonction va pouvoir maintenant précéder et justifier sa représentation graphique, alors que les techniques précédentes ne s'appliquaient qu'à certaines fonctions, sous réserve de leur décomposabilité en fonctions de référence ou en fonctions associées dont le sens de variation devait vérifier de plus certaines propriétés. L'enseignement de ces nouvelles technologies risque non seulement d'effacer celles du chapitre précédent mais aussi d'effacer avec elles d'autres tâches qu'elles justifiaient comme celles mettant en jeu la notion de fonctions associées, ou d'opérations de fonctions. Les nouvelles technologies apportent de nouvelles tâches comme celles en relation avec la propriété de bijection.

La fonction apparaît dans ce chapitre principalement en tant qu'objet dont l'étude est indissolublement liée à celle des différentes propriétés qui la caractérisent. Ces différentes propriétés étant elles-mêmes rattachées au concept de variation, elles encouragent donc une appréhension de la fonction comme loi de variation. Nous avons alors un concept qui s'unifie à un niveau technologique autour du concept de variation. Les techniques qui s'en déduisent imposent les tâches liées à la mise en évidence des propriétés de variation, d'existence d'un extremum, ainsi que de la propriété de bijection mais de façon implicite pour la résolution d'équation. On peut prévoir des exercices visant le travail des différentes techniques et donc ne demandant qu'une seule tâche principale de mise en évidence d'une certaine propriété, ou des problèmes réunissant ces différentes tâches dans le but d'une étude complète de fonction.

3.3.4 Analyse de la partie exercices/problèmes

Sur les 82 exercices/problèmes de ce chapitre, trois ont été écartés comme ne relevant pas de notre étude car seule la dérivée y est visée en tant qu'objet. Il faut également écarter 5 autres exercices qui sont des équations trigonométriques, car ils sont posés dans le cadre algébrique et la technique de résolution institutionnalisée dans le cours et attendue par contrat ne prend pas en compte la dimension fonctionnelle. Nous étudierons donc 74 exercices/problèmes dans ce chapitre.

3.3.4.1 Analyse par cadres et registres utilisés

Les cadres

Les changements de cadres y sont relativement limités : ils concernent les situations fonctionnelles, bien sûr, au nombre de 15 mais également trois autres exercices donnés dans le cadre algébrique dont la résolution nécessite un passage vers le cadre fonctionnel à la charge de l'élève. La fonction intervient en tant qu'outil au niveau de la résolution de ces exercices qui correspondent à des recherches de racines de polynômes (exercices 33, 34, 35). Le cadre géométrique, en dehors de son utilisation dans les situations fonctionnelles, jouit bien d'un certain statut dans les exercices/problèmes de ce chapitre que nous déterminerons à travers l'analyse par tâches et techniques.

Les registres

(voir tableau des registres du chapitre 7 du manuel de 1ère en annexe du chapitre III)

Le tableau des registres et changements de registre établit la primauté des registres algébrique, du tableau de variation, et du registre graphique. Cependant le registre graphique est très rarement un registre de départ explicite (dans les deux activités, 4 exercices et un problème). En tant que tel, il n'est jamais seul sauf dans les deux activités préparatoires du chapitre. En fait, il est principalement visé comme un registre d'arrivée, dans le sens où l'un des objectifs principaux des exercices/problèmes de ce chapitre est d'obtenir le tracé de la courbe, tracé qui est relativement peu réinvesti dans d'autres tâches. Ainsi le statut du registre graphique s'affirme dans ce dernier chapitre sur les fonctions en Première : ce n'est pas un registre de travail, il est essentiellement exploité pour émettre des conjectures. Ce dernier point se précisera dans l'analyse des tâches/techniques.

Le tableau de variations est très souvent présent mais il n'est impliqué dans une seule tâche : il fait le lien entre l'étude des variations de la fonction et sa représentation graphique et prend sa place dans la technique d'étude des variations de fonctions. Le registre verbal/symbolique n'apparaît que dans 6 exercices en tant que registre de départ et toujours impliqué dans le même type de tâche d'expression de fonction sur laquelle nous reviendrons, ce qui le marginalise.

Comme nous l'avions déjà remarqué dans le chapitre précédent, le tableau de valeurs et le registre de programmation n'ont pas leur place dans ce chapitre en tant que registre explicite, ils peuvent néanmoins entrer dans les techniques de résolution à l'initiative des élèves.

3.3.4.2 Analyse par tâches et techniques (74 exercices/problèmes)

(voir tableau des tâches et techniques du chapitre 7 du manuel de 1ère en annexe du chapitre III)

Les tâches qui apparaissent dans la banque d'exercices de ce chapitre, d'après le tableau des tâches et techniques sont les tâches de :

- "Représentation de fonction" (dans 36 exercices/problèmes différents, la tâche de représentation graphique de fonction étant présente dans 30 d'entre eux),
- "Variation" (dans 34 exercices/problèmes),
- "Etude de fonction" (dans 6 exercices/problèmes),
- "Extremum" (dans 20 exercices/problèmes),
- "Expression de fonction" (dans 20 exercices/problèmes),
- "Bijection" (dans 3 exercices/problèmes),
- "Image d'intervalle" (dans 4 exercices/problèmes),
- "Equation/inéquation" ("existence de solution à l'équation f(x) = 0" et "résolution d'équation" respectivement dans 10 et dans 3 exercices/problèmes),
- "Domaine de définition" (dans 15 exercices/problèmes),
- "Intervalle d'étude" (dans 5 exercices/problèmes),
- "Signe" (dans 2 exercices/problèmes),
- "Comparaison de fonction (et égalité)" (dans 5 exercices/problèmes),
- "Image/antécédent" (dans 2 exercices/problèmes),
- "Centre/axe de symétrie (dans 8 exercices/problèmes: 6 mise en évidence d'un centre/axe et 2 représentation

graphique d'une deuxième fonction),
- " Transfo-1/transfo-2" (dans 1 exercice/problème),
- "Périodicité-1/ périodicité-2" (dans 9 exercices/problèmes),
- " Parité-1/parité-2 " (dans 6 exercices/problèmes),
- "Asymptote/limite/tangente/ point d'intersection/position relative de courbes/équation de droites" (dans 19 exercices/problèmes).

La tâche de représentation de fonction

Elle est présente dans 36 des exercices/problèmes différents de ce chapitre, soit non loin de la moitié des exercices/problèmes par rapport au chapitre précédent où elle n'apparaissait que dans le quart des exercices/problèmes. De plus, la tâche de représentation de fonction est demandée 56 fois, soit plusieurs fois dans un même exercice/problème. Nous remarquons que pour 54 de ces tâches, le registre de départ est toujours le registre algébrique et les représentations de fonctions correspondent alors à la conversion de registre algébrique/tableau de variations, suivie souvent de la conversion tableau de variations/graphique ou directement à la conversion algébrique/graphique en tant que tâches explicitement demandées. Si la représentation graphique de la fonction n'est pas demandée, les conversions de registres s'arrêtent avec le tableau de variations qui doit être construit après une étude des variations de la fonction réalisée par la technique de la dérivée, et les tâches apparaissant dans l'exercice et succédant au tableau de variations, notamment la tâche d'extremum, lui sont alors relatives.

La représentation graphique de la fonction, quand elle est demandée, est précédée dans la majorité des cas, 28 fois sur 30, de la tâche d'étude des variations de la fonction selon la technique de la dérivée. Elle entre dans le cadre du type de tâche étude de fonction où doivent se succéder l'étude des variations de la fonction, la représentation du tableau de variations et la représentation graphique. La tâche de variation précède toujours la représentation graphique de fonction, mais le passage par le tableau de variations n'est pas systématiquement demandé. Nous pensons néanmoins que par contrat il sera réalisé par l'élève.

Nouveau statut du registre graphique

Le statut du registre graphique se définit nettement maintenant du fait de la position de la représentation graphique de fonction dans les exercices/problèmes. La représentation graphique de fonction tend à clore un exercice ou problème dont elle est le plus souvent l'objectif ; elle nécessite donc d'être justifiée algébriquement. Ceci explique que ce registre soit rarement choisi non seulement comme registre de résolution mais aussi comme registre de conjecture pour toutes les tâches précédant la représentation graphique de la fonction. La tâche de représentation graphique est néanmoins quelquefois suivie d'une tâche d'équation/inéquation ou d'existence de solution à résoudre graphiquement, ou d'une tâche de représentation graphique de fonction obtenue par des techniques géométriques à partir du graphe de la fonction étudiée. Plus rarement, dans deux problèmes, le graphe de la fonction est exploité dans le cadre géométrique pour la résolution d'une tâche qui ne possède aucune dimension fonctionnelle.

Ce changement de statut du registre graphique qui n'est plus exploité pour émettre des conjectures s'allie écologiquement avec l'apparition d'une série de tâches pour la plupart nouvelles en Première qui visent, plus ou moins, une représentation graphique plus précise de la fonction. Il s'agit des tâches de limite, d'asymptote, de tangente, de position relative de courbes, de points d'intersection (entre courbes). Justifiées dans le registre algébrique elles font, en général, l'objet d'une représentation graphique. Nous ne nous attarderons pas sur les techniques de résolution de ces tâches qui ne relèvent pas directement de notre étude, car exploitant notamment les notions de dérivée et de limite, mais il nous faut souligner leur présence aux côtés de la tâche de représentation graphique de fonction. Elles s'expliquent d'un point de vue écologique parce qu'elles permettent, pour certaines, de réinvestir l'environnement technologique relatif aux notions de limite et de dérivée. D'un autre côté, il nous semble qu'elles permettent, aux yeux des auteurs, de respecter les consignes du programme quant à l'exploitation de différents cadres mathématiques puisque la fonction devient un moyen d'étudier une courbe qui est alors un objet géométrique. Par ailleurs, cette association de tâches avant et après la tâche de représentation graphique définit les problèmes de type d'étude de fonction. En effet, cette tâche est demandée dans chacun des 16 exercices/problèmes, classés problèmes, de ce type.

Pour terminer ce paragraphe concernant les tâches de représentation de fonctions et les techniques qui leur sont associées, remarquons que les tâches autres que celle de tableau de variations et de représentation graphique sont très marginales dans ce chapitre, et que la technique attendue est toujours celle de la dérivée.

La tâche d'étude des variations

Elle apparaît dans 34 exercices/problèmes différents ce qui en fait après la tâche de représentation de fonction, la tâche la plus importante dans cette banque d'exercices/problèmes. Un seul de ces exercices qui est d'ailleurs une activité, demande la détermination des variations d'une fonction d'après la technique graphique. Tous les autres exercices demandent explicitement ou par contrat la détermination des variations d'une fonction selon la technique de la dérivée. Cette technique est bien détaillée dans un exercice résolu, elle apparaît dans trois des quatre T.P, et dans 12 des 27 problèmes. De plus, elle est en fait présente dans une grande majorité des autres exercices/problèmes, en tant que sous-tâche implicitement présente dans une autre tâche comme celle d'étude de fonction.

La tâche d'étude de fonction

Cette tâche apparaît dans ce chapitre pour la première fois sous ce nom. Elle est demandée dans 6 des 27 problèmes. Aucun de ces problèmes n'est une situation fonctionnelle. Ce qui est entendu par étude de fonction est précisé dans un seul des énoncés "limites, dérivée et sens de variation". En fait, et puisque la tâche de limite ne nous concerne pas, la tâche d'étude de fonction correspond surtout à la tâche d'étude des variations, à la représentation du tableau de variations et éventuellement aux tâches de parité et de périodicité. Le domaine de définition et la représentation graphique n'en sont pas des sous-tâches car le domaine de définition est donné 5 fois sur 6 dans l'énoncé et la représentation graphique, elle, fait l'objet d'une question distincte.

Nous pouvons souligner, dans ces problèmes, l'avancée du temps didactique par ce regroupement de plusieurs tâches en une seule dont elles deviennent des sous tâches : on assiste à la naturalisation d'une technique, celle qui suppose la succession de ces sous-tâches, qui supplante les autres.

La tâche de détermination des extremum

Elle apparaît dans 20 exercices/problèmes. Seuls deux d'entre eux demandent la détermination de l'extremum par la technique graphique. L'un est d'ailleurs une activité visant la mise en place de la technique de détermination de l'extremum d'une fonction par la dérivée, le deuxième exercice est un exercice de lecture graphique.

L'analyse des 18 autres exercices/problèmes montre que la technique attendue est toujours la technique de la dérivée. Cette technique est, selon les exercices/problèmes, explicite ou implicite. Elle est bien sûr explicite quand il est précisé, d'une façon ou d'une autre, de réaliser au préalable les tâches de variation et/ou de tableau de variations. Nous avons considéré cette technique comme implicite quand la tâche d'extremum fait l'objet d'une question non précédée d'autres relatives aux variations de la fonction, à son tableau de variations voire tout simplement à la dérivée. Ceci est notamment le cas dans les exercices/ problèmes où la tâche de détermination de l'extremum est unique ou associée à une seule autre tâche, comme dans l'exercice suivant :

"1° Montrer que si $p<0$, la fonction $f : x \quad x^3 + px + q$ admet un maximum M et un minimum m

(La deuxième question est une résolution d'équation)" (exercice 23, p.205).

Ou encore dans la situation fonctionnelle suivante :

"Un cône (.....)

1° Montrer que le volume du cône est : V = ...

2° Déterminer la hauteur du cône pour que son volume soit maximal".

(problème 64, p.215)

Cette situation fonctionnelle est assez typique d'ailleurs des problèmes où apparaît la tâche d'extremum selon la technique de la dérivée. Or, 11 des18 exercices/problèmes où la tâche d'extremum est à résoudre selon la technique de la dérivée, sont des situations fonctionnelles. Parmi ces situations fonctionnelles l'une est classée exercice résolu, deux sont classés T.P et 8 sont classés problèmes. L'existence de cet exercice résolu quasi-uniquement consacré à la tâche d'extremum est significative pour nous du choix de la technique de détermination des extremums que l'on veut institutionnaliser dans ce chapitre, et qui est donc enseignée par ostension.

Mais la tâche de détermination des extremums est également significative de la constitution des problèmes de type situation fonctionnelle par rapport aux problèmes de type étude de fonction. Il ressort en effet de notre analyse que ces deux types de problèmes présentent une certaine dichotomie : la tâche d'extremum détient la place primordiale dans les situations fonctionnelles alors que la tâche principale des problèmes de type étude de fonction est bien plutôt la représentation graphique de la fonction. Ainsi, la tâche d'extremum n'apparaît que dans 2 des 16 problèmes de type étude de fonction, alors qu'elle apparaît dans 11 des 15 situations fonctionnelles que contient ce chapitre, et la représentation graphique apparaît dans les 16 problèmes de type étude de fonctions et dans seulement 7 des 15 situations fonctionnelles. Ceci s'explique, bien sûr, parce que, dans ces situations fonctionnelles, l'étude de la fonction est un outil pour traiter un problème d'optimisation. Si le maximum ou le minimum sont déterminés par l'étude des variations, la représentation graphique n'est pas nécessaire ; inversement, dans une étude de fonction, il n'y a pas forcément d'extremum relatif.

D'un autre côté, la présence de la tâche d'extremum dans des problèmes (13 fois sur 20) plutôt qu'en exercices (7 fois sur 20) montre que les auteurs ne jugent pas nécessaire d'insister sur le travail d'une technique probablement considérée comme suffisamment travaillée par les exercices portant sur la tâche de variation. L'analyse de la tâche d'extremum dans ce dernier chapitre de Première portant sur les fonctions révèle d'une part que la technique de la dérivée est la seule admise pour la résolution de cette tâche, ce qui met en avant le registre algébrique; et donne forme d'autre part, à la situation fonctionnelle pour laquelle cette tâche apparaît comme une des tâches principales. En cela, elle est d'ailleurs souvent posée dans le cadre d'origine et sa résolution suppose donc une conversion vers le registre algébrique du cadre fonctionnel. Cette constatation nous semble confirmée d'ailleurs par le faible nombre de situations fonctionnelles que nous avions relevées au chapitre précédent où justement la technique de la dérivée n'avait pas encore été enseignée pour résoudre la tâche d'extremum.

La tâche d'expression de fonction

Elle apparaît dans 20 exercices/problèmes. Toutes les situations fonctionnelles (soit 15 des 20 exercices/problèmes) demandent la réalisation de cette tâche. Nous ne reviendrons pas sur la technique correspondante déjà détaillée dans notre chapitre II, mais nous soulignerons qu'elle est considérée comme acquise car rares sont les situations fonctionnelles pour lesquelles des tâches d'images ou de tableau de valeurs, donc relevant du cadre numérique et visant à aider à l'établissement de l'expression fonctionnelle, sont demandées. Ces dernières sont éventuellement laissées à l'initiative de l'élève.

Dans les 5 autres exercices/problèmes, qui ne sont pas justement des situations fonctionnelles, cette tâche correspond à la conversion du registre verbal/symbolique vers le registre algébrique. Rappelons qu'il s'agit alors de déterminer l'équation algébrique d'une fonction sachant qu'elle vérifie certaines propriétés. Justement, parmi les propriétés que la fonction doit vérifier dans ce chapitre figurent au premier plan, des conditions sur ses variations ou ses extremums. La présence de ces conditions s'accorde avec le fait que ces notions sont nouvelles et centrales dans ce chapitre mais elles font également de ces exercices/problèmes, des exercices relativement longs et difficiles à résoudre, avec nombre de tâches et de sous-tâches implicites, ce qui explique que ce type de tâches de détermination de l'expression fonctionnelle apparaisse soit en tant que tâche unique, soit couplée avec une autre tâche portant également sur l'extremum ou la variation, comme dans l'exercice suivant :

"1° Déterminer une fonction polynôme f du troisième degré qui admet 5/6 pour maximum en 1, un minimum en 2 et qui s'annule en 0.

2° Etudier les variations de la fonction f" (exercice 23, p.205).

Rappelons que les notions de variations et d'extremum interviennent dans ces tâches d'expression fonctionnelle au niveau de la technique de résolution.

Les tâches de bijection, d'image d'intervalle, et d'existence de solutions

La tâche d'existence de solution n'apparaît que dans 10 exercices/problèmes sur la totalité de 77. Nous avions déjà remarqué dans l'analyse du cours que ce nouvel enseignement n'est pas problématisé, une rapide familiarisation avec l'environnement technologique réalisée dans le registre graphique par une activité d'introduction (l'un des 9 exercices/problèmes), suffit pour les auteurs du manuel. La technique de résolution algébrique attendue dans les différents exercices a été montrée dans le cours à travers un exemple, un exercice résolu et un T.P en précise une deuxième fois les détails.

Par ailleurs, sur les 8 autres exercices/problèmes, la tâche d'existence de solution apparaît sous forme isolée 6 fois et deux fois en association avec une tâche de détermination des extremums ou d'étude des variations. Les différentes sous-tâches (détermination des variations de la fonction, détermination des intervalles de monotonie, etc.) permettant la résolution de la tâche d'existence de solutions sont donc laissées à l'initiative des élèves dans 6 exercices. L'existence d'une solution est affirmée par le texte, il est en général demandé de plus de rechercher un encadrement pour la ou les solutions.

Justement il nous semble que le travail des différentes étapes de la technique relative à cette tâche est indirectement proposée aux élèves sous la forme de 6 exercices, trois d'entre eux présentant pour tâche unique la tâche d'image d'intervalle, trois autres présentant la tâche de bijection également en tâche unique. Dans chaque cas l'un des trois exercices se situe dans le registre graphique et vise une méthode de résolution basée sur de la lecture graphique, les deux autres se situent dans le registre algébrique et visent l'approfondissement de la technique algébrique. Ici, le recours au registre graphique a pour but de familiariser les élèves avec une tâche/technique nouvelle. Le fait que ces tâches d'image d'intervalle et de bijection n'apparaissent que rarement en association avec d'autres tâches dans aucun exercice ou problème du chapitre, nous confirme dans l'idée que l'objectif de leur enseignement à travers les quelques exercices concernés est donc de travailler la technique de la tâche d'existence de solutions.

Ces tâches d'existence de solution sont fréquemment rendues plus problématiques :

- soit d'un point de vue purement technique quand l'expression algébrique de la fonction est plus complexe, comme dans l'exercice suivant :

  "Déterminer le nombre de solutions de l'équation f(x) = 0 et une valeur approchée à 10^{-1} près par défaut de chacune des solutions.

  a) f : x $x^4 - 2x^3 - 1$ (suivent d'autres fonctions)" (exercice 32, p.206);

- soit d'un point de vue dépassant l'aspect uniquement technique, quand l'exercice concerné s'inscrit dans le cadre algébrique et que sa résolution impose une conversion du registre verbal/symbolique du cadre algébrique vers le registre algébrique du cadre fonctionnel ou une seule conversion du cadre algébrique vers le cadre fonctionnel, le registre de départ étant le registre algébrique. Dans ces cas de conversions de cadres et registres, la fonction devient un outil de résolution auquel les élèves doivent se référer de façon explicite. Ces différentes conversions de cadres et registres sont illustrées respectivement par les deux exercices qui suivent :

"Montrer que tout polynôme du troisième degré admet au moins une racine.
Peut-on faire la même conclusion dans le cas du quatrième degré ?"
(exercice 33, p.206).
"Démontrer que l'équation:
$x^3 - 3\lambda x^2 - 3x + \lambda = 0$ a trois racines quel que soit le réel λ ".
(exercice 35, p.206).

Or ces deux derniers types d'exercices/problèmes représentent tout de même la moitié des exercices/problèmes proposant la tâche d'existence de solution.

D'un point de vue didactique, cette tâche d'existence de solutions ne semble présenter qu'un intérêt assez marginal du fait de leur faible nombre d'apparition relativement aux tâches de variations et d'extremum. Ceci pourrait s'expliquer par le fait qu'elle n'est impliquée que dans des types d'exercices trop compliqués pour être sélectionnés lors des différentes évaluations, aussi ne peut-elle constituer un objectif à atteindre par la majorité des élèves. Par contre, sur le plan théorique de notre étude, elles présentent un intérêt tout particulier. D'une part, elles illustrent l'effet de la transposition didactique, en mettant l'accent sur l'interprétation des auteurs quant aux directives du programme concernant les questions d'existence de solutions. En effet, le programme ne différencie pas les tâches d'extremum, de variation et d'existence de solution, or les auteurs privilégient nettement les deux premières par rapport à la troisième. Ainsi, si la tâche de variation entre dans les exercices/problèmes de type étude de fonction, et si la tâche d'extremum occupe un espace considérable dans les situations fonctionnelles, la tâche d'existence de solution, elle, se distingue par son absence quasi-totale de ces exercices/problèmes pourtant emblématiques. Or, cette tâche s'intégrerait très bien, tout au moins dans certaines études de fonctions, comme tâche supplémentaire faisant suite à une tâche de variation, et pourquoi pas à une tâche d'image d'intervalle ou de bijection ainsi que dans les situations fonctionnelles qui mènent à la résolution d'une équation. L'intégration de cette tâche aurait d'ailleurs l'avantage d'en simplifier la résolution en constituant des étapes intermédiaires de la technique de résolution à mettre en œuvre. De même le registre graphique, voire le tableau de variations à déterminer généralement dans un problème de type étude de fonction, pourrait très bien être exploité dans la recherche de solution de pour traiter ce type de tâche. Mais il faut trouver un équilibre entre ce que l'on demande explicitement et ce qu'on laisse à la charge des élèves.

Enfin, d'un point de vue écologique nous voyons ici, respectée, la loi relative à l'équilibre écologique qui veut qu'une même technologie puisse justifier plusieurs tâches/techniques. Cela explique, d'un point de vue écologique, le choix de la part des auteurs de réunir dans un même chapitre les tâches de variation, d'extremum, et d'existence de solution.

La tâche graphique d'équation/inéquation

Cette tâche est marginale dans ce chapitre où elle n'apparaît que trois fois. Nous avions déjà remarqué dans le chapitre précédent qu'avec l'institutionnalisation des techniques algébriques de résolution des équations du second degré et autres équations polynomiales, cette tâche ne pouvaient plus se maintenir d'un point de vue écologique : en effet, d'une part, les techniques de résolution algébriques plus efficaces lui sont d'une part préférées, et d'autre part, ces techniques algébriques nouvelles nécessitent que les élèves s'y entraînent.

Pour être maintenues, dans le registre graphique, ces tâches d'équation/inéquation doivent changer de forme : c'est ainsi que 2 de ces 3 tâches sont des tâches d'existence de solution du type "f(x) = ax +m" où m est un paramètre. La tâche devient ainsi plus problématique, la technique graphique de résolution s'impose puisque l'élève ne dispose pas de technique algébrique pour la résoudre. Remarquons qu'elle fait appel au cadre géométrique pour être résolue puisqu'il faut considérer l'ensemble des droites parallèles à la droite d'équation y = ax.

Les tâches d'asymptote/limite/tangente/ point d'intersection/position relative de courbes/équation de droites

Ces tâches ont été présentées avec la tâche de représentation graphique de fonction, nous ne reviendrons pas sur ce point dans le sens où elles lui sont indissolublement reliées à travers notamment les problèmes de type étude de fonction.

La tâche de domaine de définition

Cette tâche apparaît 15 fois dans les exercices/problèmes de ce chapitre. Ce nombre peut faire penser à une tâche relativement importante dans ce chapitre, mais cette constatation est à nuancer. D'abord elle apparaît dans deux séries respectivement de 5 exercices et 6 exercices, tous de type étude de fonction où sont associées les tâches de domaine de définition, de variation, de tableau de variations, ainsi que de représentation graphique où les fonctions sont polynomiales, rationnelles ou irrationnelles.

Il s'agit donc de familiariser les élèves avec les techniques algébriques des sous-tâches principales de l'étude de fonction. Cependant comme la détermination du domaine de définition n'est pas un des objectifs du programme, elle n'est demandée qu'une seule fois dans les problèmes de type étude de fonction. Dans tous les autres, le domaine de définition est précisé dans l'énoncé.

Les quatre autres fois où cette tâche est explicitement demandée sont des situations fonctionnelles. La détermination du domaine de définition fait alors partie du travail de modélisation. L'une d'entre elles est d'ailleurs un exercice résolu d'optimisation où la tâche de domaine de définition est présentée comme une des étapes relatives à la méthode de résolution proposée pour une tâche d'extremum, unique tâche demandée :

"Déterminer parmi les cylindres de révolution inscrits dans une sphère de rayon R donné (...) celui dont le volume est maximal et le calculer.
Méthode : On choisit judicieusement une inconnue x et on détermine l'intervalle I dans lequel x varie.

(...)" (utilisation 3, p.196).

Justement, à ces 15 fois où la tâche de domaine de définition est explicitement demandée, il faut ajouter 2 situations fonctionnelles, qui sont des problèmes d'optimisation, pour lesquelles le domaine de définition est implicitement compris dans la tâche d'extremum demandée. Nous soulignerons que dans les 8 autres situations fonctionnelles (sur un total de 15), le domaine de définition fait partie des données du problème. Ainsi, malgré la précision de l'exercice résolu quant à la nécessité de déterminer le domaine de définition, de même que malgré la possibilité de contextualiser cette notion afin de lui donner plus de sens et d'en faciliter la résolution, la tâche de domaine de définition n'est pas systématiquement proposée aux élèves. En fin de Première, et en accord avec les programmes, nous sommes toujours en phase de familiarisation avec ce concept.

La tâche d'intervalle d'étude

Il s'agit d'une nouveauté dans ce chapitre qui remplace en quelque sorte la tâche de domaine de définition. Elle est mentionnée dans le cours lors de l'institutionnalisation de l'étude des fonctions sinus et cosinus. Elle apparaît également dans la plupart des exercices/problèmes se rapportant à l'étude d'une fonction trigonométrique. Ceux-ci sont peu nombreux : un T.P et 5 problèmes de type étude de fonction. Notons qu'aucune situation fonctionnelle n'est modélisée par une fonction trigonométrique.

Nous considérons la tâche intervalle d'étude comme une variante des tâches de parité-2 et/ou de périodicité-2 (parité/périodicité implicite) : la technique est, en effet, la traduction géométrique des propriétés de parité et de périodicité préalablement établies dans le registre algébrique. Nous avons là un passage du cadre fonctionnel vers le cadre géométrique puis un retour vers le cadre fonctionnel. Cette tâche est demandée dans le T.P et dans 4 des 5 problèmes. Dans trois de ces problèmes ainsi que dans le T.P, les différentes sous-tâches aidant à l'établissement de l'intervalle d'étude sont précisées. Dans le quatrième, elle est implicitement comprise en tant que sous-tâche dans la tâche étude de fonction. Curieusement cette tâche n'est jamais demandée dans les problèmes où la fonction à étudier n'est pas une fonction circulaire, même si la fonction présente une parité. Cela peut signifier soit que les élèves la réaliseront par contrat soit que de toute façon la détermination de l'intervalle d'étude n'est véritablement intéressante que pour les fonctions circulaires.

Les tâches résolues pas la technique de changement d'axes/ recherche de centre de symétrie

La tâche de changement d'axes est présente uniquement dans les problèmes de type étude de fonction et apparaît dans 8 de ces 15 problèmes. Six fois sur 8, cette tâche correspond à la mise en évidence d'un centre/axe de symétrie. La tâche est alors demandée avant la représentation graphique de la fonction. La technique attendue ne peut donc être qu'algébrique et le graphique ne peut, en particulier, pas lui servir de registre de conjecture aussi le centre/axe est-il précisé dans l'énoncé. Cette tâche, dans cette banque d'exercices/problèmes fait partie de celles qui permettent plus ou moins explicitement une représentation graphique plus précise de la fonction.

Deux fois sur 8, elle est demandée après la tâche de représentation graphique de la fonction étudiée, et correspond à *une tâche de représentation graphique d'une deuxième fonction* mise en place en classe de Seconde.

Elle fait partie dans ce cas là des rares tâches susceptibles d'être posées après une représentation graphique. Remarquons qu'elle remplace dans ce dernier cas la tâche équivalente de fonction obtenue par transformation. D'ailleurs, la transformation n'est présente qu'une seule fois dans cette banque d'exercices/problèmes où elle n'est, de plus, pas utilisée dans le cadre des tâches transfo-1, transfo-2 travaillées dans le chapitre précédent. Ici, elle est utilisée pour obtenir le graphe complet d'une fonction trigonométrique dont la représentation a été établie sur une période. Elle pose en général la question du bien fondé de nombre de tâches ou techniques vues dans le chapitre précédent et qui sont relativement peu, voire pas du tout réinvesties dans ce chapitre (comme la tâche de majorant/minorant).

La tâche de signe de fonction

Elle n'est présente de façon explicite que deux fois, toujours dans des problèmes de type étude de fonction. Dans les deux exercices/problèmes, la technique est imposée par factorisation algébrique dans un cas, à partir du tableau de variations dans l'autre. C'est d'ailleurs l'unique tâche de cette banque d'exercices à réaliser à partir du registre de tableau de variation. Par ailleurs, nous voyons avec cette dernière tâche/technique que la notion de variation est rarement utilisée dans la détermination du signe d'une fonction.

Mais elle est également présente implicitement lors de l'étude du signe de la fonction dérivée pour étudier les variations de la fonction. Elle trouvera encore plus de place en terminale quand on étudiera des fonctions plus complexes pour lesquelles il faudra dériver plusieurs fois pour en étudier les variations. Il faudra alors étudier les variations de la fonction dérivée pour en déterminer le signe.

La tâche de comparaison de fonctions

Tout comme la tâche de signe, elle est également de faible importance dans la banque d'exercices/problèmes de ce chapitre où elle n'apparaît que 4 fois dans 2 problèmes de type étude de fonctions et dans deux situations fonctionnelles dont un T.P. Dans un des deux problèmes la technique algébrique est attendue puisque la représentation graphique des fonctions à comparer succède à la tâche de comparaison, le graphique n'y est donc pas, non plus, un registre de conjecture. Dans le deuxième problème la technique imposée est l'étude des variations de la fonction différence, technique nouvelle, jamais institutionnalisée en cours, pour laquelle toutes les aides nécessaires sont fournies par l'énoncé, là non plus le graphique ne constitue pas un registre de conjecture. Enfin, pour les situations fonctionnelles, d'un côté la tâche de comparaison est posée sous la forme d'un retour à la situation initiale, d'un autre côté, cette tâche est toujours couplée à une autre qui est soit une tâche de variation soit une tâche d'extremum comme dans l'exemple suivant :

"Montrer que le coût moyen est décroissant si, et seulement si, le coût marginal est inférieur au coût moyen (coût moyen et coût marginal sont des fonctions de la même variable) (T.P 2, p.98)"
ou encore,
"En déduire que le bénéfice est maximal quand la recette marginale est égale au coût marginal (les fonctions bénéfice,

recette marginale et coût marginal sont des fonctions de la même variable) (problème 65, p.213)".

La forme nouvelle que prend la tâche de comparaison dans cette banque d'exercices/problèmes, par rapport à son institutionnalisation dans le chapitre Fonctions numériques, que ce soit au niveau de la technique demandée ou du fait de sa liaison avec une autre tâche dans les situations fonctionnelles, nous fait penser qu'elle est considérée comme non problématique aussi est-elle proposée en problème, directement sous forme d'outil pour traiter une autre question, dans le but d'être approfondie.

Mais, il faut souligner que la tâche de comparaison apparaît aussi dans une formulation uniquement géométrique, soit en termes de position relative de courbes, dans les problèmes de type étude de fonction. Nous l'avons déjà étudiée, avec les différentes tâches liées à la tâche de représentation graphique de fonction.

Les tâches de " Parité-1/parité-2 " et de "Périodicité-1/ périodicité-2"

Ces tâches apparaissent dans des exercices/problèmes de type étude de fonction. Elles sont en général explicitement demandées sauf une seule fois où la tâche périodicité est implicitement comprise dans une tâche étude de fonction. La parité-2 et la périodicité-2 suivent respectivement la parité-1 et la périodicité-1 dans les problèmes où ces dernières apparaissent. Elles sont indiquées par des questions explicites concernant l'intervalle d'étude ou par les conséquences à tirer quant à la représentation graphique de la fonction.

Les techniques attendues sont toujours algébriques, étant donnés le statut et la place chronologique des registres graphique et du tableau de variations dans les problèmes concernés. Les conséquences géométriques à tirer de ces propriétés ne sont pas laissées à la charge des élèves. Il s'agit probablement de les guider et de les obliger à prendre en compte la dimension géométrique dans la représentation graphique des fonctions périodiques.

La tâche d'image/antécédent

Elle est rare et peu significative dans cette banque d'exercices/problèmes. Les questions d'images/antécédents peuvent être considérées comme des tâches laissées à l'initiative de l'élève dans le but de mieux représenter graphiquement une fonction ou dans la démarche de familiarisation avec la situation fonctionnelle. Or cette tâche se rapporte au cadre numérique ou au registre de programmation. Ceci met définitivement l'accent sur le fait que ces cadres et registres sont désormais entièrement laissés à la charge de l'élève.

3.3.5 Conclusion du chapitre "Applications de la dérivation"

Place centrale et rôle unificateur du concept de variation

L'unification des objets d'enseignement autour du concept de variation, constatée lors de l'analyse du cours de ce dernier chapitre "Application de la dérivation" grâce à l'introduction de techniques de résolution utilisant la dérivée, se confirme dans l'analyse de cette banque d'exercices/problèmes. Ceci se manifeste, bien sûr, à travers la tâche d'étude des variations où le concept de variation est visé en tant qu'objet, mais également la tâche de détermination des extremums et la tâche d'existence de solutions pour lesquelles la notion de variation intervient en sous-tâche composant la technique exigée. Même la notion de bijection, nouvelle dans ce chapitre, n'est introduite qu'en tant que concept lié au concept de variation puisqu'il n'en est fait usage que selon son statut outil dans le cadre limité à la résolution de cette unique tâche d'existence de solution. En ce sens, il nous semble que la fonction est à appréhender dans ce chapitre en tant que loi de variation plutôt qu'en tant que processus. Toutes les tâches ayant trait à une appréhension de la fonction en tant que processus, notamment celles relevant du cadre numérique, ont effectivement disparu de cette banque d'exercices/problèmes, mais nous avions déjà constaté cette disparition dans le chapitre précédent.

Naissance de la tâche d'étude de fonction et naturalisation de la technique correspondante

La nouvelle tâche/technique d'étude des variations permet également, et ce donc uniquement en fin du cycle d'étude sur les fonctions en Première, de définir clairement la tâche emblématique d'étude de fonction ainsi que de voir réapparaître l'activité de résolutions de problèmes, sous la forme de problèmes d'étude de fonction ou de situations fonctionnelles, principaux objectifs du chapitre. L'activité de résolution de problème est conçue principalement dans l'esprit de promouvoir l'approfondissement des connaissances mises en place dans ce chapitre. Ainsi, l'activité de résolution de problèmes n'intervient pas au niveau de l'introduction des nouveaux objets d'enseignement. De façon générale, les nouvelles connaissances, essentiellement des nouvelles techniques à mettre en place, ne sont plus problématisées, elles sont présentées dans le cours sur une base ostensive et leur acquisition est laissée à la charge des élèves.

Les problèmes d'étude de fonction visent pour objectif principal la représentation graphique de la fonction puisque cette tâche est toujours demandée et qu'elle a de plus tendance à clore un problème. La représentation graphique se justifie donc algébriquement par l'étude des variations de la fonction d'après la technique de la dérivée, et toutes les tâches autres que la tâche de variation et susceptibles d'apparaître dans ce type de problèmes semblent devoir leur présence justement à leur potentialité d'amener à l'obtention du graphique le plus précis possible. Il en est ainsi des tâches apportées pour certaines par les nouvelles technologies relatives à la dérivée, celles d'asymptote/limite/tangente/point d'intersection de courbes/positions relatives de courbes/équations de droites, mais aussi les tâches de parité, périodicité, de centre/axe de symétrie et même de transformation (préalables à la représentation graphique) dont les techniques ont été mises en place dans le chapitre précédent. La présence de ces différentes tâches avant la représentation graphique explique que le registre graphique ne peut servir de registre de conjecture. Les tâches demandées après la représentation graphique sont par contre relativement rares et peu variées. De plus, et probablement parce que le graphique est considéré alors comme suffisamment précis, elles ne sont, en, général, pas à justifier algébriquement. Il s'agit le plus souvent, dans ce manuel, de tâches d'équation/inéquation, plus rarement de tâches de représentation graphique de fonction à partir de la fonction étudiée f. La deuxième fonction est alors à obtenir par la technique de la valeur absolue, par la technique de changement d'origine/d'échelle, etc. Ces dernières tâches nous semblent, entre autres, constituer une panoplie de questions dans lesquelles les auteurs viennent puiser dans l'objectif didactique de varier les exercices/problèmes de type étude de fonction.

Relations entre le cadre géométrique et le cadre fonctionnel

Par ailleurs, cette position chronologique de la tâche de représentation graphique et de la majorité des autres tâches que nous venons de citer définit également la place du cadre géométrique dans les problèmes d'étude de fonction. En effet, nous voyons que le cadre géométrique (autre, bien sûr, que le cadre géométrique envisagé comme cadre d'origine dans les situations fonctionnelles) est intrinsèquement lié à la représentation graphique de la fonction étudiée. Nous lui distinguons deux statuts:

- *avant la représentation graphique*, les tâches relatives au cadre géométrique sont celles qui apporteront une précision supplémentaire au tracé de la courbe : ainsi, la mise en évidence d'une tangente en un point donné permettra de mieux respecter la concavité de la courbe en ce point, la mise en évidence d'un axe de symétrie permettra de mieux tracer la courbe de part et d'autre de cet axe, etc. L'influence de chacune de ces tâches reste limitée à cette précision supplémentaire concernant la courbe. Il nous semble que là, le cadre géométrique intervient par l'intermédiaire de la courbe de la fonction qui devient un objet géométrique que l'on étudie. Ces tâches permettent de lier les deux domaines mathématiques de géométrie et du fonctionnel entre eux.
- *Après la représentation graphique*, les tâches géométriques proposées qui permettent souvent d'obtenir de nouvelles fonctions, promeuvent, elles, une manipulation globale de la fonction par l'intermédiaire de son graphe, lui donnant plus clairement un caractère d'objet. Ici, le cadre géométrique est utilisé au niveau de la mise en œuvre de la technique de résolution de ces différentes tâches.

Les problèmes d'optimisation

Les problèmes de type situation fonctionnelle se distinguent des problèmes de type étude de fonction dans la mesure où la tâche de représentation graphique n'en est pas un objectif même si elle peut être demandée. La tâche d'extremum la remplace le plus souvent, les situations fonctionnelles sont alors pour la plupart des problèmes d'optimisation. Il arrive cependant que la représentation graphique soit demandée suite à une série de tâches dont l'ensemble constitue véritablement un problème de type étude de fonction (voir notamment les problèmes 65 et 67 constituées de 2 parties distinctes : étude de fonction et situation fonctionnelle, mais aussi le problème 66 dont la tâche d'expression fonctionnelle est un prétexte à une étude de fonction, dans le tableau des tâches et techniques, chapitre 7, manuel de Première). Dans ce cas, la représentation graphique garde le statut et le rôle qu'elle possède dans les problèmes d'étude de fonction.

Autrement, la tâche d'extremum peut être demandée avec ou sans la tâche de variation au préalable. Que cette dernière soit demandée explicitement constitue, rappelons-le, comme une aide implicite à la détermination des extremums. Par ailleurs, les tâches d'extremum ou de variation peuvent apparaître couplées à une deuxième tâche comme la tâche de comparaison (voir ci-dessus, pour des exemples, le détail de la tâche de comparaison) et sont le plus souvent posées sous forme de retour à la situation initiale. Les situations fonctionnelles sont donc un moyen de contextualiser ces différentes notions et de les mettre en relation. Même quand la technique algébrique est attendue pour la résolution, il nous semble que le registre graphique peut avoir, là, un rôle implicite de registre de conjecture puisque la ou les représentations graphiques (dans le cas de plusieurs fonctions à comparer) sont réalisées au préalable. L'utilisation du registre graphique comme registre de conjecture semble se réduire à ces situations fonctionnelles et se confiner à ce type spécifique de tâches. Ainsi, le recours au registre graphique en tant que registre de conjecture n'est envisagé, par les auteurs, que dans la mesure où la résolution des tâches concernées (extremum, variations et extremum/comparaison, etc.) pose une difficulté supplémentaire du fait que celles-ci sont posées dans le cadre d'origine d'une situation fonctionnelle. Il reste cependant principalement à la charge de l'élève puisque les résolutions graphiques ne sont pas systématiquement demandées. La présence de la représentation graphique peut mettre l'élève sur la voie des différentes conversions de cadres et de registres à réaliser pour établir la solution dans le registre algébrique du cadre fonctionnel généralement attendue.

Statut outil, statut objet de la fonction.

La fonction est essentiellement conçue dans les limites des trois principaux types de problèmes étude de fonction, situation fonctionnelle, et, résolution d'équation/inéquation ou existence de solutions. La fonction trouve donc l'occasion d'être appréhendée à la fois selon son statut objet et selon son statut outil, ce qui lui donne progressivement un statut d'objet. La dialectique outil-objet trouve donc ici tous les éléments pour être mise en place. Elle se joue sur le long terme et, bien sûr, l'utilisation que fait l'enseignant des problèmes proposés par le manuel joue un rôle important pour que cette dialectique puisse effectivement avoir lieu.

Dialectique équation / fonction

L'utilisation de la fonction dans la tâche de résolution graphique d'équations/inéquations a été mise en place, nous l'avons vu, en Seconde, et se fait relativement rare en Première. Ceci s'explique en grande partie par des raisons écologiques ; l'institutionnalisation des techniques algébriques de résolution d'équations du second degré et autres équations polynomiales fait que d'une part, ces techniques algébriques de portée plus grande sont préférées à la technique graphique et d'autre part, en tant que techniques plus complexes, elles nécessitent un investissement important en exercices d'entraînement.

Quant à la tâche d'existence de solution, la technique graphique ne se justifie pas vraiment si elle est posée en tant que tâche isolée. En effet, la représentation graphique de la fonction correspondante nécessite une étude de ses variations, or l'étude des variations suffit à résoudre la tâche. Il apparaît donc que la persistance de la tâche d'équations/inéquations à résoudre par une technique graphique en Première, implique que celle-ci change de forme et qu'elle soit notamment posée de façon à ce que la technique algébrique ne soit pas disponible ou soit au moins difficile à mettre en œuvre.

La tâche d'équation/inéquation sous la forme de tâche d'existence de solution à résoudre algébriquement conserve cependant son rôle de tâche permettant l'utilisation de la fonction en tant qu'outil. Cependant, du fait qu'elle n'est que très peu intégrée dans les problèmes d'étude de fonctions ou dans les situations fonctionnelles, elle permet de pointer une fois de plus l'organisation de l'enseignement du concept de fonction dans ce chapitre, voire dans ce manuel et même dans les deux manuels de Seconde et de Première, pour lesquels l'objectif d'acquisition d'une technique de résolution pour une tâche donnée s'accorde avec un ensemble d'exercices centrés principalement sur l'acquisition de ces techniques. Cet accent placé sur les techniques peut contrarier, en quelque sorte, l'activité de résolution de problèmes ayant pour objectif l'approfondissement des connaissances.

4. Synthèse de l'évolution du concept de fonction au cours du cycle Seconde-Première

Un enseignement axé sur le sens à donner aux notions : de l'intuitif et du concret au formel

L'enseignement en classe de Seconde se caractérise, surtout à ses débuts, par une présentation concrète (grâce aux situations fonctionnelles) et intuitive (grâce essentiellement au registre graphique) des notions. Le passage de cette présentation des notions à une présentation plus formelle est envisagée de façon très progressive : graduellement les notions vont-être décontextualisées alors que l'appui sur l'aspect intuitif , grâce principalement au registre graphique, est encore maintenu en Seconde. La formalisation se traduit par la suite par une libération relative par rapport au registre graphique en même temps que sont mis en place de nouveaux dispositifs techniques et technologiques pour la résolution de tâches impliquant des notions devenues familières.

En Première, les notions revues ou nouvelles sont présentées directement de façon formelle. Elle ne sont pas non plus problématiques, en partie parce qu'elles sont justement pour la plupart déjà familières : on rencontre peu d'activités de résolution de problèmes en préparation du cours. Les problèmes sont d'ailleurs peu présents dans le chapitre "Fonctions numériques" et ne réapparaissent en grande proportion que dans le chapitre "Application de la dérivation". Là, ils sont conçus dans un esprit d'approfondissement plutôt que de mise en place des connaissances. L'enseignement devient alors un enseignement classique où les principales technologies et techniques sont présentées dans le cours et leur maîtrise est à acquérir par leur application en exercice.

La formalisation de l'enseignement ne signifie pas toujours un niveau conceptuel supérieur du moins dans la mise en œuvre des techniques de résolution : Ainsi, la technique des inégalités pour la détermination des variations d'une fonction est probablement plus difficile à mener que la technique des opérations algébriques, et même que la technique de dérivation, enseignées en Première. De même, il n'y a pas non plus d'exigence plus grande au niveau des démonstrations ; celles-ci restent rares aussi bien en cours qu'en exercices/problèmes conformément aux directives des programmes. La formalisation apparaît plutôt s'accorder cependant avec une introduction des nouvelles connaissances sur une base directement formelle et une exigence au niveau technique encore plus stricte, qui laisse de moins en moins de marge de manœuvre à l'élève et se traduit au niveau des registres exploités, par une quasi-limitation au registre algébrique.

Cet accent mis sur le sens à donner aux notions explique également l'introduction, dès les débuts de l'enseignement de la fonction, d'un maximum d'objets d'enseignement : ainsi les notions d'image et d'antécédent bien sûr, mais aussi de variation, d'extremum, les différentes classes de fonctions, à l'exception des fonctions logarithmes et exponentielles, au programme de tout le cycle de lycée, voire même des notions telles que les opérations algébriques de fonctions, ou de comparaison qui peuvent être rencontrées de façon informelle dans des exercices ou problèmes alors même qu'elles ne sont pas au programme de la Seconde, apparaissent toutes tôt dans l'enseignement. L'idée dans une introduction précoce d'un nombre d'objets d'enseignement important relativement à l'ensemble de ceux qui doivent être institutionnalisés en Seconde-Première, est bien sûr d'en donner la possibilité d'une appropriation progressive sur une période de temps plus longue.

Enfin, l'implication de la fonction selon son statut outil dans l'étude de situation fonctionnelle et aussi dans la résolution graphique d'équation/inéquations contribue aussi à lui donner plus de sens.

Mode d'appréhension de la fonction

La fonction est très clairement visée lors de son introduction en Seconde, notamment par la définition que propose le manuel, selon son aspect processus : la variété des registres et des cadres utilisées pour la représenter tendent à souligner sa nature de procédé, de même que le travail sur le concept de fonction à l'aide de certaines tâches relevant du cadre numérique, comme celles d'image, d'antécédent, de représentation d'un tableau de valeurs à partir de l'expression algébrique de la fonction avec ou sans l'aide de la calculatrice, de représentation graphique de fonction par la technique point par point. Cependant, le lien fait très tôt entre la fonction et les notions qui lui sont liées telles que les notions de variation, et d'extremum ainsi que l'insistance sur des registres, tels que le registre graphique mais aussi le registre du tableau de variation qui font ressortir les aspects de la fonction liée aux variations, tendent également dès le début à promouvoir, et notamment dans les activités de résolution d'exercices et de problèmes, à promouvoir une appréhension de la fonction en tant que loi de variation. Il nous semble donc qu'aux débuts de l'enseignement de la fonction, les deux modes d'appréhension, le mode processus et le mode loi de variation ont tendance à se côtoyer.

Au fur et à mesure de l'avancement de l'enseignement, le mode processus, sans disparaître complètement devient graduellement, implicite. En effet, les tâches qui aident à saisir la fonction en tant que processus, ne sont plus demandées de façon explicite et sont laissées par la suite à la charge de l'élève. Par exemple, les tâches d'image et d'antécédent, si elles peuvent persister dans la phase de familiarisation avec une situation fonctionnelle, sont souvent laissées à l'initiative de l'élève qui peut choisir de les réaliser ou non pour la résolution de la tâche de modélisation de la situation. De même la représentation graphique de la fonction par la technique point par point, avec la programmation éventuelle de la fonction pour le calcul de certaines de ces valeurs, ne sera plus indispensable après l'institutionnalisation des méthodes algébriques d'étude des variations de la fonction justifiant la représentation graphique ; mais elle pourra être établie, à l'initiative de l'élève pour obtenir une représentation graphique de la fonction plus précise ou pour l'utiliser en tant que registre de conjecture dans la réalisation des diverses tâches d'un problème. Il nous semble alors que ces tâches traduisant un mode d'appréhension de la fonction comme processus, ne sont alors plus un enjeu de l'apprentissage, elles se naturalisent et prennent place en tant que sous-tâche dans une technique de laquelle elles ne se distinguent plus vraiment. Nous pouvons remarquer, en passant, qu'elles sont en cela des témoins de l'avancée du temps didactique. Mais si elles sont passées dans le topos de l'élève, qui peut les réaliser sans aide et y avoir recours de lui-même, cela ne signifie-t-il pas que ce mode d'appréhension est considéré comme assimilé ?

Face au passage de ce mode d'appréhension de la fonction en tant que processus dans l'implicite, l'appréhension de la fonction en tant que loi de variation s'accentue, notamment avec la mise en place de différentes techniques permettant l'étude des variations d'une fonction, et l'utilisation de la notion de variation selon son statut outil dans la résolution de différentes tâches relevant souvent du cadre algébrique. Ce point sera discuté dans le paragraphe suivant.

Parallèlement, à l'accentuation de ce deuxième mode d'appréhension, se dégage une appréhension de la fonction plus générale, puisque la fonction prend progressivement un statut d'objet. Ceci, non seulement, grâce à son implication en tant qu'objet, dans l'étude de ses diverses caractéristiques et en tant qu'outil dans l'étude de situations fonctionnelles ou la résolution graphique d'équations/inéquations, mais aussi dans la mise en place de notions telles que les diverses opérations de fonctions permettant d'opérer sur elle. Cependant, cette appréhension plus générale de la fonction ne se base pas sur la prise en compte de la définition générale de la fonction. La condition d'unicité de l'image, en tant que caractéristique principale de la fonction n'est pratiquement jamais soulignée tout au long de ces deux années de Seconde et de Première. Ceci ajouté au fait que les exemples de fonctions se limitent aux fonctions numériques continues sur un intervalle, et que les manuels n'ont pas réussi à proposer des fonctions différentes, ou n'en ont pas saisi la nécessité. Ce qui nous a semblé transparaître à travers la non institutionnalisation des fonctions affines par intervalles dans la mesure où celles-ci pourraient justement constituer un exemple différent de fonction. Il est fort probable que cette situation entrave les capacités des élèves à appréhender la fonction selon un mode plus général.

Il nous semble que ce passage, assez rapide, d'un mode d'appréhension à un autre, d'autant plus que deux modes d'appréhension, voire les trois, coexistent souvent, est également rendu obligatoire si on veut vraiment mettre à disposition des élèves un nombre d'objets suffisant à partir desquels le travail sur le concept devient possible. Ceci souligne la nécessité d'une dialectique entre les divers modes d'appréhension, et la difficulté du point de vue didactique de se limiter à la prise en compte d'un seule mode d'appréhension à la fois.

Evolution de l'enseignement du concept de fonction - place centrale de la notion de variation

La notion de variation nous apparaît donc être une notion centrale dans la construction des connaissances relatives à la fonction, et aux différents objectifs d'enseignement qui lui sont liés, dès son introduction.

Ainsi, l'enseignement du concept de fonction évolue principalement avec et autour de l'évolution des technologies relatives à la tâche de détermination des variations d'une fonction. Lors de l'introduction des variations sur la base intuitive et concrète du premier chapitre de Seconde, le concept d'extremum est présenté sur une base similaire en relation avec la notion de variation. Quand les techniques d'inégalités sont objets d'enseignement, variation et extremum sont institutionnalisés relativement aux technologies les justifiant.

En Première, où les opérations algébriques et de compositions de fonctions sont des objets d'enseignement nouveaux, la notion de variation est de nouveau sollicitée pour faciliter leur mise en place. Enfin, avec la notion de dérivée, de nouvelles techniques de résolution pour de nombreuses tâches sont implantées qui utilisent également les variations et délimitent définitivement les contours du concept de fonction autour de trois types de problèmes : l'étude de fonctions dont l'objectif principal en est la représentation graphique, les situations fonctionnelles vues essentiellement comme problème d'optimisation, enfin les résolutions graphiques d'équations/inéquations ou les problèmes d'existence de solution.

Ainsi, la fonction est inséparable de la notion de variation dans la conception de l'enseignement français au niveau de la Seconde-Première. Pour l'étudier, plusieurs dispositifs technologiques et techniques se succèdent en fonction du degré de formalisation atteint. Ces dispositifs n'ont pas, tous, pour uniques objectifs d'enseignement l'appropriation de la notion de variation et du concept de fonction mais peuvent viser, pour certains, la mise en place de notions qui ne seront des enjeux d'enseignement que plus tard dans le cursus scolaire.

Au début de la Seconde, alors que ces notions ne peuvent être perçues que sur une base intuitive et concrète, *les variations sont étudiées à partir de techniques de lecture relatives au graphique et au tableau de variation et/ou à partir de leur contextualisation à l'aide des situations fonctionnelles*. Il faut souligner ici, que le recours au tableau de variations vise non seulement la familiarisation avec la notion de variation mais aussi, la familarisation avec le registre du tableau de variations lui-même.

Par la suite, *la technique des inégalités prend le relais de ces techniques de lectures*. Le recours à cette technique, dans la mesure où elle sera remplacée par la suite par d'autres techniques également formelles, peut s'expliquer d'un point de vue écologique par plusieurs raisons dont voici quelques-unes :

- La définition des inégalités est une définition certes formelle mais également naturelle donc proche de la situation intuitive,
- La fonction est une loi de variation. La prise en compte de cet aspect permet de donner du sens à la notion de fonction en l'utilisant pour traiter des problèmes dès son introduction. Or, comment l'envisager en tant que telle sans une organisation mathématique permettant d'étudier ses variations et autres notions qui lui sont liées alors que la dérivation n'est pas encore abordée ?
- Une autre raison est également la nécessité de familiariser les élèves avec des techniques qui seront nécessaires plus tard en analyse.

La technique des opérations algébriques et de compositions de fonctions en Première, ne se justifie pas véritablement par le fait que ceux-ci apportent de nouvelles techniques de détermination des variations d'une fonction. Les techniques fondées sur les opérations algébriques et la composition ne constituent pas, sur le plan théorique, un passage obligatoire de la technique des inégalités à la technique de la dérivation. Dans ce sens, l'analyse des exercices/problèmes du chapitre de Première concerné a révélé que la véritable raison d'utiliser les opérations selon leur statut outil dans la détermination des variations d'une fonction, s'expliquait par le souci de donner davantage de sens aux notions d'opérations algébriques et de composition qui, visées selon leur statut objet, sont par ailleurs obligatoirement dans le programme de Première. En effet, les opérations et compositions de fonction dans le registre algébrique sont indispensables, plus tard dans l'année, en analyse, pour faciliter les calculs de limites et de dérivées.

Enfin, *la technique liée à l'utilisation de la dérivée,* qui va permettre d'étudier les variations de toutes les fonctions numériques au programme du lycée et de le faire sur tout l'intervalle de définition de la fonction alors, qu'avec les techniques précédentes, cet intervalle devait être fragmenté en intervalles de monotonie donnés de façon explicite ou implicite. La notion de dérivée permet d'unifier le concept de fonction, et les différentes tâches composant l'organisation praxéologique qui la définit, autour du concept de variation. Elle permet également d'aborder de nouvelles notions comme celle de réciproque et d'envisager autrement les problèmes d'existence et de résolution de problèmes qui auront plus tard leurs place parmi les grands problèmes d'analyse.

Cependant, ces techniques sont des techniques relativement complexes qui ne peuvent être acquises sans être travaillées de façon conséquente. Le travail de la technique qui va permettre à la fois son acquisition et l'appropriation de la notion impliquée par la tâche qu'elle justifie, oblige à concevoir un enseignement de façon segmentée où les exercices se concentrent sur une seule notion à la fois, impliquée dans une seule tâche ou dans un ensemble de tâches liées (sous-tâches non encore naturalisées relevant d'une même technique, ou techniques de résolution différentes pour une seule tâche). Cette segmentation des connaissances, certainement obligatoire, risque de contredire la mise en relations des différentes connaissances entre-elles, garante d'une meilleure compréhension des différentes notions.

Par ailleurs, le travail nécessaire de la technique, explique en partie également, que l'introduction d'une nouvelle technique entraîne l'annulation de la technique précédente. L'élève ne peut alors disposer de l'initiative d'utiliser telle ou telle technique, celle-ci étant toujours demandée ou attendue par contrat. Nous nous demandons si cette situation ne risque pas d'aboutir à la réduction de la marge de manœuvre des élèves du moins dans le choix de la technique à mettre en œuvre pour une tâche donnée ?

Variable ou variation ?

Ce point rejoint les deux points précédents dans la mesure ou l'acquisition de la notion de variable relève en grande partie de la phase où la fonction est appréhendée comme processus, et qu'elle prépare à la prise en compte de la notion de dépendance fonctionnelle qui détermine la fonction comme loi de variation.

Or nous avons constaté, qu'en classe de Seconde, le passage du mode d'appréhension de la fonction comme processus au mode d'appréhension comme que loi de variation se réalisait de façon assez rapide, du fait des contraintes de l'enseignement visant une introduction relativement précoce des notions relatives à celle de variation.

Cependant il faut souligner ici, le rôle potentiel des tâches de résolutions graphiques d'équations et d'inéquations et celui de la tâche de modélisation des situations fonctionnelles dans l'assimilation de la notion de variable. La résolution d'équations/inéquations, peut aider à la distinction entre les notions d'inconnue et de variable par la prise en compte des interrelations entre les fonctions et les équations, alors que la tâche de modélisation peut aider à l'assimilation de cette notion notamment en proposant aux élèves des situations fonctionnelles où la détermination des variables dépendante et indépendante pourrait du moins en partie être laissée à leur charge. Si ces aspects ne semblent pas particulièrement soulignés dans le manuel retenu, il ne faut pas oublier les contraintes spécifiques d'un manuel qui, concernant les situations fonctionnelles par exemple, ne permettent pas d'exposer à travers l'énoncé d'un problème, tous les détails de la gestion qu'un enseignant peut faire de sa classe. Ainsi, l'enseignant peut notamment, et surtout aujourd'hui, grâce aux périodes consacrés aux T.D et aux modules, prévoir des heures de travail permettant d'aborder des problèmes assez ouverts, même si ce type de problèmes ne saurait constituer, la majorité du temps consacré à l'étude de fonctions. Ce rôle de l'enseignant permet de souligner l'existence d'un potentiel relatif à l'assimilation de la notion de variable et à toute une dialectique pouvant exister entre l'assimilation de la notion de variable et de celle de variation.

Par la suite, au fur et à mesure que s'installe une appréhension de la fonction selon son aspect loi de variation ainsi que selon un mode plus général, la prise en compte de la notion de variable persiste nous semble-t-il à travers les tâches de composition, transformation, mais aussi d'opérations algébriques, de parité, périodicité réalisées dans le registre algébrique. En effet, la notion de variable est ici impliquée selon son statut outil dans les techniques algébriques de changements de variable relatifs à ces différentes tâches.

L'exemple de la notion de variable, et les différentes modalités de son appropriation, reflète bien une tendance de l'enseignement français à envisager la présentation de certaines notions selon une continuité qui se joue grâce à une dialectique entre plusieurs notions, permise par la présence simultanée d'au moins deux modes d'appréhension de la fonction de la fonction à la fois. Mais cet exemple reflète également l'importance du rôle du professeur pour que toute cette dialectique puisse effectivement avoir lieu.

Utilisation des registres

L'évolution de l'enseignement du concept de fonction en Seconde-Première, dans le sens de sa formalisation s'allie avec une évolution dans le rôle et le niveau d'implication des différents registres utilisés pour travailler le concept de fonction. Si tout au long de l'enseignement de la fonction les mêmes registres peuvent-être rencontrés (tableau de valeurs, tableau de variation, registre verbal-symbolique, registre graphique, registre algébrique), la variété des tâches dans lesquelles chacun d'eux se trouve impliqué diffère au cours des deux années de Seconde et de Première, de même que s'affirme l'importance des deux registres algébrique et graphique relativement aux autres.

Le registre du tableau de valeurs, et les outils (calculatrice, programmation) permettant éventuellement de l'obtenir et faisant appel au cadre numérique sont sollicités de façon explicite aux débuts de l'enseignement de la fonction, puis sont graduellement laissés à l'initiative de l'élève. Leur position en tant qu'outils dans l'étude de fonction, déjà bien définie en Seconde, se confirme en Première mais leur utilisation n'est plus suggérée par les énoncés. Ils sont à ce stade considérés comme des outils maîtrisés de l'étude de fonction. Ceci a trait, nous l'avons dit, à la disparition de l'appréhension explicite de la fonction comme processus. A propos de la programmation, nous n'y avons constaté dans les deux manuels étudiés aucune référence explicite. Le registre de la programmation nous semble surtout destiné à contribuer à l'émergence de la notion de fonction, par la suite, il n'y a plus vraiment besoin de programmation parce que tous les outils nécessaires sont préprogrammés dans les calculatrices (tableau de valeurs, graphes et même récurrence).

Le tableau de variations est un registre dont la familarisation puis la maîtrise est entièrement laissée à la charge de l'élèves, donc en exercices. En classe de Seconde, la nécessité de se familiariser avec les notions de variation et d'extremum sur une base intuitive fait que le tableau de variations est impliqué dans de nombreuses tâches faisant appel à la lecture de variations de fonctions (tâche d'étude des variations ou de détermination d'extremum à partir du tableau de variations, tâche de conversion entre les registres algébrique et du tableau de variations). Mais aussi, la nécessité de se familiariser avec le registre du tableau de variations fait qu'il se trouve impliqué dans des tâches pour lesquelles il n'est pas le mieux approprié (tâches d'image, d'antécédent, de signe de fonctions). En Première, le tableau de variations prend sa position définitive de registre intermédiaire facilitant le passage de l'étude des variations de la fonction à la représentation graphique. Les tâches beaucoup plus variées dans lesquelles il était impliqué en Seconde disparaissent et il se trouve confiné dans un seul type de tâches.

Le registre verbal-symbolique : Ce registre est d'utilisation circonscrite tout au long des deux années des Seconde et de Première dans la mesure où il n'intervient que dans deux types de tâches bien précis: tâche de représentation de fonction, et surtout tâche d'expression fonctionnelle. Les tâches et techniques associées qui l'impliquent permettent une utilisation de la fonction et de ses diverses propriétés selon leur statut outil.

Les principaux registres restent cependant tout au long de ces deux années *les registres graphique et algébrique* entre lesquels s'instaure une véritable dialectique.

Le registre graphique, est au départ le registre à partir duquel les notions nouvelles sont installées, par l'exploitation de la force d'intuition qui lui est conféré. Mais il faut souligner que ceci suppose qu'une certaine transparence soit accordée à la lecture dans le registre graphique des différentes propriétés à établir, or celle-ci est mise en doute par certaines recherches, dont celle déjà citées de Duval. Graduellement le registre graphique évolue en registre permettant de conjecturer des propriétés qui nécessitent une validation dans le registre graphique. Il nous semble que ce nouveau statut du registre graphique est significatif du passage graduel de l'intuitif au formel : la mise en parallèle fréquente, à un certain moment de l'évolution de l'enseignement sur la fonction, des deux techniques graphique et algébrique pour une même tâche vise à faciliter ce lien et à favoriser l'assimilation de la notion visée.

En fin de Première, son statut varie en fonction des types de problèmes dans lequel il se trouve impliqué. Dans les situations fonctionnelles, il peut se trouver impliqué dans quelques rares tâches apparaissant plutôt dans les situations fonctionnelles qui définissent également la place de l'outil calculatrice programmable à écran graphique. Celle-ci sert de guide de travail, d'outil de contrôle dans la résolution de certaines tâches. Le manuel, n'y réfère que rarement en exercices/problèmes encore plus rarement dans le cours, or les programmes considèrent son utilisation comme un des objectifs d'enseignement de Première. Aussi, semble-t-il que le rôle du professeur est ici indispensable pour inciter à son utilisation et favoriser la maîtrise de l'instrument. Il nous semble que cette exploitation du registre graphique en tant que registre de conjecture est d'ailleurs essentiellement laissée à la charge de l'élève : elle entre dans son topos.

Dans les problèmes d'étude de fonction où la représentation graphique de la fonction est un aboutissement de son étude, le registre graphique ne peut plus être un registre de conjecture. Il est précédé de tâches visant plus ou moins directement à l'obtention de la représentation graphique la plus précise possible : la fonction semble devenir un moyen d'étudier un objet géométrique, sa courbe, et donc permet d'établir un lien entre le domaine géométrique et celui du fonctionnel. Cependant, il n'est pas exclu ici que la représentation graphique de la fonction préalablement obtenue par l'élève à l'aide de la calculatrice programmable à écran graphique, serve également à l'élève d'outil pour conjecturer et contrôler les résultats obtenus aux différentes tâches demandées. Bien qu'il n'y ait pas d'allusion spécifique dans le manuel de Première à cette utilisation de la calculatrice, il nous semble qu'elle est fort probable et peut-être plus directement encouragée dans les programmes et manuels plus récents. Enfin, cette utilisation du registre graphique en tant que registre de conjecture et de contrôle des résultats, qui doit faire partie en classe de Première, du topos de l'élève, nous semble significatif par ailleurs, de l'esprit scientifique que l'on veut voir se former chez l'élève.

5. A propos des nouveaux programmes

Les nouveaux programmes de mathématiques ne sont entrés en vigueur pour la classe de Seconde et celle de Première que respectivement à la rentrée 2000-2001 et 2001-2002. Nous avons fait passer notre questionnaire à des élèves de Première au cours de l'année 2000-2001 aussi les nouveaux programmes ne concernent-ils pas notre étude. Cependant il nous faut tenir compte des aménagements du programme de Première qui ont, eux, été appliqués à la rentrée 2000-2001. Ceux-ci sont cependant minimes pour la partie du programme qui nous intéresse et n'affectent que peu notre étude :

- En ce qui concerne l'étude des fonctions polynômes et rationnelles en algèbre, il est stipulé, qu'il ne sera plus possible de consacrer un chapitre spécifique à leur étude. Celles-ci devront- être vues dans le cadre des applications du second degré, de la dérivation et du comportement asymptotique de certaines fonctions. Le but étant probablement de mieux lier les pratiques algébriques à l'étude de fonctions de façon à leur donner plus de sens. Nous avions en effet remarqué que certains domaines algébriques étaient trop nettement distingués du reste de l'enseignement sur les fonctions dans les programmes de 91. Mais en retour, on pourrait s'attendre à une moins grande maîtrise de la technicité algébrique chez les élèves.
- Un autre aménagement est prévu à propos de l'application de la dérivation ; il concerne le théorème liant la dérivée à l'existence de solution de l'équation $f(x) = \lambda$ sur un intervalle. Ce théorème reste au programme et sera appliqué pour déterminer l'existence et le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$. Il ne sera plus utilisé, par contre, pour introduire la notion de réciproque qui disparaît des nouveaux programmes. Ce point reflète, de façon générale, un allégement du cadre théorique de ces nouveaux programmes.
- Enfin, la résolution des équations $\cos x = a$ et $\sin x = a$ n'est plus exigible. Nous avons vu, en effet, que dans les programmes de 1991, un bonne part de l'étude des fonctions trigonométriques en Première mais déjà en Seconde était consacrée à la résolution d'équations et d'inéquations simples en cosinus et sinus. La limitation de ces objets d'enseignement devrait faire que l'accent soit davantage porté sur le cadre fonctionnel lors de l'étude des fonctions trigonométriques.

Ces aménagements de programmes ne devraient pas avoir de retombées sur les résultats des élèves à notre questionnaire.

6. Quelques mots pour conclure

L'analyse institutionnelle du système d'enseignement français effectuée dans ce chapitre, révèle clairement la dialectique qui s'installe entre la formalisation du concept de fonction, les différents modes d'appréhension de la fonction, les différents cadres et surtout les registres associés permettant de faire fonctionner et de travailler sur le concept ainsi que l'implication de la notion de fonction, et de celles qui lui sont liées, selon leur statut outil ou objet. Ces différents aspects de l'organisation de l'enseignement, s'entrelacent et évoluent avec l'avancement de la formalisation du concept de fonction.

Par ailleurs, cette analyse révèle la place centrale du concept de variation dans l'approche française de l'enseignement sur les fonctions : présentée sur une base intuitive et concrète dès l'introduction de la notion de fonction, visée tantôt selon son statut outil, tantôt selon son statut objet, l'avancement de sa formalisation caractérise l'avancement de la formalisation du concept de fonction, de même qu'elle détermine l'organisation praxéologique relative à l'objet fonction et son évolution.

Cependant, il ne faut pas perdre de vue que cette subtile dialectique entre les multiples variables caractéristiques de l'approche française de l'enseignement de la fonction relève de la potentialité de cet enseignement : potentialité que le professeur aura en charge de traduire pour sa classe. Il pourra insister sur l'aspect intuitif des notions ou lui préférer un passage rapide vers une appréhension formelle, proposer effectivement des exercices/problèmes suffisamment variées pour permettre de jouer sur la variété des cadres et des registres ainsi que sur le double statut outil/objet des différentes notions, etc. Nous avons là toute une marge de manœuvre possible pour le professeur qui sera déterminante sur le rapport personnel à l'objet fonction des élèves français.

Chapitre IV

DESCRIPTION ET ANALYSE DES MANUELS PALESTINIENS

Rappelons que les programmes que nous étudions sont les programmes jordaniens, et que le ministère palestinien de l'éducation nationale travaille à l'élaboration des premiers programmes palestiniens. Le ministère jordanien de l'éducation nationale ne publie pas de programmes et commentaires officiels comme cela se fait en France. Il publie plutôt deux manuels, le manuel de l'élève et le manuel du professeur, pour chaque classe, ceux-ci sont distribués moyennant une somme symbolique aux élèves et professeur. C'est le manuel du professeur qui pallie l'absence de programmes officiels.

En préalable : brève présentation de l'enseignement de la fonction avant la classe de 10ème

Nous présentons brièvement l'enseignement de la fonction dans les classes de 8ème et 9ème en nous référant à la présentation qui en est donnée dans la publication du P.C.D.C[9] en 1996. La fonction fait partie du domaine de l'algèbre de la classe de 8ème jusqu'à la classe de 11ème. En classe de 12ème, l'étude de fonctions se situe dans le domaine de l'analyse.

En classe de 8ème, sous le sous-titre "fonctions et relations" sont enseignés : le repère cartésien ; les relations et leurs représentations, en insistant sur celles dont le domaine de définition est fini ; la fonction et sa représentation ; la fonction affine et sa représentation graphique.

En classe de 9ème, sous le sous-titre "fonctions du second degré" sont enseignés : la représentation graphique des fonctions du second degré ; la décomposition en facteurs premiers et la complétude du carré d'une fonction du second degré ; forme canonique et discriminant ; somme et produit des racines , résolution d'équations du second degré et application à la résolution de problèmes.

Même si la définition générale de fonction est introduite dès la classe de 8ème, l'étude de fonctions se limite néanmoins à l'étude de cas particuliers de fonctions : la fonction affine puis la fonction du second degré. L'étude de fonctions se limite essentiellement à l'étude des propriétés algébriques de fonctions, ainsi qu'à la représentation graphique et à la résolution des équations correspondantes. Les variations de fonctions ne sont pas abordées, y compris dans le cas de la fonction du second degré où les notions de minimum et maximum sont pourtant introduites mais cependant liées aux particularités de la courbe correspondante. La classe de 10ème amène une conception plus générale de la fonction, dans la mesure où d'autres notions liées aux fonctions y sont introduite dans le cadre d'un exposé

[9] Il s'agit du "Comprehensive plan for the development of the first palestinian curriculum for general education", déjà cité dans le chapitre 1.

général sur le concept. C'est en ce sens que nous pensons qu'un enseignement plus général de la fonction est abordé en classe de 10ème et qu'il n'est pas nécessaire d'inclure dans notre étude l'analyse des enseignements respectifs des deux classes de 8ème et de 9ème.

1. Les manuels palestiniens

1.1 Organisation de l'analyse des manuels des classes de 10ème, 11ème et 12ème palestiniennes

Elle sera identique sur le fond à l'analyse des manuels français (voir organisation de l'analyse des manuels français, chapitre III) mais elle présentera quelques différences du point de vue de la présentation étant données les différences de conception et de présentation entre les programmes et manuels palestiniens et français :

- Dans notre description et analyse des différents chapitres, et sections de chapitre relevant de notre analyse, l'accent sera porté sur le manuel de l'élève mais nous nous référerons au manuel du professeur, en le précisant, à chaque fois que nous l'estimerons nécessaire (ce point est précisé ci-dessous dans la présentation du manuel du professeur).
- A la fin, de chaque section analysée, nous procéderons, à l'analyse des exercices et activités relevant de la section, et apparaissant respectivement dans le manuel de l'élève et dans celui du professeur. Cela nous semble important de respecter l'ordre d'apparition des exercices/activités relativement au cours, car cet ordre n'est pas neutre d'un point de vue pédagogique. Nous nous tiendrons à cet ordre notamment lors de l'analyse des premières sections du premier chapitre des manuels de 10ème. Par la suite, dans un but de simplification, et aussi souvent que cela nous semblera possible, nous procéderons à des regroupements au niveau des sections, ou des exercices/activités rapportés à différentes sections.
- Nous remarquerons lors de leur analyse que les exercices/activités se caractérisent de façon très précise relativement à une section. Ceci se retrouve dans la série d'exercices de révision proposée en dernière section de chaque chapitre du manuel de l'élève. A leur lecture (à titre d'exemple, voir en annexe du chapitre IV, la série d'exercices de la section "Révision" du chapitre I du manuel de l'élève de 10ème), il est toujours possible de rattacher un exercice à la section dont il relève. C'est en ce sens que nous estimons qu'il n'y a pas d'exercices/activités que l'on puisse considérer comme des problèmes dans le sens français du terme. Sans intégrer de façon systématique les exercices des sections "Révision" dans l'analyse de la partie exercices/activités, nous les prendrons néanmoins en considération pour confirmer les grandes intentions de chaque section en matière de savoir-faire visés par l'enseignement.

- Nous procéderons principalement à une analyse des exercices/activités par tâches et techniques. L'analyse par cadres et registres sera le plus souvent réduite, et cela apparaîtra notamment dans les classes de 11ème et 12ème, du fait de la restriction dans la variété des cadres et registres mobilisés.
- Enfin, en l'absence de programmes officiels côté palestinien, c'est à travers l'analyse des manuels que nous tenterons de mettre en évidence la philosophie générale d'enseignement.

1.2 Description générale des manuels palestiniens

Les manuels des différentes classes sont identiques dans la présentation et dans la forme, de rares modifications sont cependant à relever dans les manuels de 11ème et 12ème relativement à ceux de 10ème. Nous nous baserons, pour notre description, sur les manuels de 10ème et préciserons lorsqu'elles se présentent les modifications des deux autres manuels.

Le manuel de l'élève

Chaque chapitre du manuel est divisé en sections correspondant chacune à une ou deux leçons d'après les indications du manuel du professeur ; chaque leçon est officiellement à enseigner en une ou deux périodes d'enseignement d'une durée de 40 à 45 mn. La présentation du texte est monotone ; écrit en noir sur blanc, il ne présente que de rares illustrations, en l'occurrence pour les chapitres qui nous intéressent des représentations de fonctions, et en guise de couleurs des encadrés bleus, en général un seul qui contient la définition, plus rarement le théorème, qui constitue le principal, souvent l'unique résultat technologique de la section. Les leçons sont présentées de la manière la plus succincte possible sous la forme d'une succession d'exemples présentés sous forme d'exercices résolus. Quelques remarques ou commentaires peuvent apparaître ici ou là. Ceux constituant un résultat technologique ou technique à retenir sont indiqués en caractères gras. En classe de 10ème, la leçon commence soit par un exemple d'introduction, à partir duquel une nouvelle définition est à déduire soit tout simplement, par une phrase introduction "dans cette section, nous étudierons ...", qui indique son principal objectif. Mais au fur et à mesure de l'avancement de l'enseignement et surtout en classe de 12ème, il n'y a plus d'exemples d'introduction pour démarrer un enseignement.

Le cours ne présente aucune démonstration. La volonté marquée dans la rédaction du texte est *d'aller droit au but* afin de permettre aux élèves d'acquérir les savoir-faire visés, soit la résolution des différents exercices/activités proposés. Chaque section se termine par une liste d'une dizaine d'exercices : deux types d'exercices sont distingués en classes de 10ème les "exercices en classe", puis les "exercices d'entraînement et questions", à résoudre en général à la maison. Cette distinction n'est pas faite dans les manuels des classes de 11ème et 12ème.

Le manuel du professeur

Le manuel du professeur est un véritable manuel de leçons modèles. Il est divisé en chapitres et sections, correspondant exactement aux chapitres et sections du manuel de l'élève. Mais ici, la section est en fait le modèle de la leçon que le professeur doit enseigner à l'élève, c'est le cours du professeur. Rien n'est oublié, ni les exemples d'introduction, ni l'instant et la manière de solliciter la participation de l'élève.

Certains chapitres commencent par une section supplémentaire qui présente quelques remarques générales concernant le chapitre à enseigner, ses principaux objectifs d'enseignement ainsi que ce qui est attendu des élèves en matière d'apprentissage et d'évaluation. Commence ensuite le chapitre proprement dit dont voici le plan valable pour chaque section :

- le nombre de périodes d'enseignement nécessaires pour la leçon, une ou deux, est précisé ;
- les principaux objectifs de la leçon suivent dans un encadré bleu qui reprennent pour l'essentiel ceux présentés en début de chapitre et relatifs à la section ;
- le paragraphe suivant " méthodes et activités", composé de deux parties, est destiné à la préparation du cours. La partie "préparation", qui propose souvent en 10ème, un exercice d'introduction, appelé activité probablement parce qu'il doit être résolu oralement avec la participation des élèves. Il arrive que cet exemple d'introduction apparaisse dans le manuel de l'élève, il est alors simplement précisé de le résoudre avec la participation de l'élève. La partie "méthode", qui précise au professeur comment intervenir pour aider les élèves à résoudre l'exercice d'introduction éventuel, et plus généralement comment présenter la leçon à partir du manuel de l'élève ;
- l'encadré "activité de révision", où un ou deux exercices de révision, sont proposés. Ils ne sont à donner aux élèves que si le professeur pense nécessaire de revenir sur certains des concepts déjà enseignés dans les sections précédentes ;
- l'encadré "activités supplémentaires", où apparaissent 1 ou 2 exercices, qui s'adressent aux élèves moyens, en complément de ceux proposés dans le manuel de l'élève ;
- l'encadré "évaluation", où il est expliqué au professeur comment évaluer les élèves pendant le cours, en dehors des interrogations ou devoirs ;
- l'encadré "classification des exercices", où les exercices du manuel des élèves sont classés selon leur degré de difficulté (de base, moyen, au-dessus du niveau) ;
- l'encadré "activité d'approfondissement", où l'on propose au professeur un ou deux exercices supplémentaires s'adressant aux élèves de niveau supérieur ;
- enfin, l'encadré "solution des exercices", où l'on donne la solution de tous les exercices du manuel de l'élève.

Dans les manuels du professeur des classes de 11ème et 12ème, les rubriques "activités de révision" et "activités d'approfondissement" n'existent pas. Par ailleurs, remarquons que les exercices des manuels du professeur sont tous qualifiés "d'activités". Ce terme nous apparaît être utilisé davantage pour distinguer les exercices du manuel du professeur de ceux du manuel de l'élève. Il ne correspondant pas en effet aux activités, dans le sens français du terme.

Nous n'analyserons pas, de façon systématique, le manuel du professeur. Les conseils pédagogiques présents dans chaque chapitre sont trop détaillés pour relever de notre étude qui s'intéresse davantage à la philosophie générale de l'enseignement. Mais nous retiendrons à quel point cet enseignement apparaît comme directif, laissant a priori très peu de marge de manœuvre au professeur. En effet, même si ces exemples de cours proposés ne sont pas obligatoires, apparaissant comme des modèles de leçons à enseigner car directement sanctionnés par le ministère de l'éducation, et constituant probablement alors la base selon laquelle les professeurs seront évalués à leur tour lors des inspections, il ne serait pas étonnant que nombreux soient les professeurs qui se sentiraient tentés d'appliquer à la lettre les conseils donnés. Ceci est d'autant plus vrai pour les enseignants sortis fraîchement de l'université et pour qui aucune formation pédagogique n'est prévue.

Dans notre analyse du manuel de l'élève nous tiendrons compte des objectifs d'enseignement proposés pour chaque section dans le manuel du professeur. Lors de l'analyse des exercices/activités se rapportant à chaque section, nous inclurons les "activités" apparaissant dans le manuel du professeur à l'exception des "activités de révision" si celles-ci sont jugées hors propos. Enfin, nous ne tiendrons compte des directives et conseils que si nous les jugeons véritablement pertinents pour notre analyse.

Pour que le lecteur se rende mieux compte du lien entre ces deux manuels nous proposons, en annexe du chapitre IV, une traduction de la section 3 "Fonctions" du chapitre "Relations et fonctions" dans chacun des deux manuels de 10ème.

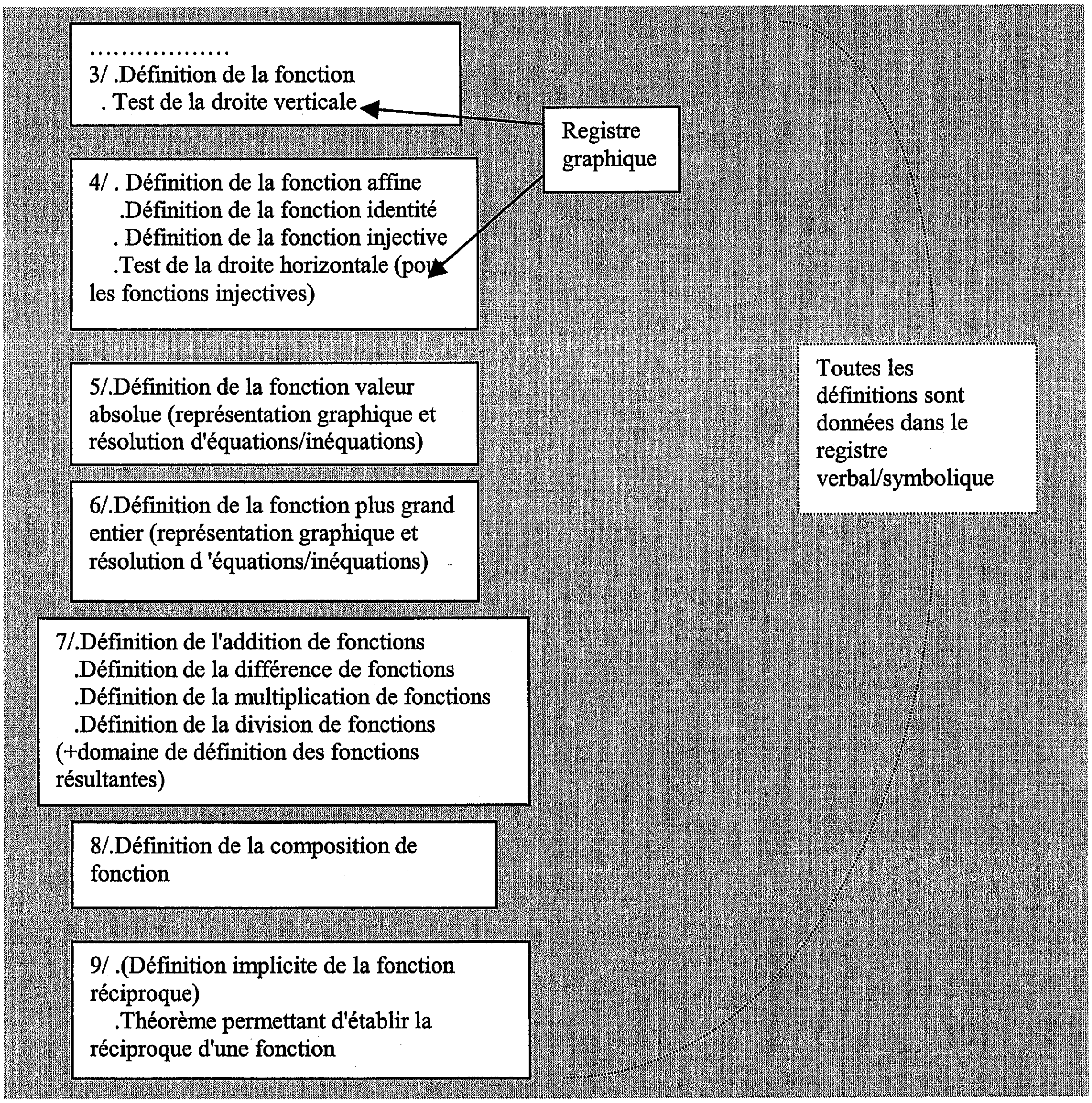
2. Analyse des manuels de 10ème

Les manuels de l'élève et du professeur comprennent 8 chapitres chacun, dont trois relèvent en totalité ou en partie de notre étude. Il s'agit des chapitres "Relations et fonctions", "Polynômes" et "Fonctions trigonométriques".

2.1 Description et analyse du chapitre 1 : "Relations et Fonctions"

Ce premier chapitre est composé de 12 sections qui apparaissent dans l'ordre suivant : "Le produit cartésien", "Les relations", "Les fonctions", "Fonctions particulières", "La fonction valeur absolue", "La fonction partie entière", "Les opérations sur les fonctions", "Composition de fonctions", "La fonction réciproque", "Applications", "Types de relations" et "Révision". La section "Révision", présente en annexe du chapitre IV, est ici une liste de 18 exercices. Nous n'analyserons ni les deux premières, ni l'avant dernière section, mais la présence même de ces sections nous indique d'emblée dans quelle logique sont conçus les débuts de l'enseignement sur les fonctions. Fonctions et relations sont clairement liées sur la base de la logique ensembliste. L'analyse du premier chapitre nous révélera de quelle façon est envisagé l'enseignement de la fonction vue, du moins dans ce premier chapitre, comme loi ensembliste.

2.1.1 Organigramme du cours du chapitre



2.1.2 Description, commentaire et analyse de la section "Les fonctions"

2.1.2.1 Le cours

L'objet d'enseignement : fonction

Il ne sera pas nécessaire de décrire la section correspondante puisqu'une traduction intégrale est jointe en annexe du chapitre IV.

La fonction est institutionnalisée par la définition suivante : "*la fonction est une relation qui relie chaque élément de son domaine de définition à un élément unique de son but.*" Comme nous l'avions supposé déjà d'après la composition de ce chapitre, la notion de fonction est liée à celle de relation puisqu'elle est présentée comme un cas particulier de celle-ci. Les objets d'enseignements *relation*, *domaine de définition* et *but* qui lui sont liés, ont été institutionnalisés dans la section précédente "Relation" par la définition suivante : "*n'importe quel ensemble de couples ordonnés. L'ensemble de tous les premiers termes de ces couples est appelé domaine de la relation, et l'ensemble de tous les seconds termes est appelé but de la relation*".

Le nouvel objet d'enseignement *image* est institutionnalisé en liaison avec la notation *f(x)*. Le manuel du professeur conseille d'insister sur cette notation (voir la traduction de cette section en annexe du chapitre IV), ce qui peut signifier qu'il faut insister sur le fait que y est la seule image de x par f. Nous soulignerons qu'aucun des deux manuels n'envisage la présentation de la notion d'antécédent. Il n'y a aucun terme équivalent à antécédent dans cette section, ni même dans ce manuel. Cela pourrait indiquer que cette notion est jugée comme superflue pour une leçon qui se centre sur la distinction relation/fonction par vérification du nombre d'images de chaque élément du domaine de définition. L'antécédent est alors simplement *l'élément du domaine ayant pour image une valeur donnée du but.* Cette constatation nous semble significative d'une conception de l'enseignement où seul le strict minimum pour faire fonctionner une nouvelle notion est enseigné avec la notion en question.

Dans ce contexte, l'unique résultat technologique de la section est, en l'occurrence, la définition de la fonction ; une telle conception de l'enseignement ne laisse guère plus de place qu'aux seules tâches de *discrimination relation/fonction* et d'*image* pour lesquelles différentes techniques de résolution, en liaison avec le registre dans lequel la relation est représentée, sont institutionnalisées sur la base des exercices résolus de la section dans le manuel de l'élève. Ces deux tâches sont effectivement les deux seules tâches nouvelles relativement à la section relation. En effet, aussi bien les tâches de *détermination de domaine de définition/but* et de *représentation de la relation* (dans un autre registre que celui dans lequel elle est donnée au départ) sont également valables pour les fonctions et les relations qui n'en sont pas, et ne constituent donc pas un point de différenciation entre les deux sections (ou notions).

Le concept de fonction est présenté sur une base directement formelle à partir de quelques exemples de fonctions définies sur un ensemble fini. La généralisation de la fonction se fait donc du cas fini au cas infini, les registres de représentation relevant du cas fini, comme l'ensemble de couples ordonnés et la représentation graphique de fonction discrète, servant à familiariser l'élève avec la nouvelle notion de fonction sur la base de la distinction entre les deux concepts de relation et de fonction. Dans ce contexte, le *test de la droite verticale* apparaît occuper une position centrale. Le registre graphique permet de faire le lien entre le cas des fonctions finies et celui des fonctions infinies. Il s'impose dans la discrimination des fonctions relativement aux autres relations, la technique algébrique apparaissant comme trop difficile à appliquer (voir l'exemple 4 dans la traduction de la section "Fonction" du manuel de l'élève, en annexe du chapitre IV). Cependant l'utilisation du test de la droite verticale suppose que les fonctions soient données directement dans le registre graphique, les élèves n'ayant pas encore suffisamment d'outils à disposition pour passer du registre algébrique au registre graphique.

L'objet d'enseignement : le test de la droite verticale

Ce *test de la droite verticale* tel qu'il est présenté nous semble également intéressant d'un point de vue didactique car il montre à quel point nous avons là un enseignement marqué par la volonté "d'aller droit au but" dans la présentation de l'environnement technologique et du minimum de techniques pour faire fonctionner les nouvelles notions à mettre en place. L'utilisation du test de la droite verticale est justifiée à partir d'un exemple (voir l'exemple 5 dans la traduction de la section "Fonction" du manuel de l'élève, en annexe du chapitre IV) que les élèves auront à reproduire.

Soulignons pour terminer l'analyse du cours de cette première section qu'il y est assez rapidement précisé, que les seules fonctions étudiées seront les fonctions numériques ("ayant pour domaine de définition et but R ou un de ses sous-ensembles") et que les registres se limiteront aux registres permettant l'expression de la loi fonctionnelle (il s'agirait donc de l'expression algébrique ou ensembliste) ou au registre graphique. Les autres types de fonctions pourraient sembler par là même marginalisées, ce qui risque de provoquer une conception restrictive de la notion de fonction, puisque l'élève n'en verra pas ou très peu tout au long de la section "Fonction" des deux manuels. Mais il est vrai qu'il a rencontré d'autres fonctions, notamment en classe de 8ème où il a travaillé sur la distinction relation/fonction.

2.1.2.2 Les exercices/ activités (total de 9 exercices/activités)

Analyse par cadres et registres utilisés

Loi ensembliste : 2 fois en tant que registre de départ.

Ensemble de couples ordonnés : 1 fois registre de départ

Registre algébrique : 4 fois, registre de départ

Registre graphique : 1 fois registre de départ.

Précisons tout de suite que les tâches demandées relativement à ces registres ne supposent pas de conversion de registres, ce qui signifie que le registre de départ détermine la technique à utiliser. L'unique exception qui nécessite une conversion de registres est une situation fonctionnelle sur laquelle nous reviendrons. L'objet fonction est manipulé dans les seuls cadres numérique et algébrique. Il n'y a pas de cadre fonctionnel dans la mesure où l'idée d'une dépendance entre deux variables n'est pas suffisamment explicite. Cette constatation s'éclaircira dans l'analyse par tâches et techniques.

Analyse par tâches et techniques

(voir tableau des tâches et techniques de la section 3 du chapitre 1 du manuel de 10ème en annexe du chapitre IV)

Les tâches que l'on retrouve dans ce type d'exercices sont les tâches de :

- Discrimination relation/fonction (4 exercices/activités),
- Image (5 exercices/activités),
- Expression fonctionnelle (dans l'unique situation fonctionnelle de la section)

Ces tâches se présentent principalement en tant que tâche unique dans la majorité des exercices/activités. Seuls deux d'entre eux proposent deux tâches différentes dont la première nous semble être une aide implicite pour la réalisation de la seconde. Ceux-ci seront précisés dans ce qui suit.

La tâche de discrimination relation/fonction

Cette tâche est demandée dans trois registres différents : l'ensemble des couples ordonnées, le registre graphique et le registre ensembliste. Le registre ensembliste semble être utilisé pour rendre cette tâche problématique, ce qui explique d'une part qu'elle soit toujours précédée d'une autre tâche (aide implicite) et que l'exercice soit considéré alors comme "moyen ou de niveau supérieur" d'après les manuels (exercice n°5 du manuel de l'élève et activité d'approfondissement n° 8 du manuel du professeur). Nous proposons justement d'examiner de plus près cette activité d'approfondissement:

"Détermine-les coordonnées de l'intersection de la droite verticale $x = 2$ et de la courbe de la relation $R = \{(x; y) / x^2 + y^2 = 13\}$; cette relation est-elle une fonction ? Pourquoi ?"

Précisons que cet exercice n'est pas à résoudre dans le registre graphique. La résolution apportée dans le registre algébrique par le manuel du professeur le confirme mais la rédaction de l'exercice, laisse supposer qu'il s'agit là du contrat : il n'est pas demandé à l'élève de représenter graphiquement cette relation et ceux-ci n'auront probablement pas le réflexe de réaliser à leur propre initiative ce type de tâche. La tâche d'intersection de courbes est alors à voir comme une aide implicite à l'application de la définition puisqu'elle doit amener l'élève à voir que "*l'élément 2 a deux images*" (extrait de la solution du manuel du professeur). Il faut remarquer ici qu'il s'agit d'une traduction algébrique de la technique graphique de résolution relative à cette tâche et institutionnalisée dans le cours puisqu'elle s'appuie sur l'intersection d'une courbe et d'une droite. L'interprétation du résultat en termes fonctionnels (une valeur du domaine de définition à laquelle correspondent deux images) est laissée à la charge de l'élève. Relativement à la technique graphique institutionnalisée en cours, cette technique ne fait pas l'objet d'un enseignement, sa maîtrise étant jugée probablement trop difficile pour la moyenne des élèves. Nous avons souligné dans notre chapitre II, que la technique algébrique de la tâche de discrimination relation/fonction est relativement difficile à mettre en œuvre à ce niveau scolaire.

Il s'agit donc uniquement de familiariser les élèves les meilleurs avec cette technique algébrique de résolution de la tâche de *discrimination relation/fonction,* et uniquement dans le cas où la relation n'est pas une fonction. L'exercice montre par conséquent que le registre algébrique peut s'utiliser pour rendre plus complexe des tâches dont la technique de résolution généralement attendue des élèves relève d'un autre registre, en l'occurrence ici du registre graphique, et montre combien la limitation aux cadres théoriques et aux techniques proposées en cours est un choix des auteurs. Nous verrons d'autres cas similaires dans la suite du chapitre.

La tâche d'image

Elle est à voir comme une tâche importante relativement à la maîtrise du concept de fonction, plus précisément à la maîtrise de la notion de variable. La fonction est toujours donnée dans le registre algébrique imposant l'application de la technique numérique de substitution d'une valeur à une variable montrée à travers un exercice résolu dans le cours. La fonction est le plus souvent une fonction affine (3 sur 5 exercices), la tâche devient problématique quand la fonction est une fonction par intervalles comme dans cette activité d'approfondissement n°9 :

"
$$f(x) = \begin{cases} x^2;\ x \quad 1 \\ 3x - 2;\ x < 1. \text{ Détermine } f(2), f(1), f(-1)". \end{cases}$$

L'utilisation d'une branche parabolique est permise du fait que les élèves connaissent les fonctions du second degré.

Remarquons que toutes les images à calculer, à l'exception d'une seule où il est demandé de déterminer f(2) pour f affine, le sont uniquement pour des valeurs entières. De façon générale, nous constaterons souvent dans ce chapitre qu'à chaque fois que des calculs de valeurs sont à effectuer, qu'ils soient demandés en tant que tâche ou qu'ils interviennent au niveau de la technique de résolution d'autre tâches (représentation graphique de fonction par la technique point par point par exemple), les valeurs impliquées sont majoritairement des valeurs entières. Nous soulignerons à plusieurs occasions mais pas de façon systématique, l'apparition de ce type de calculs sur lequel nous reviendrons dans la conclusion du chapitre.

La tâche d'expression fonctionnelle

Elle est demandée une seule fois dans une situation fonctionnelle. Les situations fonctionnelles font l'objet d'une section distincte, la section 10 "Application". Il nous semble que cette tâche est davantage à rapprocher de la *tâche de détermination de la loi d'une relation* qui apparaît, comme nous l'avions souligné lors de l'analyse du cours, plus fréquemment dans la section "Relations".

2.1.3 Description, commentaire et analyse de la section "Fonctions particulières"

2.1.3.1 Le cours

Les objets d'enseignement : fonctions affines, fonctions constantes et fonction identité

Cette section se divise en deux parties, la première concerne les "cas particuliers de fonction affine" et la deuxième traite de la fonction injective. La définition de la fonction affine dans le registre algébrique et sa représentation graphique sont rappelées (la fonction affine est connue depuis la troisième). Les fonctions constantes et identité, nouvelles en seconde, sont présentées comme des cas particuliers de fonction affine dépendant des valeurs des constantes a et b.

Soulignons que leur institutionnalisation se fait relativement à la définition ensembliste de la fonction donnée dans la section "Fonction" (ex : "l'ensemble d'arrivée dans le cas d'une fonction constante est constitué de l'élément unique b").

Les représentations graphiques sont institutionnalisées sans plus de commentaire. Le manuel du professeur n'insiste pas davantage sur d'éventuelles justifications à présenter aux élèves quant à ces représentations graphiques.

La représentation graphique des fonctions constantes et identité est d'une part, probablement considérée comme non problématique, ces fonctions étant des cas particuliers de fonctions affines que l'on sait représenter après en avoir déterminé deux points. D'autre part, il nous semble que, d'un point de vue écologique, la technique de représentation graphique des fonctions affines, et tout particulièrement des fonctions constantes et identité, se justifie très bien, quoique de façon implicite, à partir de la technologie (la définition de la fonction) donnée dans la section précédente puisqu'il suffit de choisir deux éléments du domaine de définition et d'en déterminer les images pour l'obtenir. Cette technique de représentation graphique des fonctions affines, et des cas particuliers de fonctions affines, est d'ailleurs la seule technique mentionnée dans les deux manuels : il n'y a pas d'allusion ici à la notion de coefficient directeur.

L'objet d'enseignement : fonction injective

La fonction injective est présentée à travers le "test de la droite horizontale" avant d'être institutionnalisée dans le registre algébrique. Ce test présente le même intérêt dans la tâche de discrimination fonction/injection que le "test de la droite verticale" dans la tâche de discrimination relation/fonction.

Le registre graphique sert à la fois de registre de familiarisation avec la nouvelle notion d'injection et de principal registre pour la mise en œuvre de la technique de discrimination fonction/injection. La technique graphique est en particulier préférée à la technique algébrique dans un esprit de simplification du cadre théorique nous semble t-il.

Le manuel du professeur ne fait pas ressortir d'autres objectifs d'enseignement que la simple reconnaissance, dans les deux registres algébrique et graphique, des fonctions présentées dans cette section, mais ceci était déjà apparent à la lecture du manuel de l'élève. *L'étude de fonction se limite donc à la représentation graphique d'une fonction donnée algébriquement et à la vérification de la propriété d'injection.* Il n'y a donc pas pour l'instant de création de cadre fonctionnel, nous semble-t-il, car l'idée de dépendance ne saurait naître des cas de fonctions proposées. Il a, en effet, souvent été relevé dans la littérature didactique que les élèves ont beaucoup de mal à voir dans les fonctions constantes et surtout identité des relations de dépendance. La progression observée dans l'enseignement sur les fonctions ne permet pas donc un acheminement vers la conception de la fonction comme loi de variation.

Par ailleurs, il est étonnant que l'étude d'une propriété de fonction, celle d'injection, soit logée à la même enseigne que l'étude de cas particuliers d'une même classe de fonctions. Certes, cette propriété doit être enseignée dans la mesure où la fonction réciproque est au programme de ce premier chapitre, mais nous tenterons d'éclaircir la raison de sa mise en place précisément dans cette deuxième section dans la suite de l'analyse de ce premier chapitre.

D'un point de vue didactique enfin, le sentiment d'une réduction au strict minimum de l'environnement technologique et technique en relation avec les nouvelles notions à enseigner se trouve de nouveau confirmé par l'étude de cette nouvelle section.

2.1.3.2 Les exercices/ activités (total de 8 exercices/activités)

Analyse par cadres et registres utilisés

6 exercices/activités sur 8 sont donnés dans le registre algébrique et 2 dans le registre du langage naturel. Les exercices/activités du langage naturel supposent une conversion vers les registres algébrique ou graphique. 3 conversions de registres impliquées dans des tâches de représentation graphique sont également demandées. Cette section ne permet pas non plus la création d'un cadre fonctionnel.

Analyse par tâches et techniques

(voir tableau des tâches et techniques de la section 4 du chapitre 1 du manuel de 10ème en annexe du chapitre IV)

Les tâches que l'on retrouve dans ce type d'exercices sont les tâches de :

- Discrimination relation/fonction (3 exercices),
-Discrimination fonction/injection (5 exercices),
-Reconnaissance de fonction (1 exercice),
-Représentation graphique (3 exercices),
-Antécédent (1 exercice).

Ces tâches se présentent en tant que tâche unique dans la majorité des exercices. Les autres ne demandent pas plus de deux tâches, la première étant souvent une aide à la réalisation de la seconde.

La tâche de discrimination fonction/injection

Cette tâche, en tant qu'un des objectifs principaux de la section, apparaît comme la tâche principale de cette série d'exercices. Elle peut être associée à une autre tâche dans un même exercice. Il s'agit alors de la tâche de *discrimination relation/fonction* et surtout de celle de *représentation graphique* et d'*antécédent*. Ces deux dernières, quand elles apparaissent, sont toujours suivies de la tâche de discrimination fonction/injection et indiquent donc implicitement la technique à utiliser pour sa résolution.

En effet, si les fonctions ou relations ne sont pas directement données dans le registre graphique (un seul exercice a pour registre de départ le registre graphique et permet au passage le renouvellement de la tâche *discrimination relation/fonction* dans ce registre), cette tâche suppose en général que la fonction soit, dans un premier temps à représenter graphiquement. La tâche de *représentation graphique* est alors toujours explicitement demandée : c'est le cas des 3 exercices où cette tâche est à réaliser. Le fait qu'elle soit explicitement demandée signifie bien sur que les auteurs veulent imposer la technique graphique du test de la droite horizontale, mais aussi peut-être que la représentation graphique ne fait pas partie des réflexes des élèves. Les fonctions concernées sont pourtant des fonctions que les élèves savent représenter graphiquement, soit les fonctions affines, constantes ou du second degré (que l'on sait représenter depuis la classe de troisième).

Enfin, il faut souligner l'unique exercice/activité où la résolution de cette tâche est demandée par une autre technique, en l'occurrence la technique algébrique, qui n'apparaît pas en cours et permet de rendre problématique la tâche de discrimination fonction/injection. Elle apparaît justement dans un exercice classé "activité d'approfondissement" :

"Si $f(x) = x^2 + 1$, Détermine x pour que $f(x) = 5$; cette fonction est-elle injective ?" (activité d'approfondissement n°8).

Soulignons au passage que la référence à la notion d'antécédent est implicite puisqu'il n'y a pas d'utilisation de ce terme et remarquons que les solutions de cette tâche sont encore une fois entières.

Bien que les élèves sachent représenter une fonction du second degré, les auteurs visent ici l'utilisation de la technique algébrique qui consiste alors à déterminer les antécédents d'une valeur de x correctement choisie. La technique est implicitement présentée dans l'énoncé sous la forme d'une équation à résoudre. La difficulté tient probablement à l'exécution de la technique algébrique non institutionnalisée en cours, soit à l'interprétation des solutions de l'équation comme deux réels ayant la même image par la fonction en question, et non à la tâche en elle-même. Cette activité est à comparer à l'activité proposée dans la section précédente pour la discrimination relation/fonction : la technique algébrique y est également à la charge de l'élève aussi une tâche d'aide implicite est toujours prévue au préalable, par ailleurs seul le cas le plus simple de non vérification de la propriété (fonction ou fonction injective) est proposée. Le registre algébrique est donc utilisé, ici, dans un but de complexification mais les exigences du point de vue de la technicité requise restent modestes.

La tâche de reconnaissance de fonction

Elle n'est pas véritablement significative dans cette section où, pour l'heure seule une seule classe de fonction est identifiée. Aussi n'est-elle demandée qu'une seule fois.

La tâche de discrimination relation /fonction

Cette tâche est demandée en référence aux fonctions constantes et à leur représentation graphique caractéristique. D'où deux exercices "l'axe des x est-il une fonction ?" "l'axe des y en est-il une autre ?". Le langage naturel permet de rendre quelque peu plus complexe ces tâches puisque la technique de résolution suppose une conversion dans les registres algébriques ou graphique au choix de l'élève. Plus généralement, ces exercices/activités permettent de mieux asseoir la classe des fonctions représentées par des droites.

L'analyse des exercices/activités nous laissent supposer que le choix fait d'enseigner la propriété d'injection précisément dans cette section est à chercher sur le plan de l'équilibre écologique, dans le but de satisfaire à la topogénèse : La notion d'injection apparaît comme la principale de la section, voire la seule, qui permet de varier quelque peu les exercices/activités à proposer aux élèves. Elle révèle également, pourquoi, la propriété d'injection ne peut être établie dans le cours, relativement aux cas général des fonctions affines, constantes et du second degré. Il n'y aurait plus d'exercices à proposer aux élèves ! La limitation du cadre théorique semble être ici plus qu'un choix, une *obligation !*

2.1.4 Description, commentaire et analyse des sections "fonction valeur absolue" et "fonction partie entière"

Nous avons choisi de regrouper l'analyse de ces deux sections qui présentent de grandes similitudes sur de nombreux points.

2.1.4.1 Le cours

Les objets d'enseignement : "fonction valeur absolue" et "fonction partie entière"

La fonction valeur absolue est définie par son expression algébrique sur la base de la définition de la valeur absolue d'un réel relevant du cadre numérique, et supposée connue depuis la classe de 9ème. Après réécriture de la fonction valeur absolue sans le symbole valeur absolue, une représentation graphique en est donnée sans plus de commentaires. Le manuel de l'élève précise le domaine et le but de la fonction à partir de la représentation graphique, et fait remarquer que la fonction n'est pas injective.

La fonction partie entière introduite à l'aide d'une analogie et d'un tableau de valeurs est ensuite institutionnalisée dans le manuel de l'élève par sa définition algébrique : "La fonction f(x), qui fait correspondre à tout réel x, le plus grand entier inférieur ou égal à x, est appelée la fonction partie entière et est symbolisée par f(x) = [x]. De façon générale si n $\leq$ x < n+1, avec n entier naturel, alors f(x) = n". La fonction est ensuite réécrite sans le symbole partie entière, puis représentée graphiquement. Les domaine et but sont également précisés.

Les deux sections se poursuivent par des exemples résolus de représentation graphique de fonctions de type ax + b (resp. de type [ax+b]), et de résolution des équations et inéquations leur correspondant.

Nous constatons que la réécriture algébrique constitue la base de l'enseignement relatif aux fonctions valeur absolue de type f(x) = ax + b et aux fonctions avec partie entière (de type [ax+b]). *Cette réécriture doit en effet permettre, d'une part, de représenter graphiquement ces fonctions mais aussi de rendre possible les résolutions d'équations et d'inéquations correspondantes qui apparaissent comme deux tâches caractéristiques de l'étude de fonctions, ou du moins de ces deux cas de fonctions, en classe de 10ème.* Cependant, si la réécriture algébrique des deux fonctions valeur absolue et partie entière est effectivement institutionnalisée dans cette section, elle ne l'est pas pour le cas plus général des fonctions de type f(x) = ax + b et celles de type [ax+b]. Il semble donc que les élèves auront à charge de déduire cette technique de réécriture algébrique à partir des exemples résolus dans le cours pour des cas particuliers de fonctions. *L'enseignement est donc construit sur une base ostensive.*

Revenons sur les objets d'enseignement que représentent les représentations graphiques de ces fonctions et les équations /inéquations correspondantes :

1. Le tracé de ces fonctions est présenté sans justifications dans le manuel de l'élève. Mais il ne va pas de soi, et c'est au professeur d'éclaircir les méthodes permettant de les obtenir. Ceci est particulièrement vrai pour le cas des fonctions avec valeur absolue puisque le manuel du professeur conseille "de déduire la courbe de toute fonction de type f(x) = ax + b à partir de celle de la fonction affine correspondante en traçant le symétrique relativement à l'axe (Ox) de la partie de la droite située en dessous-de cet axe". Ainsi, cette technique de représentation graphique d'une fonction de type f(x) = ax + b est une traduction géométrique de considérations numériques relatives à la notions de valeur absolue (la valeur absolue d'un nombre négatif est l'opposé de ce nombre). Elle est certes intéressante car elle convient pour toutes les fonctions de type valeur absolue (de type f(x)) : prendre le symétrique par rapport à Ox des parties négatives de la fonction ; elle est plutôt naturelle relativement au sens de la notion de valeur absolue. Elle a de plus l'avantage, nous semble t-il, de faire intervenir un nouveau cadre (le cadre géométrique) dans l'étude de fonctions, dans un enseignement qui souffre peut-être d'une réduction dans la diversité des cadres sollicités.

Mais si la technique est institutionnalisée, les raisons pour lesquelles cette technique marche, qui relèvent de justifications d'ordre technologique, ne sont pas apportées dans aucun des deux manuels. A aucun moment, il n'est précisé que le symétrique de la droite y = x est justement la droite y = -x (plus généralement que le symétrique de la droite y = ax+b est justement la droite y = -(ax+b). Or ces explications nous semblent primordiales car ce sont elles qui permettent de faire un lien explicite entre, d'une part, la représentation graphique de la fonction valeur absolue (demi-droite y = ax + b et demi-droite y = -(ax + b)), et d'autre part, la réécriture de l'expression algébrique de la fonction sans valeur absolue et la résolution des équations/inéquations. *Il est possible que le professeur prenne en charge de donner ces explications, néanmoins cela nous semble confirmer du côté des manuels, la tendance (que nous avons déjà relevée avec, par exemple, les tests de la droite verticale et horizontale) à insister sur l'aspect technique au détriment de l'aspect conceptuel qui relève davantage du niveau technologique.*

2. Aucune résolution d'équations/inéquations correspondant à ces deux types de fonctions n'est présentée dans le registre graphique. Par ailleurs, les équations/inéquations ne sont même pas mentionnées parmi les objectifs des sections respectives. Le manuel du professeur n'en souligne que deux : "connaître les fonctions avec valeur absolue (resp. de type plus grand entier) et établir leur représentation graphique". *Dans cet esprit, l'étude de fonction et la résolution des équations/inéquations correspondantes se trouvent alors confondues dans un cadre algébrique, aussi le concept de fonction ne peut intervenir à ce niveau en tant qu'outil de résolution.*

2.1.4.2 Analyse par tâches et techniques des exercices/activités des deux sections

(voir tableau des tâches et techniques des sections 5 et 6 du chapitre 1 du manuel de 10ème en annexe du chapitre IV)

Les tâches que l'on retrouve dans ce type d'exercices sont les tâches de :

Section "fonction Valeur absolue" (10 exercices/activités)	et Section "fonction plus grand entier" (10 exercices/activités)
-Image (2 exercices/activités);	et (1 exercice/activité)
-Représentation graphique (6 exercices/activités)	et (5 exercices/activités),
-Equations/inéquations (4 exercices/activités)	et (5 exercices/activités),
-Discrimination fonction/injection (2 exercices/activités);	
-Expression fonctionnelle (1 exercice/activité);	
-Image de fonction par transformation (3 exercices/activités).	

La tâche d'image

Cette tâche, à déterminer toujours par la technique de substitution dans l'expression algébrique, est une tâche qui revient souvent, nous l'avons vu dans les sections précédentes notamment avec les fonctions affines par morceaux. Elle relève du cadre numérique, et vise probablement la familiarisation avec les différentes fonctions du programme. Nous avions souligné dans notre chapitre I qu'elle faisait partie des tâches favorisant plutôt une appréhension de la fonction en tant que processus. La tâche d'image n'implique que des valeurs entières sauf quand elle est relative à la fonction partie entière. Mais il est vrai que dans ce cas de fonction, cette tâche n'est véritablement significative que pour des valeurs non entières, de plus elle apparaît alors en activité d'approfondissement.

La tâche de discrimination fonction/injection

Elle est demandée deux fois et dans le seul cas d'une fonction de type valeur absolue, la technique graphique est exigée dans l'un des deux exercices ; dans le deuxième, la représentation graphique n'étant pas demandée, il n'est pas exclu que l'élève donne une justification numérique. Il nous semble étonnant que cette tâche soit demandée puisqu'il a été institutionnalisée en cours que la fonction valeur absolue n'était pas injective et que ceci devrait facilement pouvoir être généralisée à la sous-classe de fonctions f(x) = ax + b . Comme nous l'avons remarqué déjà dans les exercices/activités de la section précédente, cette tâche semble permettre entre autres de diversifier celles susceptibles d'être proposées relativement à l'étude de fonctions.

La représentation graphique

Cette tâche est demandée dans des exercices où elle constitue la tâche principale. Cependant cette représentation graphique n'est exploitée pour la résolution d'aucune autre tâche. En général, la réécriture de l'expression algébrique est demandée en tâche préalable, or la technique de représentation graphique institutionnalisée dans le cours ne nécessite pas cette réécriture. Dans le cas des fonctions avec valeur absolue, celle-ci vise peut-être alors le but de permettre à l'élève d'établir le lien entre la représentation graphique et l'expression algébrique de la fonction sans symbole valeur absolue, dans la mesure où ce lien n'est pas souligné de façon explicite dans les manuels.

La tâche de recherche de l'image d'une fonction par transformation

La fonction valeur absolue semble donner l'occasion de proposer de telles tâches : il s'agit de *techniques géométriques* manipulant globalement l'objet fonction, par le biais du registre graphique, puisqu'elles permettent d'obtenir la courbe d'une fonction à partir de celle d'une autre fonction (par opposition à la représentation graphique du cours où une même fonction est convertie du registre algébrique au registre graphique). Ainsi en est-il de l'activité n°10 de la section valeur absolue et l'activité n°8 de la section partie entière (voir le tableau des tâches/techniques) pour lesquelles il est laissé à la charge de l'élève de réinvestir à d'autres fonctions, en l'occurrence une fonction du second degré et la fonction "plus grand entier", la technique de représentation graphique d'une fonction de type f(x) = ax + b, en tant que technique basée sur la représentation graphique de la fonction sans valeur absolue correspondante et sur des considérations numériques liées au sens de la valeur absolue. Une autre activité demande une troisième technique de représentation graphique de fonction. Il s'agit d'une tâche implicite de transformation (voir activité 9 de la section valeur absolue, tableau des tâches et techniques), puisqu'il y est demandé de "*déduire la représentation graphique de la fonction f(x)= x-2 +1 de celle de f(x)= x-2* ". Or les transformations géométriques ne sont pas au programme des lycées palestiniens.

Quelques points sont à retenir de ces tâches relevant du cadre géométrique :

- La fonction y est manipulée selon son statut objet puisque manipulée globalement.
- Le recours au cadre géométrique y est implicite, ce cadre n'est pas véritablement mathématisé ; il s'agit davantage de se familiariser avec ce type de tâches qui ne se présente pas alors comme un véritable objectif d'apprentissage.
- Ce type de tâches permet de varier en les complexifiant les tâches susceptibles d'être proposées dans l'étude de fonction. La difficulté relative de ces tâches vient en partie du fait que la technique de résolution impliquée n'a pas été institutionnalisée au préalable alors que l'enseignement palestinien, d'après l'analyse menée jusqu'à maintenant, ne semble laisser que peu de marge de découverte aux élèves.

Nous serons sensible dans la suite de notre analyse à mettre en évidence d'une part la place du cadre géométrique, qui fait une première apparition, avec l'étude de la fonction valeur absolue, dans le programme de seconde palestinienne ainsi que les autres tâches présentant des points communs avec ceux soulignés ci-dessus.

La tâche de résolution d'équation/inéquation

Elle est demandée sous la forme d'une tâche isolée. La technique de réécriture algébrique attendue par contrat n'est pas explicitement demandée, mais elle a été exposée dans le cours à travers des exercices résolus. Aucun exercice/activité ne propose de résolution graphique d'équations.

La tâche d'expression fonctionnelle

Cette tâche n'apparaît qu'une seule fois, elle n'est donc pas significative et est d'ailleurs classée "au-dessus du niveau". Elle se présente sous forme isolée dans un exercice, comme souvent dans ce chapitre. Il s'agit d'une tâche de détermination de l'expression algébrique de la fonction à partir de la donnée de certaines de ses propriétés dans le registre verbal/symbolique. D'après notre classification du chapitre II, cette tâche consiste du point de vue technique en une conversion du registre verbal/symbolique vers le registre algébrique. Nous avons précisé, dans le chapitre II, qu'un deuxième registre de départ pouvait être donné aux côtés du registre verbal/symbolique, c'est ici le cas avec le registre graphique : "*Le graphe ci-contre représente la fonction. Détermine alors la valeurs des constante a et b. [la représentation graphique de la fonction qui est une fonction avec valeur absolue est donnée. 3 points sont précisés sur le graphique]* "

La résolution de cette tâche d'expression fonctionnelle se ramène donc, dans ce cas précis, à évaluer les paramètres de la fonction à l'aide des informations données afin d'en déterminer l'équation. Les propriétés ne concernent que les notions d'image et d'antécédent qui sont utilisées selon leur statut outil dans la résolution de l'exercice. Il nous semble que les tâches de ce type basées sur la conversion de données fonctionnelles du registre verbal/symbolique, et éventuellement d'un deuxième registre, vers le registre algébrique visent à renouveler le cadre algébrique. Elles ont avec les tâches relevant du cadre géométrique, pour point commun, celui d'être utilisées pour varier et complexifier les tâches d'étude de fonction.

Les tâches relatives aux fonctions avec valeur absolue sont plus variées que celles relatives aux fonctions avec partie entière. Ces dernières, ainsi que leurs techniques associées, se limitent quasiment à celles montrées ou institutionnalisées dans le cours. Par delà le fait que cette situation pourrait s'expliquer par les difficultés supplémentaires que posent les fonctions avec partie entière relativement aux fonctions avec valeur absolue, la présentation des fonctions avec partie entière nous semble davantage en conformité avec la philosophie générale de l'enseignement qui nous est apparue se dégager jusque-là. Les tâches/techniques différentes proposées dans la section valeur absolue risquent de ne pas respecter l'équilibre écologique général installé jusque-là, et pourraient donc de ne pas être réellement prises en compte par les professeurs. Ce sentiment se trouve conforté par le fait que les exercices apparaissant dans la section "Révision" ne proposent comme tâches que celles apparaissant dans la section "Fonction partie entière", soit des tâches dont les techniques reposent essentiellement sur le registre algébrique et ont été institutionnalisées en cours. Il revient certainement au professeur de juger de la pertinence de ces tâches et de ne les proposer aux élèves qu'en fonction de leur niveau.

Il ressort de l'analyse de ces deux sections que l'étude de fonctions particulières vise deux objectifs principaux : la représentation graphique des fonctions du programme et la résolution des équations et inéquations correspondantes. Les techniques de représentations graphiques reposent entièrement, ou en partie (dans le cas de la valeur absolue) sur une conversion algébrique/graphique et ne se basent pas sur la connaissance des variations de la fonction comme en classe de 2nde française. Mais d'une part, la notion de variation n'est pas encore connue, et d'autres part, la représentation graphique des fonctions étudiées ne nécessite pas la connaissance de leurs variations puisqu'il s'agit de fonctions affines par intervalles. Parallèlement, les résolutions d'équations/inéquations font partie intégrante de l'étude de fonctions. Il n'y a pas de véritable distinction entre une fonction en tant qu'objet d'enseignement et l'équation/inéquation correspondante en tant qu'objet d'enseignement différent. La résolution d'équation/inéquation n'est pas utilisée comme moyen d'utiliser la fonction selon son statut outil. Dans ce contexte, la distinction entre les notions d'inconnue et de variable n'est pas sensible. Les fonctions ne sont alors pas manipulées selon leur mode d'appréhension loi de variation. Les fonctions affines ne sont pas utilisées comme en seconde française pour formaliser le concept de variation. Cette présentation générale s'accorde avec une inscription de l'étude de fonction dans un cadre algébrique, le cadre numérique étant exploité dans une première phase de familiarisation. Le cadre géométrique fait une apparition timide mais il n'est exploité que de façon implicite. Nous vérifierons dans la suite de l'analyse de ce chapitre et des manuels de seconde, si ces premières conclusions se confirment.

Avec les trois sections suivantes "Opérations sur les fonctions"', "Composition de fonctions" et "Réciproque de fonction", une nouvelle phase de l'étude de fonctions est abordée. Les fonctions particulières étudiées se limitent pour l'instant aux cas particuliers de fonctions affines et à certains exemples de fonctions affines par intervalles, et s'ajoutent aux fonctions du second degré étudiées dans la classe précédente ; les élèves auront maintenant à construire de nouvelles fonctions à partir de celles connues. Ces trois sections, et surtout les deux dernières présentent de grandes similitudes. Bien qu'il soit à plusieurs reprises souligné que ces diverses opérations permettent d'obtenir de nouvelles fonctions, la question qui se pose est de savoir si les élèves en auront vraiment conscience. La présentation de ces différentes opérations va-t-elle aider à mieux assimiler le concept de fonction ? La fonction pourra t-elle être conçue comme un objet à part entière ?

2.1.5 Description, commentaire et analyse de le section : "Opérations sur les fonctions"

2.1.5.1 Le cours

L'objet d'enseignement : opérations sur les fonctions

Cette section traite des quatre opérations algébriques sur les fonctions et de la détermination des domaines de définition des fonctions résultant de ces opérations. La première définition est celle de l'addition : "Nous définissons la somme de deux fonctions f et g comme étant la fonction f+g qui a tout élément de son ensemble de définition donne pour image celle égale à la somme des images de x par les fonctions f et g ; soit que (f+g) (x) = f(x) + g(x)".
De façon similaire, sont définies la soustraction et la multiplication de deux fonctions.
Il est ensuite précisé que les fonctions g, f+g , f-g , f.g ont toutes le même domaine de définition qui est l'intersection des domaines de définition de f et de g. La définition de la division de deux fonctions succède à ces premières définitions avec précision du domaine de définition de la fonction résultante : "le domaine de définition de f/g est (Df $\cap$ Dg) - {x t.q g(x) = 0}".
Les opérations algébriques sur les fonctions sont présentées dans un cadre directement formel puisque la présentation de chaque opération commence par la définition correspondante. Les exercices résolus apparaissent comme des applications des différentes définitions. Ils relèvent essentiellement du calcul littéral ("déterminer l'expression de (f+g) (x), l'expression algébrique de f(x) et g(x) étant connue" (de même pour les autres opérations).

Soulignons cependant, en premier exercice résolu, et uniquement dans le cas de l'addition, en tant que première opération de fonction enseignée, un appui sur le cadre numérique puisqu'il est demandé de déterminer "(f+g) (2) puis (f+g) (-1)" avant de réaliser le calcul de l'expression algébrique de la fonction somme. Le passage par le cadre numérique, sous la forme de la détermination de l'image d'une valeur particulière, par la fonction résultant de la somme de deux autres fonctions somme, est bien considérée comme une étape intermédiaire visant à faciliter l'assimilation de la notion de somme de fonction. Cependant les auteurs ne pensent pas nécessaire de prolonger davantage la phase de familiarisation dans le cas des opérations algébriques. Après cette phase réduite de familiarisation, l'enseignement des opérations sur les fonctions se situe sur deux axes : les calculs algébriques sur les expressions de fonctions, et la détermination du domaine de définition de la fonction résultante. Les calculs algébriques sont proches des calculs algébriques auxquels sont habitués les élèves depuis les classes de 8ème et 9ème, et ce d'autant plus que le manuel du professeur propose en activité de révision justement des calculs littéraux. Seules, la détermination systématique du domaine de définition est susceptible de rappeler à l'élève qu'il manipule maintenant un nouvel objet, la fonction. Si cette présentation ne favorise pas a priori l'appréhension de la fonction en tant qu'objet, les travaux numériques pourraient se révéler influer positivement sur l'acquisition de la notion de variable : les élèves constatant par la substitution de nombres dans les expressions littérales de fonctions qu'ils opèrent des changement de variables et qu'ils obtiennent des images différentes à chaque calcul. Cependant, peu d'espace est réservé, nous l'avons souligné, au cadre numérique dans le cours qui se restreint alors aux cadre et registre algébriques

2.1.5.2 Les exercices/activités (9 exercices/activités)

Analyse par cadres et registres utilisés

Tous les exercices/activités sont donnés dans le registre algébrique à l'exception d'un seul qui relève du cadre numérique. Le registre graphique est totalement absent de cette série d'exercices/activités.

Les conversions de registres sont rares, seuls les exercices/activités réclamant une tâche d'expression fonctionnelle nécessitent la conversion du registre verbal/symbolique au registre algébrique.

Analyse par tâches et techniques

(voir tableau des tâches et techniques de la section 7 du chapitre 1 du manuel de 10ème en annexe du chapitre IV)

Les tâches que l'on retrouve dans les exercices/activités de cette section sont les celles de :

-Image (1 exercice/activité), -Opérations algébriques (4 exercices/activités), -Domaine de définition (6 exercices/activités), -Expression fonctionnelle (2 exercices/activités)

Ces tâches se présentent en général en tâche isolée. Aucun exercice ne demande plus de deux tâches de façon explicite.

La tâche d'image

Elle consiste à déterminer l'image d'une valeur particulière par une fonction résultant de la somme de deux autres. Précisons que seule est connue l'image de cette valeur par chacune des deux fonctions de départ. Il s'agit là, d'un exercice relevant entièrement du cadre numérique et qu'il faut voir comme visant à la familiarisation avec la notion d'addition de fonction.

Les tâches d'opérations algébriques

Elles sont toujours demandées dans le registre algébrique. Les élèves sont supposés être capables de calculer les expressions algébriques donnant les fonctions résultantes. Au niveau technique, cette tâche ne pose pas de difficulté supplémentaire relativement au calcul algébrique auquel, ils sont habitués depuis les classes précédentes. Elles sont cependant systématiquement suivies de la *tâche de domaine de définition*, y compris pour des fonctions polynômes définies sur R, pour lesquelles on sait d'avance que le domaine de définition de la fonction résultante (dans le cas d'addition, de soustraction ou de multiplication) restera R. La succession des tâches d'*opérations* et de *domaine de définition* se retrouve dans les exercices de la section "Révision".

La tâche de recherche de domaine de définition

Cette tâche apparaît, nous l'avons vu, dans tous les exercices où elle succède à une tâche d'opération mais aussi dans 2 exercices/activités, en tant que tâche unique. Ce qui montre que le travail de cette notion est un objectif important de cette section. La présence si fréquente de cette tâche s'explique par la logique de l'organisation de cet enseignement autour de la définition formelle : une fonction n'est définie que si les ensembles de départ, d'arrivée ainsi que la relation sont connus.

La tâche de recherche d'une expression fonctionnelle

Nous avons déjà relevée une telle tâche dans la section "Fonction valeur absolue". Voici en exemple, l'exercice 5 du manuel de l'élève :

"*si* $f(x) = 5\ x^2 + a\ x$ *et, si* $g(1) = 3$ *et* $(f \times g)\ (1\ ) = 12$ *; détermine la valeur de la constante a*" (exercice 5, tableau des tâches et techniques, section "Opérations de fonctions").

Ici, les conditions à vérifier afin de déterminer les paramètres de l'expression algébrique de la fonction à établir concernent justement soit le domaine de définition (établir le domaine de définition de la fonction en est donc une tâche implicite), soit les images de valeurs particulières par la fonction de départ ou par une fonction résultant d'une opération faisant intervenir la fonction de départ (le calcul d'image en est donc une tâche implicite).

Comme nous l'avions souligné, dans la section "Fonction valeur absolue", ces exercices/activités ayant pour tâche principale explicite celle d'expression fonctionnelle ont pour but de renouveler les exercices du cadre algébrique en proposant des tâches plus problématiques.

2.1.6 Description, commentaire et analyse des sections "Composition de fonctions" et "La fonction réciproque"

Nous traiterons simultanément l'analyse du cours de ces deux sections qui présentent de grandes similitudes tant au niveau de leur présentation générale que par le fait que le concept de réciproque repose, en partie, sur le concept de composition. Une traduction intégrale de la section "La fonction réciproque" est proposée en annexe de façon à nous permettre de limiter leur description. L'analyse des exercices/activités distingue cependant chacune de ces deux sections.

2.1.6.1 Le cours

Les objets d'enseignement : "Composition de fonctions" et "Réciproque de fonction"

Ces sections s'appuient sur le cadre numérique grâce au recours à des exemples de fonctions définies sur des ensembles finis pour introduire les nouveaux objets d'enseignements respectifs (composition et réciproque). Les exemples d'introduction relevant de ce cadre sont en effet relativement nombreux et amplement détaillés. Ils nous montrent que le recours au cas fini, et aux registres de représentation qui lui sont liés, est loin d'être exclu dans l'étude de fonctions. Leur rareté dans la section "Opération sur les fonctions" s'expliquerait alors par la difficulté intrinsèque des opérations de composition et de réciprocité relativement aux quatre opérations algébriques, ce qui rend nécessaire un premier passage par le cadre numérique. Par ailleurs, le recours au cas fini permet l'utilisation de registres relevant du cadre numérique non significatifs pour des fonctions définies sur des ensembles infinis, comme les registres de diagramme sagittal, d'ensemble de couples ordonnés et le registre symbolique (une liste de "f(a) = b") et qui servent à illustrer les notions à installer (voir en annexe la traduction de la section "Réciproque de fonction" du manuel de l'élève jusqu'à l'exemple 1).

L'institutionnalisation des notions se fait cependant dans le registre algébrique. Le passage du cas fini/cadre numérique pour la familiarisation avec les notions, au cas infini/cadre algébrique où elles sont institutionnalisées est conçu par une succession d'exemples résolus donc de façon ostensive.

Ici, il nous faut considérer tout particulièrement la section "La fonction réciproque" dans laquelle la définition donnée ne fait pas de lien explicite entre la réciproque d'une fonction et l'inversion des couples antécédent, image de cette fonction. Certes, cette inversion est soulignée dans les premiers exemples utilisés dans le cours pour illustrer la notion de réciproque : "tu remarques que chaque couple ordonné de g a été obtenu par l'inversion des premier et second termes du couple correspondant de f. La fonction g est appelée fonction réciproque de f (voir le début de la traduction de cette section du manuel de l'élève en annexe du chapitre). Elle constitue même la base de la technique utilisée pour obtenir la réciproque d'une fonction dans les registres relevant du cas fini. Cependant, le seul résultat institutionnalisé dans cette section n'y fait pas de référence explicite : *"si $f(x)$ est une fonction injective et f^1 (x) est sa réciproque alors "$(fo\, f^1)$ $(x) = x$ et $(f^1of)(x) = x$. La fonction résultant de la composition d'une fonction et de sa réciproque est la fonction identité $g(x) = x$".*

Or, ce théorème définit la fonction réciproque et constitue la technologie qui justifie la technique que les élèves auront à utiliser pour déterminer l'expression algébrique de la réciproque d'une fonction donnée. Ainsi, l'exemple résolu 2 :

"(...) $f(x) = 2x + 1$, Détermines $f^1(x)$.

Solution : (..)

(fof^1) $(x) = x$ donc $f(f^1(x)) = x$

On pose $f(m) = x$ avec $2m + 1 = x$ soit que $m = f^1(x)$

$2m = x - 1$

$m = (x-1) / 2$ donc $f^1(x) = (x-1) / 2$" (voir traduction de la section en annexe du chapitre IV).

Le manuel du professeur ne demande pas non plus pas d'insister sur le lien entre la définition de la réciproque que propose ce théorème et l'idée de l'inversion du couple (antécédent, image), ce lien est peut-être considéré comme suffisamment intuitif pour être laissé à la charge de l'élève.

Certes, le théorème institutionnalisé témoigne du souci de créer un équilibre écologique entre tous les objets d'enseignements présentés dans ce chapitre. Avec ce théorème, les quatre notions de réciprocité, de composition, de fonction injective et de fonction identité se trouvent réunies. Mais il faut remarquer que ce théorème détermine précisément les techniques relatives aux deux types de tâches susceptibles d'être demandées en relation à cette notion : "*déterminer la loi de la réciproque d'une fonction donnée*" mais aussi "*montrer que deux fonctions sont réciproques*", dans le cas d'une fonction donnée dans le registre algébrique. Or, une fois la notion de réciproque introduite, et dès que l'on veut passer au cas infini et à des traitements plus complexes, le registre algébrique supplante tous les autres. *Il nous semble que le choix de cette technologie permettant de mettre en œuvre précisément cette technique plutôt que celle qui consisterait à inverser les variable x et y dans l'expression de la fonction (voir les techniques relatives à la tâche de réciproque dans le chapitre II), montre une fois de plus le soin que prennent les auteurs à cerner au mieux les principales tâches/techniques à proposer, laissant alors peu de marge de manœuvre aux élèves, et surtout peu d'espace de découverte.*

Enfin, pour terminer, faisons une dernière remarque concernant les techniques algébriques de composition de fonctions et de détermination de la réciproque d'une fonction : s'il n'est pas certain qu'elles puissent, dans la pratique, favoriser la conception de la fonction en tant qu'objet à part entière car, comme les techniques d'opérations algébriques, elles se centrent sur la manipulation des expressions algébriques de fonctions, les manipulations de variables et les changements de variables très marqués pourraient favoriser l'assimilation de la notion de variable et aider à distinguer les notions de variable et d'inconnue, ouvrant ainsi une porte à la création d'un cadre fonctionnel.

2.1.6.2 Les exercices/activités

Analyse des deux sections par cadres et registres utilisés

Les exercices/activités de ces deux sections relèvent essentiellement des cadres numérique et algébrique. Le registre graphique est très marginalisé et n'est sollicité que dans les tâches de représentation graphique de fonction. Les conversions de registres sont rares, seuls les exercices/activités de complexification permettant le renouvellement du cadre algébrique nécessitent la conversion du registre verbal/symbolique au registre algébrique.

Analyse par tâches et techniques des exercices/activités de la section "Composition de fonctions" (11 exercices/activités)

(voir tableau des tâches et techniques de la section 8 du chapitre 1 du manuel de 10ème en annexe du chapitre IV)

Les tâches que l'on retrouve dans les exercices/activités de cette section sont les tâches de :

- Image (3 exercice/activité),
- Composition (6 exercices/activités),
- Représentation graphique (2 exercices/activités),
- Antécédent implicite (1 exercice/activité).

Ces tâches se présentent en général en tâche isolée. Aucun exercice ne demande de façon explicite plus de deux tâches.

La tâche d'image

Cette tâche, comme pour les tâches équivalentes dans la section "opérations sur les fonctions", est une tâche qui relève du cadre numérique et vise à familiariser les élèves avec la notion de composition de fonction et ce, que les expressions algébriques des fonctions à composer soit données ou non. Ceci est confirmé par des tâches équivalentes proposées en exercice résolu dans le manuel de l'élève comme celui-ci : *"Si $f(x) = 3x - 1$ et $g(x) = (x+1)/3$; détermine $(f \circ g)(2)$"*; où la technique de résolution consiste à substituer directement 2 à x dans l'expression de g(x), l'expression algébrique de la composée n'étant pas à établir. *Le contrat veut donc que les élèves fonctionnent dans le cadre numérique pour les tâches de ce type.* Il faut préciser que 2 fois sur 4 cette tâche est demandée pour des expressions de fonctions plus complexes (fonctions avec racine cubique, rationnelle, avec valeur absolue, etc.).

Remarquons rapidement que pour les notions de composition et de réciproque également les tâches relevant du cadre numérique font uniquement appel à de petits entiers : 5; 4; 3; 2; 0; -1; etc.

La tâche de composition

Elle est demandée 4 fois. La technique attendue est par contrat la technique algébrique, et les fonctions choisies sont toujours des fonctions affines. Elle remplace en quelque sorte la tâche d'image dans le cas d'expression algébrique de fonctions plus simples. Il semble donc que l'un des objectifs de cette section soit la maîtrise de l'opération algébrique de composition dans le cas précis de fonctions affines. Ce qui laisse à penser qu'il n'est pas souhaitable que les élèves, pour ces exercices, passent dans un premier temps par une technique numérique. D'un autre côté, nous remarquons que cette tâche apparaît 3 fois sur 4 toujours couplée à une autre, elles correspondent alors à des exercices/activités de deux tâches. 2 fois sur 3, la tâche demandée et qui succède à la *tâche de composition* est une tâche de *représentation graphique*. Cette tâche est rendue possible par le fait que la composée de deux fonctions affines est une fonction affine que les élèves savent réaliser. La représentation graphique semble être la tâche supplémentaire qui remplace pour la composition, la *tâche de domaine de définition* pour les opérations sur les fonctions. Un des objectifs implicites pourrait être également d'insister sur le fait que la composée de deux fonctions affines est également affine. Constatons que ce résultat n'est pas à établir dans le cas général.

Le quatrième exercice, demandant cette tâche de composition, vise à montrer que la *fonction identité est l'élément neutre pour la composition*, et ce après la détermination de la composée d'une fonction du second degré et de la fonction identité. Cet exercice/activité est proposé en activité "d'approfondissement", et la conclusion à tirer est un résultat technologique relevant d'une théorie générale sur le concept de fonction où la fonction identité est à concevoir en tant qu'objet. Ce résultat est à rapprocher d'une remarque du cours soulignant que *la loi de composition n'est pas une loi commutative*. Ce type de conclusion contraste, à notre avis, avec le refus des auteurs d'établir des conclusions générales relevant de la seule classe des fonctions affines comme par exemple "la composée de deux fonctions affines est une fonction affine", constatation que nous avions déjà relevée, également à propos des fonctions affines, dans la section "opérations algébriques". Cela pose, nous semble-t-il, le problème des objectifs d'apprentissage qui ne semblent pas clairement délimités par les concepteurs de ces manuels, quoiqu'il nous faille souligner que le poids à donner à cette unique activité de la section composition revient au professeur.

Tâches de composition plus complexes

Il s'agit de deux exercices/activités *qui sont ou se ramènent à des tâches de composition d'un niveau de difficulté supérieure*. Les auteurs l'ont bien compris puisque l'une est proposée en activité d'approfondissement et l'autre est un exercice du manuel de l'élève classé "au-dessus du niveau". La première consiste à déterminer fog (x^2), les expressions algébriques de f et g étant connues (voir exercice 7, tableau des tâches et techniques du chapitre), la deuxième consiste au contraire à déterminer f(x) à partir de l'expression algébrique de f(x^2) (voir activité 11, tableau des tâches et techniques). Ainsi, la première activité est une tâche de composition de trois fonctions, la troisième fonction étant implicitement donnée, alors que la deuxième est davantage une tâche de décomposition. La technique qui consiste dans les deux cas, entre autres, à considérer x^2 comme variable au lieu de x, montrera que la notion de variable est bien assimilée par les élèves qui réussiront à les résoudre correctement. Malgré la difficulté technique qu'ils peuvent présenter pour les élèves, ils sont en conformité avec la présentation générale de la notion de composition dans cette section. *Ici, l'on peut constater tout de suite l'aspect que peuvent prendre les exercices de complexification du côté palestinien relativement au côté français. Si du côté français, les tâches proposées peuvent se limiter à des cas relativement simples du point de vue de la technique algébrique de composition, la variété et la complexification de tâches étant par ailleurs assurée grâce notamment à l'exploitation de la* *composition selon son statut outil dans la détermination des variations de fonctions ; du côté palestinien, le fait de viser la composition toujours en tant qu'objet et uniquement dans le registre algébrique fait que la complexification ne peut être conçue que de façon verticale, soit en augmentant la technicité algébrique.*

La tâche d'antécédent implicite

Cette tâche est, comme les tâches d'expression fonctionnelle relevées dans les sections précédentes, une tâche qui permet le renouvellement du cadre algébrique. Ici ce sont les notions de composition et d'antécédent (implicite) qui vont servir à établir l'équation à résoudre.

Analyse par tâches et techniques des exercices/activités de la section "La fonction réciproque " (9 exercices/activités)

(voir tableau des tâches et techniques de la sections 9 du chapitre 1 du manuel de 10ème en annexe du chapitre IV)

Les tâches que l'on retrouve dans les exercices/activités de cette section sont les tâches de :

- Discrimination (fonction/injection) (1 exercice/activité),
- Image (2 exercices/activités),
- Réciproque (6 exercices/activités),
- Représentation graphique (2 exercices/activités).

La tâche d'image.

Elle est demandée deux fois. Dans l'un des deux cas, elle relève du cadre numérique et est demandée en tant que tâche isolée, et comme dans tous les exercices des sections précédentes relevant de ce cadre, elle vise à la familiarisation avec la notion de principale à mettre en place dans la section, soit ici avec la notion de réciproque. Dans le deuxième cas, elle est demandée également en tant que tâche isolée dans une activité supplémentaire, mais sa résolution y suppose l'exécution d'autres tâches qui sont alors implicitement demandées. La tâche d'image prend alors un statut autre que celui de simple tâche de familiarisation à la nouvelle notion, que nous lui connaissons jusque-là. Aussi, nous semble-t-il intéressant de considérer de plus près cette activité :

"*Si $f(x) = 3x +1$, et $g(x) = 3-x$. Détermine f^1 (4) et $g^{-1}(5)$ de deux façons différentes*".

Voici les solutions que propose le manuel du professeur :

La première solution : utiliser $f^1(x)$ et $g^{-1}(x)$.

(la technique utilisée pour déterminer f^1 (x) est celle institutionnalisée en cours pour la détermination de la réciproque d'une fonction).

La deuxième solution : sans utiliser $f^1(x)$ et $g^{-1}(x)$:

$f(x) = 4$ donc $3x+1 = 4$; $x = 1$; f^1 (4) = 1.

De même : g(x) = 5 donc 3-x = 5; x = -2; g^{-1} (5) = -2" (voir activité 7, tableau des tâches et techniques).

Le but de cet exercice, est donc précisément de juxtaposer les deux techniques d'obtention de la réciproque d'une fonction : la première qui consiste à déterminer d'abord l'expression algébrique de la réciproque de la fonction selon la technique institutionnalisée en cours dont nous avons dit qu'elle ne soulignait pas de façon explicite l'opération d'inversion des antécédents / images, et la deuxième justement basée sur cette inversion. Il est donc laissé à la charge de l'élève, comme nous l'avons supposé dans l'analyse du cours, de réinvestir la technique d'inversion des antécédent/image utilisée dans le cas des registres relevant du cadre numérique et des fonctions finies, dans le registre algébrique, et donc d'établir le lien entre la définition de la réciproque institutionnalisée dans le cours et cette idée d'inversion.

La tâche de réciproque

C'est la tâche qui revient majoritairement dans cette série d'exercices/activités puisqu'elle concerne 6 sur 9 exercices/activités. Elle se présente sous la forme d'une tâche isolée. Un effort est fait pour diversifier les registres mais le registre algébrique reste largement majoritaire. Ainsi, la tâche est posée dans le registre des couples ordonnés une fois et dans le registre verbal une fois. Dans le registre des couples ordonnées, elle vise la familiarisation avec la notion de réciproque, dans ce sens la *tâche de discrimination fonction/injection* la précède. Le registre verbal suppose une conversion à la charge de l'élève vers le registre algébrique. Ceci représente bien la seule difficulté de l'exercice car la technicité algébrique requise est réduite.

Il reste 4 exercices/activités où cette tâche est posée dans le registre algébrique. Elle est alors la seule tâche demandée à l'exception d'un cas où la représentation graphique de la fonction obtenue est également demandée. La représentation graphique a ici le même statut que dans la section "Composition". Par ailleurs, l'objectif véritable de cette section semble y être également, au delà de la compréhension de la notion de réciproque posée comme objectif, l'acquisition de la technique algébrique de détermination de la réciproque dans le cas d'une fonction affine. En effet, dans les deux exercices où la fonction donnée n'est pas une fonction affine, la tâche est demandée, dans un cas, sous la forme "*montrer que ces deux fonctions sont réciproques*" afin d'éviter toute technicité algébrique (voir exercice 5, tableau des tâches et techniques) alors que dans l'autre où elle est posée de façon classique, l'exercice est considéré comme au-dessus du niveau des élèves puisque classé activité "d'approfondissement" (voir activité 9, tableau des tâches et techniques).

En relation avec cette insistance mise sur le cas particulier des fonctions affines se situe cette activité "d'approfondissement" n°9 qui consiste à réaliser *la représentation graphique* d'une fonction affine et de sa réciproque et à "*constater qu'elles sont symétriques relativement à la droite y = x*". Il s'agit donc de traduire la notion de réciprocité dans le registre graphique pour un exemple particulier de fonction affine, charge au professeur, éventuellement, de faire remarquer que cette propriété est vérifiée par toute la classe de fonctions affines, et plus généralement, par toutes les fonctions. Le fait de limiter ce résultat à un seul exemple que l'on considère, de plus, comme étant au-dessus du niveau des élèves, *montre bien que la traduction de la réciprocité dans le registre graphique n'est pas un objectif du programme.*

Plus généralement, la tendance à la limitation au seul cas des fonctions affines confirme la constatation observée tout au long des 5 sections analysées jusque-là, d'une réduction du cadre théorique qui se traduit notamment par une tendance à ne pas généraliser les résultats obtenus. Il est vrai que cette position est compréhensible, pour le cas particulier des fonctions réciproques, car il est difficile d'un point de vue de la technique algébrique requise, de déterminer la réciproque d'une fonction qui ne soit pas affine. Mais dans ce contexte, le recours au registre graphique peut se révéler intéressant dans la mesure où il permettrait au moins de varier les tâches susceptibles d'être proposées aux élèves. En effet, et même si les élèves ne savent tracer, outre les fonctions affines, que les fonctions du second degré et certaines fonctions par intervalles qui n'ont pas toutes de réciproques, il est possible de considérer ces dernières sur un intervalle convenablement choisi pour que la propriété de réciprocité soit vérifiée. *Or, l'introduction du registre graphique, et par son intermédiaire, celle du cadre géométrique, présente l'intérêt de diversifier les cadres et registres impliqués dans l'enseignement dont nous avons souligné, dans le chapitre I, l'importance au niveau de l'appropriation des différentes notions visées. Par opposition, la restriction à un seul registre, le registre algébrique, et à l'implication de la notion visée selon un seul statut, son statut objet, provoque une restriction supplémentaire due à la limitation à des fonctions dont les expressions algébriques ne présentent qu'une difficulté contrôlable du point de vue de la technique algébrique attendue. Ceci a tendance à réduire considérablement les activités susceptibles d'être proposées aux élèves.*

2.1.7 Description, commentaire et analyse de la section "Applications"

La section 10 "Applications" est comme son nom l'indique consacrée aux applications de la fonction. Ce qui est entendu par application est expliqué dans l'introduction du manuel de l'élève : "Nous sommes confrontés dans notre vie de tous les jours à des situations où nous avons à établir des relations précises entre différentes variables. Pour une meilleure compréhension de ce qui est entendu par le terme variable et pour économiser du temps et de l'effort à savoir comment établir ces relations, nous allons présenter dans cette section quelques-unes de ces situations". Le manuel du professeur insiste pour sa part sur la présentation de cette section en demandant au professeur de l'inscrire dans le cadre de l'utilité des mathématiques dans la vie de tous les jours et dans les autres disciplines. Il se pose pour objectif "que l'élève puisse utiliser les fonctions dans les différentes situations de sa vie". Ces applications de la fonction correspondent donc pour nous à des situations fonctionnelles.

2.1.7.1 Le cours

L'objet d'enseignement : situations fonctionnelles

Le cours est présenté sous la forme d'un seul exercice résolu qui institutionnalise la méthode de résolution à adopter pour ces exercices de type situation fonctionnelle. Les exercices sont ensuite au nombre de 8 dans le manuel de l'élève alors qu'une seule activité "d'approfondissement" apparaît dans le manuel du professeur. Soulignons enfin qu'aucune situation fonctionnelle n'apparaît dans la série d'exercices de la section "Révision".

Nous allons examiner l'exercice résolu :

"Exemple 1 : Les spécialistes de la météorologie utilisent le millibar comme unité de mesure de la pression atmosphérique. On a montré que la pression atmosphérique diminue au fur et à mesure qu'on s'élève relativement au niveau de la mer, d'après l'équation suivante : 1 mlbar pour une hauteur de 10 mètres. A la température de 0° Celsius la pression atmosphérique est de 1013 mlbar au niveau de la mer. En te basant sur ces informations, complète le tableau suivant. On suppose que ces mesures ont été prises à une température de 0° Celsius.

Hauteur par rapport au niveau de la mer	Diminution de la pression atmosphérique par rapport au niveau de la mer	Valeur de la pression Atmosphérique en mlbar
100	...	...
500	...	...
...	100	...
...	...	850
6000	...	...
x	...	...

Solution :

1) Hauteur par rapport au niveau de la mer = 100 m
   Diminution de la pression atmosphérique = 100 / 10 = 10 m
   Valeur de la pression atmosphérique à une hauteur de 100 m = 1013 - 10 = 1003 mlbar
2) (La solution apparaît dans le manuel, identique au 1).
3) Diminution de la pression atmosphérique = 100 mlbar
   Hauteur par rapport au niveau de la mer = 100 * 10 = 1000 m
   Valeur de la pression atmosphérique = 1013 - 100 = 913.
4) Valeur de la pression atmosphérique = 850
   Diminution de la pression atmosphérique = 1013 - 850 = 163 mlbar
   Hauteur par rapport au niveau de la mer = 163 x 10 = 1630 m.
5) (La solution apparaît dans le manuel, identique au 1).
6) Hauteur par rapport t au niveau de la mer = x m.
   Diminution de la pression atmosphérique = x / 10 m.
   Valeur de la pression atmosphérique = 1013 - x/10 mlbar." [exercice résolu, manuel de l'élève, section "Applications"]

Analyse de l'exercice résolu

La seule tâche demandée est de remplir le tableau de valeurs. Elle correspond donc à une tâche de représentation de fonction par conversion du registre verbal (de la situation fonctionnelle) au registre du tableau de valeurs. Cependant plusieurs remarques sont à faire ici :

- La situation présentée ne s'interprète pas a priori comme une fonction.

- La situation où la hauteur relativement au niveau de la mer et la pression atmosphérique correspondant à cette hauteur sont mises en relation, s'exprime dans un tableau à trois colonnes et non à deux colonnes.
- En relation avec la deuxième remarque, chaque ligne du tableau contient une valeur qui n'apparaît pas forcément dans la première colonne, même si celle-ci est la plus fréquemment remplie.
- La dernière ligne à remplir présente le symbole "x" dans la première colonne à la place d'une valeur numérique particulière.

Le fait que ce tableau soit constitué de trois colonnes, au lieu de deux qui éclairerait mieux une relation entre deux grandeurs (il n'est pas question de parler de variables pour l'instant), inscrit d'autant plus le problème dans *le cadre numérique*. Pour chaque ligne à remplir, une des valeurs données va permettre de calculer les valeurs correspondantes dans les deux colonnes vides. Ces différents calculs correspondent à la phase de l'exploration de la situation, et le calcul relatif à la colonne du milieu vise à aider l'élève dans son exploration et en particulier, à faciliter le passage de la première à la dernière colonne ou vice-versa. Le manuel du professeur insiste sur cette phase d'exploration en demandant au professeur d'insister pour chaque calcul, sur la mise en évidence de la relation existant entre *ce qui est donné* et *ce qui est à déterminer*.

Pour la dernière ligne à remplir, le manuel du professeur conseille *d'insister particulièrement sur la signification de la relation en x à établir*. Il nous semble que cette relation en x, qui généralise l'exploration numérique réalisée jusqu'alors et interprétée en termes de *ce qui est donné* et *ce qui est à déterminer*, traduit un passage vers le cadre algébrique. La relation obtenue apparaît plutôt statique en effet. Elle ne s'interprète pas en termes de variation (notion inconnue pour l'instant), ni même de variables, et ne saurait, par conséquent relever du cadre fonctionnel.

En fait, l'étape supérieure qui consisterait éventuellement à concevoir la situation dans un cadre fonctionnel est réalisée par les auteurs du manuel de l'élève qui concluent après la constitution du tableau de valeurs : "*tu peux constater que tu as déterminé la loi de la fonction qui met en relation la hauteur relativement au niveau de la mer, et la pression atmosphérique correspondant à cette hauteur : $f(x) = 1013 - x/10$*". Cependant l'interprétation de x et de f(x) comme des variables reste, nous semble t-il, implicite. Le manuel de l'élève n'apporte pas davantage de précision en ce sens, le manuel du professeur non plus. Reste le contrat du départ où ces situations étaient présentées, entre autres, pour éclaircir la signification du terme de variable. Bien sûr, il n'est pas exclu que le professeur prenne en charge une éventuelle entrée dans le cadre fonctionnel, en insistant, à la relecture des valeurs des première et troisième colonne du tableau obtenu, *sur les différentes valeurs que peut prendre x et sur le changement correspondant de la valeur de f(x), donc sur le fait que x varie et f(x) varie aussi en conséquence*.

2.1.7.2 Analyse de la partie exercices/activités

(voir tableau des tâches et techniques de la section 10 du chapitre 1 du manuel de 10ème en annexe du chapitre IV)

Les 5 premiers des 8 exercices proposés présentent également un tableau à remplir, rarement suivi d'une tâche supplémentaire. Cependant, si ces tableaux sont également constitués de 3 colonnes, il faut constater qu'il est rare de voir apparaître une valeur numérique dans une colonne autre que la première. Ainsi un tableau présente une valeur unique dans la colonne du milieu, et un autre présente une valeur, unique également, dans la troisième colonne. Par ailleurs, ces valeurs apparaissent en dernière ligne du tableau, en particulier après la ligne visant à établir l'expression en x. Voici l'un de ces deux exercices correspondant au premier de ces deux tableaux :

"On veut fabriquer une boîte sans couvercle, à partir d'une pièce de carton carrée de côté 15 cm, et cela en découpant des carrés de mêmes dimensions aux quatre coins de la pièce de carton puis en soulevant les bords qui dépassent, comme le montre la figure ci-contre. Base-toi sur ces informations pour compléter le tableau suivant :

Côté du carré découpé (en cm)	Surface de la base de la boîte (en cm^2)	Volume de la boîte (en cm3)
1	…	…
2	…	…
3	…	…
x	…	…
…	0	…

Quel est le domaine de définition de la fonction obtenue ?".

Nous remarquons tout de suite que cette valeur permet implicitement de déterminer le domaine de la définition, qui fait également l'objet d'une question explicite. Quant au deuxième tableau, la valeur de la troisième colonne vise implicitement à calculer un antécédent. Ainsi, même si les différentes situations sont à explorer dans un cadre numérique, le contrat veut maintenant qu'une fonction soit établie permettant de lier la grandeur représentée par la première colonne du tableau à celle représentée par la troisième colonne du tableau. Ce qui donne un sens bien précis à ces lignes supplémentaires à remplir : elles visent à réinvestir la loi algébrique obtenue.

Les 3 derniers exercices de la section ainsi que la seule activité du manuel du professeur ne présentent pas de tableau de valeurs. La première tâche demandée est toujours l'expression fonctionnelle, en des termes ne laissant pas de doute sur l'interprétation de la situation comme une fonction : "déterminer … x en fonction de y". Cette tâche est également suivie dans un de ces trois exercices d'une tâche d'image et dans un autre d'une tâche de réciproque demandée sous forme de retour à la situation initiale (expression de x en fonction de y).

Ainsi, une fois que le contrat concernant l'interprétation de ces situations par des relations fonctionnelles a été établi à travers la réalisation des premiers exercices, l'exploration numérique n'est plus une étape indispensable aussi la tâche de tableau de valeurs n'est-elle pas explicitement demandée. L'élève peut, selon ses capacités, établir directement la relation algébrique ou passer par des calculs de valeurs particulières qui sont alors laissés à sa charge.

Il faut souligner par ailleurs, qu'une fois de plus, les calculs numériques ne mettent essentiellement en jeu que des entiers.

2.1.7.3 Synthèse de l'analyse des situations fonctionnelles

Nous constatons que l'interprétation de ces situations en tant que fonction est un résultat de l'exploration de la situation et non un point de départ. L'interprétation des phénomènes de la vie de tous les jours, ou relevant de certaines disciplines mathématiques comme étant des fonctions, ne se fait pas de façon naturelle. On relève un premier point de différence avec l'enseignement des fonctions en France où les situations fonctionnelles permettent l'installation du concept. Du côté palestinien, les situations fonctionnelles sont conçues en quelque sorte comme extérieures au concept de fonction dont elles sont une application, ce qui explique qu'elles soient abordées en fin de chapitre et dans une section distincte.

L'exploration numérique de départ nécessaire à la familiarisation avec la situation est suivie de l'établissement d'une relation algébrique entre deux grandeurs, nommées variables, qui reste essentiellement statique. Cette relation statique s'accorde avec la définition ensembliste de la fonction (correspondance entre deux nombres) et ne permet pas véritablement la création d'un cadre fonctionnel car l'étude des situations fonctionnelles se limite pratiquement à la tâche de détermination de la loi fonctionnelle malgré la rare présence de quelques autres tâches comme les tâches de domaine de définition, d'image, d'antécédent, de réciproque. La fonction ne s'utilise donc pas, au niveau de la classe de 10ème, pour tirer des informations sur le problème de départ.

2.1.8 Conclusion du chapitre "Relations et fonctions"

Un enseignement formel pour une appréhension de la fonction en tant que loi ensembliste

L'enseignement de la fonction démarre en classe de 10ème sur une base formelle autour de la définition générale ensembliste de fonction. Le concept de fonction se définit donc relativement à celui de relation et est lié aux notions de domaine et but, d'image et d'antécédent (quoique ce terme ne soit jamais mentionné), alors que relativement peu de place est accordée à la fonction numérique. En effet, après les fonctions affines et les fonctions du second degré enseignées respectivement en classe de 8ème et de 9ème, seuls quelques cas particuliers de fonctions affines et affines par intervalles sont étudiées dans ce chapitre. Mais cette mise à l'écart des fonctions numériques qui a pour conséquence d'occulter l'aspect variation de la fonction s'allie avec le poids accordé à cet aspect ensembliste : la fonction ne peut être en conséquence présentée aux élèves que dans le cadre d'un exposé général sur la fonction englobant assez rapidement les notions de fonction injective, d'opérations algébriques et de composition et réciproque. Cependant l'absence de la notion de variation limite considérablement les activités mettant en jeu le concept de fonction à proposer à l'élève. Celui-ci se trouve essentiellement confiné dans les cadres numérique et algébrique au sein d'une organisation en tâches et techniques relativement réduite.

Le cadre numérique comme cadre de départ

Le cadre numérique sert principalement de cadre de familiarisation avec chaque nouvelle notion. Il est ainsi impliqué dans les techniques relevant des nouvelles organisations mathématiques. Pour mieux faire fonctionner ces concepts dans ce cadre, les fonctions sont définies sur des ensembles finis et représentées par les registres de représentation propres au cas fini : ensemble de couples ordonnés, registre symbolique (liste d'éléments et de leur image "f(a) = b"), diagramme sagittal, etc. Les différentes notions sont ensuite institutionnalisées dans le cas général incluant les fonctions à variables réelles dans les cadre et registre algébriques. La généralisation du cas fini/cadre numérique au cas infini/cadre algébrique se réalise sur une base ostensive à l'aide des exemples résolus du cours. *De plus les nombres utilisés, nous l'avons remarqué, se limitent quasiment à de nombres entiers : le passage à l'infini et donc la prise en compte de la continuité de la variable, nous semble réduite à celle d'un ensemble de quantités constantes, voir uniquement de quelques quantités entières. Ceci est probablement dû à l'organisation de l'enseignement de la fonction autour de la définition ensembliste. Mais alors l'idée de variable et de dépendance fonctionnelle ne peut que difficilement naître d'une telle organisation de l'enseignement où l'appréhension de la fonction est visée comme loi ensembliste*. En fait, l'acquisition de la notion de variable est visée de façon essentiellement implicite à travers certaines tâches/techniques comme les calculs d'images par substitution de valeurs mais aussi la détermination de l'expression algébrique d'une composition de fonctions ou de la réciproque d'une fonction. Les situations fonctionnelles telles qu'elles sont abordées dans ce premier chapitre, même si elles constituent une occasion d'emploi du terme variable, ne jouent pas un rôle significatif dans la maîtrise de cette notion puisque les relations à établir entre les deux variables sont des relations statiques en tant que relevant du cadre algébrique. Dans un tel contexte il est difficile, de façon générale, de se référer à un cadre fonctionnel. L'objet fonction apparaît bien davantage dans ce chapitre comme un moyen de renouveler le cadre algébrique installé dans les classes précédentes. C'est ainsi, que nous expliquons notamment les exercices/activités de complexification dont la technique de solution repose sur une résolution d'équation après conversion de données fonctionnelles dans le registre algébrique.

Le rôle du registre graphique

Si la maîtrise des techniques algébriques traduit, d'après les auteurs, un niveau supérieur d'appropriation des connaissances relativement aux techniques propres au cadre numérique, il arrive que certaines techniques graphiques soient envisagées comme objectifs d'enseignement dans le cadre général d'un enseignement basé sur un environnement théorique limité où l'aspect technique prime sur l'aspect conceptuel. C'est ainsi en particulier que nous expliquons la place des "test de la droite verticale" et "test de la droite horizontale" pour reconnaître respectivement une fonction par rapport à une relation, et une injection par rapport à une fonction. Le recours à des techniques algébriques non institutionnalisées pour la résolution de tâches que l'élève sait résoudre dans un autre registre (le registre graphique, notamment) apparaît alors comme un moyen de complexifier les tâches à leur proposer.

Etude de fonctions, représentation graphique de fonctions et résolution d'équations

C'est essentiellement à travers l'étude des fonctions avec valeur absolue et des fonctions avec partie entière que l'étude de fonctions, en tant que tâche emblématique, peut être quelque peu caractérisée. En effet, l'enseignement des fonctions constantes et identité nous semble être conçu dans un objectif différent, elles apparaissent constituer davantage un préalable à l'installation d'un autre objet d'enseignement qu'un véritable objectif en soi. Les fonctions constantes nous semblent permettre d'envisager implicitement la fonction partie entière, alors que l'intérêt de la fonction identité se situe davantage à un niveau théorique puisqu'elle intervient, avec la notion de fonction injective, dans la définition de la réciproque.

Les fonctions de type valeur absolue et de type partie entière apparaissent, par contre, constituer un objectif d'enseignement en soi et déterminent l'approche de l'étude de fonction en classe de 10ème palestinienne : d'une part, les fonctions doivent pouvoir être représentées graphiquement, et d'autre part, la résolution d'équations et inéquations fait partie intégrante de l'étude de fonction. Les représentations graphiques de fonctions ne se justifient pas sur la base des variations de fonctions puisque la notion de variation est occultée dans ce chapitre, mais davantage sur la traduction dans le registre graphique de données algébriques, traduction permise par le fait que les fonctions envisagées sont affines par intervalles (elles se représentent par des segments de droite). Par ailleurs, la représentation graphique n'est que rarement réinvestie dans la résolution d'une autre tâche ; en particulier elle n'est pas réinvestie dans la résolution des équations et inéquations qui ne constitue pas alors une occasion d'envisager la fonction selon son statut outil. En ce sens, la tâche d'étude de fonctions particulières s'inscrit également dans un cadre numérique/algébrique et ne permet pas non plus la création d'un cadre fonctionnel.

Un enseignement accordant peu de place au sens à donner aux notions nouvelles

Les aspects concrets ou intuitifs des différentes notions à enseigner ne sont pas pris en compte, l'activité de résolution de problèmes et l'étude de situations fonctionnelles n'interviennent pas, en particulier, dans la mise en place des nouveaux concepts. Ceci s'accorde bien sûr, en général, avec une organisation de l'enseignement sur une base directement formelle que permet l'ostension en tant que méthode pédagogique principale. Le peu de cas accordé au sens à donner aux notions à institutionnaliser se reflète par un recours à une faible diversité de cadres et de registres et à une implication des différentes notions essentiellement uniquement selon leur statut objet. Les différentes notions enseignées ne sont que peu mises en relation, ce qui se traduit par une grande segmentation au niveau des exercices/activités proposés, que souligne particulièrement l'absence de problèmes y compris en tant qu'approfondissement des connaissances. L'enseignement se caractérise alors par une forte insistance mise sur l'apprentissage de techniques de résolution d'exercices standard et une certaine transparence quant aux explications relevant du niveau technologique.

Cette organisation de tâches/techniques/technologies déterminant l'objet fonction dans ce premier chapitre s'inscrit dans le cadre d'un enseignement directif, fortement basé sur l'ostension, où la variété très restreinte des tâches et techniques ne donne à l'élève que peu de marge de manœuvre et d'espace de découverte.

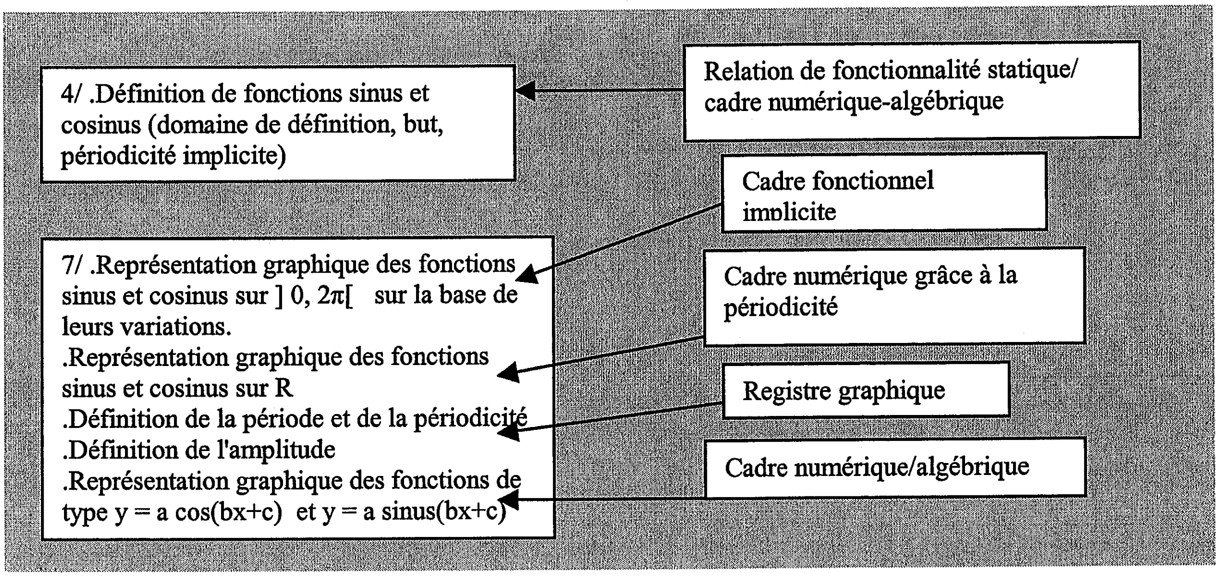
2.2 A propos du chapitre : "Les polynômes"

Ce chapitre qui est à rapprocher pour l'essentiel du chapitre équivalent dans le manuel de première française ne sera pas analysé dans la mesure où il n'apporte pas d'évolution concernant la création d'un cadre fonctionnel. Il s'inscrit très clairement dans le cadre algébrique avec des tâches essentiellement basées sur de la réécriture algébrique : reconnaissance d'un polynôme, degré de polynômes, opérations sur les polynômes, égalité entre polynômes, racines et factorisation de polynômes. Soulignons en particulier, qu'il n'y a aucune tâche d'image, de composition, de réciproque, de discrimination fonction/injection ou de représentation graphique de fonction. Enfin, la section application de ce chapitre finit d'inscrire le chapitre dans les cadre et registre algébriques puisque les applications sont des équations/inéquations à résoudre, avec pour techniques attendues ou demandées, les techniques de factorisation de polynômes mises en place dans le chapitre.

2.3 Description et analyse du chapitre : "Fonctions trigonométriques"

Ce chapitre est composé de 8 sections dont trois concernent notre étude, la section 4 introduisant les fonctions sinus et cosinus, la section 7 introduisant les représentations graphiques de fonctions trigonométriques à partir des fonctions sinus et cosinus de référence ainsi que les notions de périodicité, période et amplitude, et la section 8 "Révision" consacrée aux exercices de révision. Les trois premières sections introduisant la notion d'angle orienté, le cercle unitaire et les mesures d'angles en degré et en radian ainsi que la relation entre la longueur d'un arc de cercle sur le cercle unitaire et la mesure de l'angle orienté associé ont été écartées de notre analyse. Les sections 5 et 6 où les fonctions trigonométriques manipulées dans un cadre uniquement numérique n'amènent rien de nouveau du point de vue de l'analyse ont également été écartées.

2.3.1 Organigramme du cours du chapitre



2.3.2 Description, commentaire et analyse de la section "Fonctions sinus et cosinus "

2.3.2.1 Le cours

Les objets d'enseignement fonction cosinus et fonction sinus

Un angle orienté AOM de mesure x, est représenté de telle façon que le point M de coordonnées (a, b) soit placé sur le cercle unitaire. Le manuel souligne à partir de cette illustration qu'à tout angle (AOM) de mesure x, correspond un réel unique a, qui est l'abscisse du point M et que cette relation entre la mesure de l'angle AOM et l'abscisse du point M, est une fonction qui s'appelle fonction cosinus de x.

La fonction sinus est présentée de façon identique. Le manuel poursuit : "les coordonnées du point M peuvent s'écrire (cos x, sinx) et puisque le rayon du cercle est de longueur 1 les valeurs de x et y se limitent à celles comprises entre -1 et 1, soit $-1 \leq \cos x \leq 1$ et $-1 \leq \sin x \leq 1$". Le domaine de définition des deux fonctions sinus et cosinus est ensuite précisé pour être R.

La section se termine par l'énoncé de la propriété de périodicité qui n'est cependant pas nommée : "Nous remarquons tout de suite que si x est une valeur comprise entre 0 et 2π, et si le point M réalise un tour complet à partir de sa position initiale, les valeurs du cosinus et du sinus correspondant à la mesure du nouvel angle obtenu, soit x + 2π, ne changent pas". Des exemples numériques sont donnés à titre d'illustration et la relation institutionnalisant la propriété implicite de périodicité est établie :
"$\cos x = \cos (x + n\, 2\pi)$ et $\sin x = \sin (x + n\, 2\pi)$, avec n entier relatif".

Deux nouvelles fonctions sont ainsi définies à partir d'une situation géométrique : position d'un point sur un cercle vérifiant certaines conditions. Les nouvelles fonctions sont présentées en totale cohérence avec la définition générale de fonction donnée au chapitre 1 : une relation est d'abord établie qui se révèle être une fonction par la vérification de la condition d'unicité de l'image. Des remarques également en relation avec la définition sont faites quant au domaine de définition et au but de ces fonctions. L'établissement du but des deux fonctions, et surtout de la propriété de périodicité, sont permises grâce à l'intuition apportée par la référence au cercle trigonométrique.

2.3.2.2 Les exercices/ activités (total de 9 exercices/activités)

En accord avec cette première introduction des fonctions trigonométriques, où la relation définie présente un caractère plutôt statique, les fonction sinus et cosinus ne sont exploités dans les exercices /activités de cette section que dans un cadre numérique puisque la grande majorité des tâches demandées sont des tâches d'image ou d'antécédent : "pour une mesure d'angle donnée (en degré ou en radian) déterminer le cosinus ou le sinus correspondant" ou inversement "pour un cosinus ou un sinus donné déterminer la ou les mesures d'angles correspondant(s)". Le calcul est donc essentiellement numérique, même si certaines réécritures algébriques peuvent être utilisées se ramenant à l'utilisation selon leur statut d'outil implicite des propriétés de périodicité et de parité (également non nommées et institutionnalisées dans les sections suivantes). Précisons que les équations trigonométriques ne sont enseignées que dans le chapitre suivant alors que les inéquations trigonométriques ne sont pas au programme.

Ainsi, les nouvelles fonctions étudiées dans cette section restent conçues essentiellement dans un cadre numérique et dans une moindre mesure dans un cadre algébrique faisant que l'appréhension de la fonction reste une appréhension ensembliste comme pour toutes les fonctions étudiées jusque-là. Quant aux équations trigonométriques dont l'enseignement n'est prévu que dans le chapitre suivant, précisons qu'elles ne sont conçues que dans le cadre algébrique sans aucune référence au cadre fonctionnel. La technique de résolution ne prévoit pas le recours au cercle trigonométrique, elle est donc essentiellement basée sur la mémoire aussi ne peuvent-elles mettre en jeu que des valeurs se ramenant à des mesures d'angles remarquables. Par ailleurs remarquons que les tâches d'image et d'antécédent de ce chapitre ne sont pas liées de façon explicite à la résolution d'équations trigonométriques du chapitre suivant.

2.3.3 Description, commentaire et analyse de la section "Représentation graphique des fonctions"

2.3.3.1 Le cours

L'objet d'enseignement : représentation graphique de la fonction sinus

- **Représentation graphique sur l'intervalle] 0, 2π[**

  La fonction sinus est d'abord représentée sur l'intervalle [0, 2π] sur la base des explications suivantes : "Suppose que M (cos x, sin x) est un point qui se déplace sur le cercle unitaire où x est la mesure en radian de l'angle orienté que forme OM avec l'axe Ox, comme sur la figure ci-contre. Alors si x varie de 0 à π/2, sin x varie de 0 à 1. Et quand x varie de π/2 à π alors sin x varie de 1 à 0, et ainsi de suite. Le tableau suivant te donne les valeurs de sin x quand x varie de 0 à 2 π ".

x	0	π /3	π /2	2 π /3	π	4 π /3	3 π /2	5 π /3	2 π
Sin x	0	0,87	1	0,87	0	-0,87	-1	-0,87	0

Le tableau de valeurs est suivi d'une représentation graphique de la fonction sinus x sur l'intervalle [0, 2π]. La représentation graphique de la fonction cosinus également sur l'intervalle [0, 2π] est obtenue de façon identique aussi nous n'y reviendrons pas. Aucun commentaire n'amène davantage de précision sur l'obtention du graphique à la suite duquel les auteurs remarquent : "tu constates que la plus grande valeur de la courbe est 1, et que la plus petite valeur est -1". Ce n'est qu'avec la notion d'amplitude un peu plus loin que s'éclaircira l'intérêt de cette remarque.

Les valeurs de sinus x sont obtenues à partir du déplacement du point M sur le cercle unitaire en partant du point (0, 1). Les explications insistent sur le fait que x *varie* et que sinus x *varie en conséquence*. Il est donc sous-entendu que les différentes valeurs que prend sinus x dépendent des différentes valeurs que prend x. Il nous semble que les explications, ne font plus ici aussi clairement référence à une correspondance statique d'une valeur (de x) à une valeur de (sin x), comme cela était le cas avec l'introduction des fonctions cosinus et sinus. Ici, l'accent est davantage porté sur le *changement des valeurs de x* auquel correspond *le changement des valeurs de sinus x*. L'utilisation de l'expression "*varie de... à ...*", qui apparaît pour la première fois dans ce chapitre est très suggestive en ce sens. Les auteurs insistent donc sur l'idée d'une variation, elle-même permise par l'intuition qu'apporte la référence à la situation initiale. En effet, l'élève peut *voir* sur le cercle trigonométrique que x grandit avec le déplacement du point M sur le cercle, et que sinus x, visualisé par la lecture de l'abscisse du point, grandit puis diminue, etc. Ce sont ces constatations informelles sur les variations de sinus x qui justifient implicitement la représentation graphique de la fonction. Même si la référence au cadre numérique, par le biais d'un tableau de valeurs est indispensable pour l'obtention d'un graphique correct de la fonction sinus, ce graphique ne pourrait être obtenu sans les remarques concernant les variations de la fonction. Quoique ces remarques restent informelles, puisque liées à l'intuition apportée par le cercle trigonométrique, c'est la première fois en seconde que la représentation graphique d'une fonction se justifie par des considérations sur ses variations. Il nous reste à voir si ce changement de position, qui amène à appréhender la fonction en tant que loi de variation se confirme dans la suite du chapitre, et dans les tâches/techniques relevant de cette section.

Par ailleurs, quelques remarques sont à faire relativement au tableau de valeurs. Si le tableau de valeurs joue un rôle important dans le représentation de la fonction, on peut s'étonner du choix des valeurs de x effectuées par les auteurs : elles sont peut variées puisqu'elles sont toutes uniquement des multiples de π, π/2 ou π/3. Ce choix restreint de valeurs ne nous semble pas pouvoir mettre suffisamment l'accent sur la forme générale de la courbe et plus généralement, ne peut pas induire l'idée de continuité : l'intervention du professeur est indispensable pour institutionnaliser la forme générale de cette courbe qui ne peut être perçue à partir de la seule activité numérique de constitution du tableau de valeurs.

- **Représentation graphique de la fonction sinus sur R**

La représentation de la totalité de la courbe de la fonction sinus x est institutionnalisée sur la base de l'exemple suivant :
"Exemple 1 : Représente la courbe de la fonction y = sin x.
Solution : "puisque la branche OM de l'angle orienté de mesure $(x + 2n\pi)$ aura la même position que celle de la branche OM de l'angle orienté de mesure x alors
$\sin(x + 2n\pi) = \sin x$. Aussi, la partie de la courbe représentée sur l'intervalle $[0, 2\pi]$ se reproduit de façon successive pour la représentation de la fonction sinus sur R. Il suffit donc de reproduire la partie que nous avons déjà représentée comme on peut le voir dans la figure ci-dessous".

La représentation graphique de la fonction sinus sur R se justifie par la répétition des valeurs que prend la fonction sinus en référence à la situation géométrique initiale du déplacement du point M sur le cercle unitaire. Il nous semble que l'utilisation de l'égalité " $\sin(x + 2n\pi) = \sin x$ ", soit l'utilisation de la propriété de périodicité selon son statut d'outil implicite, pointe davantage les cadres numérique et algébrique avec la répétition des valeurs de la fonction, même si l'idée de la fonction appréhendée comme une loi de variation, reste sous-jacente à la représentation du reste de la courbe en liaison avec la reproduction de la partie déjà tracée. La référence au cadre numérique justifie le tracé de la courbe sur chaque intervalle $[2n\pi, (2n+2)\pi]$ en l'absence d'une justification géométrique que permettrait la notion de translation qui n'est pas disponible à ce niveau.

Les objets d'enseignement périodicité, période et amplitude

La représentation graphique de la fonction sinus sur R obtenue, les notions de périodicité et de période, puis celle d'amplitude vont être institutionnalisée par les définitions suivantes :
"Toute fonction dont la courbe se représente par reproduction d'une de ses parties de façon successive est appelée fonction périodique".
Puis :
"On appelle la plus petite distance horizontale entre deux points sur la courbe telle que la partie de la courbe entre ces deux points se reproduise de façon successive, la période de la fonction périodique".

C'est le registre graphique qui est choisi comme registre support pour institutionnaliser les deux nouvelles notions de périodicité et de période. Il nous semble que ce choix est fait dans deux objectifs : d'une part, le registre graphique permet la visualisation de ces notions et est susceptible de faciliter leur compréhension. D'autre part, ces notions sont rattachées au registre graphique dans un souci de fonctionnalité, puisqu'elles servent d'outil permettant d'obtenir la totalité de la courbe d'une fonction périodique. Mais ce choix de distinguer le registre graphique relativement au registre algébrique est-il significatif d'un statut nouveau pour ce registre ? Sera t-il effectivement choisi par la suite pour mettre en évidence la propriété de périodicité et rechercher la période d'une fonction ? Cela supposerait alors que les fonctions soient données au départ dans le registre graphique ou nécessitent une première conversion vers ce registre ? Les tâches /techniques proposées dans la suite du cours ainsi qu'en exercices/activités nous éclaireront sur ce point.

La définition de l'amplitude d'une fonction périodique est également énoncée sur la base d'un exemple particulier de représentation graphique de fonction : "Si y= f(x) est une fonction périodique alors l'amplitude de la fonction est : (la plus petite valeur - la plus grande valeur) / 2".

Elle montre que les notions de plus grande et plus petite valeur d'une fonction périodique ne sont ne sont pas à relier aux notions de maximum et minimum qui n'ont, elles, de signification que dans le cadre de l'appréhension de la fonction comme loi de variation. Les plus grande et plus petite valeurs d'une fonction périodique vont servir à calculer son amplitude, l'amplitude et la période s'avérant primordiales dans la suite du cours. Elles sont, en effet, réinvesties dans les exemples suivants, mais en amont cette fois de la représentation graphique, qu'elles vont permettre d'obtenir. Pour cela une méthode algébrique de détermination de la période est présentée à travers un exemple qui sert d'institutionnalisation, comme le montrent les remarques suivantes :

"pour déterminer la partie de la courbe d'une fonction périodique qui se reproduit de façon successive, il faut utiliser la méthode que nous avons utilisée dans l'exemple ..., pour la fonction y = 3sin (x/2). Il faut déterminer les valeurs de x qui font que $0 \leq x/2 \leq 2\pi$, et ce parce que la période de la fonction sinus est 2π . On obtient alors $0 \leq x \leq 4\pi$. La période de la fonction y = 3sin (x/2) est donc $4\pi - 0 = 4\pi$. La partie de la courbe entre x = 0 et x = 4π se répète de façon successive ; aussi pour la représenter, on représente d'abord la partie de la fonction y = 3 sin (x/2) comprise entre x = 0 et x = 4π et on la reproduit de façon successive".

On constate, une fois de plus à travers cet exemple, que les savoir-faire à connaître sont toujours institutionnalisés sur une base ostensive à partir d'exemples particuliers, ce qui est en général significatif d'un cadre théorique plutôt réduit. Cependant il nous semble que cette méthode algébrique de détermination d'une période présente plusieurs intérêts au niveau pratique de la technique à utiliser par l'élève :

- Cette technique algébrique de détermination de la période apparaît comme la traduction de l'idée de distance d'après la définition graphique institutionnalisée.
- La période des fonctions trigonométriques de type y = a cos(bx+c) et y = a sinus(bx+c), au programme de 10ème, se détermine relativement à la période de 2π des fonctions sinus ou cosinus. Ce qui laisse à penser qu'elle est obtenue par analogie avec les fonctions sinus ou cosinus. Il y a là une idée implicite d'un ajustement de la période de la nouvelle fonction relativement à la période des fonctions de départ.
- Cette technique dispense l'élève de choisir le premier intervalle où représenter la fonction, il choisira les bornes de l'inégalité obtenue lors du calcul de la période (0 et 4π pour l'exemple ci-dessus).

Par ailleurs, l'établissement de la période et de l'amplitude d'une fonction trigonométrique de façon systématique avant la représentation graphique de la fonction nous semble correspondre à une conversion dans le registre graphique des données algébriques de l'équation fonctionnelle permettant de contourner des considérations géométriques quant à l'aspect de la courbe des fonctions de type y = a cos(bx+c) et y = a sinus(bx+c), relativement à celles des fonctions respectives cosinus et sinus. Elles nous apparaissent se référer, quoique de façon implicite, à l'idée d'un ajustement de la fonction à représenter par allongement ou rétrécissement relativement aux deux axes Ox (pour la période) et Oy (pour l'amplitude).

La section se termine par l'institutionnalisation de formules algébriques permettant d'obtenir l'amplitude et la période des fonctions de type y = a cos(bx+c) et y = a sinus(bx+c) : "toutes les fonctions de type y = a cos(bx+c) et y= a sinus(bx+c), avec a et b $\neq$ 0 ont pour amplitude a et pour période 2π / b ".

Il nous semble que ce résultat général est donné dans le but de dispenser les élèves du calcul systématique de l'amplitude et surtout de la période, en tant que calcul délicat à réaliser. Ce résultat nous semble institutionnaliser le fait que les fonctions de type y = a cos (bx +c) et y = a sinus (bx + c) ont une représentation graphique similaire à celle des représentations des fonctions cosinus et sinus. En conséquence, le contrat permettra à l'élève de représenter toutes les fonctions de ce type sur la base de cette analogie sans véritable étude préalable, soit par la technique décrite ci-dessus de conversion du registre algébrique dans lequel la fonction est donnée au départ, vers le registre graphique. En ce sens, il n'est pas exclu que certains professeurs insistent davantage encore sur l'effet des constantes a et b, respectivement sur l'amplitude et la période, et par extension sur l'effet de la constante c quant au décalage sur l'axe Ox relativement à l'origine du repère. Les élèves auront alors le droit de se limiter à un tableau de valeurs sur une période en repérant simplement les valeurs maximales et minimales (données d'ailleurs par l'amplitude pour les fonctions institutionnalisées) et les points d'intersection avec l'axe Ox pour représenter la fonction sur une période, puis sur tout son domaine. Il s'agira là d'*une technique spécifique aux fonctions trigonométriques de type y = a cos(bx+c) et y = a sinus(bx+c) que permet le contrat* (voir techniques de représentation graphique de fonction, chapitre II). *A ce stade, on est loin dans la pratique de toute considération de variation, puisque le programme a réussi à mettre en place une technique de conversion algébrique/graphique sur la base d'un contrat d'analogie avec les fonctions sinus et cosinus de référence qui permet de contourner les justifications géométriques.* Il nous apparaît de façon très claire ici que l'influence et les exigences du professeur vont être décisives si l'on tient compte du fait que les objectifs, quant à une étude préalable de la fonction avant sa représentation, ne sont pas davantage précisés dans le manuel du professeur et ce, d'autant plus que la représentation graphique des fonctions trigonométriques ne figurent pas dans les programmes des classes de 11ème et 12ème palestiniennes.

2.3.3.2 Analyse des exercices/activités par tâches et techniques

(voir tableau des tâches et techniques du chapitre 7 du manuel de 10ème en annexe du chapitre IV)

Les 12 exercices/activités de cette section demandent la représentation graphique d'une fonction périodique et nous les distinguerons de la façon suivante :

- 4 exercices/activités demandent la représentation graphique de la fonction cosinus et sinus sur un autre intervalle que l'intervalle $[0, 2\pi]$, ou la représentation graphique de a cos x ou a sin x sur un seul intervalle. D'après leur classement ces exercices/activités sont considérés comme de base, il faut souligner qu'il n'est pas demandé de déterminer la période et l'amplitude dans ces cas là.

- 5 exercices/activités où la fonction est du type *y = a cos (bx + c) et y = a sinus (bx + c), avec a 0 et b et/ou c* 0. Soulignons que là, la détermination de la période et de l'amplitude est demandée après la représentation graphique mais il ne nous semble pas si nous comparons la formulation de ces exercices à celles des exercices/activités des deux catégories suivantes, que l'ordre de réalisation de ces tâches soit à suivre impérativement. Il semble donc que l'élève ait ici le choix d'utiliser la formule algébrique ou la lecture graphique pour déterminer la période et l'amplitude des fonctions. De toute façon, c'est bien le contrat d'analogie qui régit et justifie le tracé de ces fonctions.

- Enfin, 3 exercices/activités considérés comme au-dessus du niveau des élèves. L'un consiste à représenter la fonction valeur absolue de sinus x. Il s'agit d'un réinvestissement de la technique graphique d'obtention d'une fonction correspondant à la valeur absolue d'une autre fonction que l'élève sait tracer, et qui a été mise en place dans le chapitre I, lors de l'étude de la fonction valeurs absolue. Il s'agit d'un rare cas, dans le manuel de 10ème, où d'une part le cadre géométrique soit sollicité et où une tâche soit proposée à l'élève qui lui laisse une certaine marge d'initiative. Les deux autres sont de la forme *y = a cos(bx+c) + d (ou y = a sinus(bx+c) + d).* Remarquons d'emblée qu'il est clairement demander de : "déterminer la période et l'amplitude *puis* de représenter graphiquement la fonction".

- Soulignons que dans la section "Révision", il est également clairement demandé de déterminer la période et l'amplitude de la fonction trigonométrique *avant* de réaliser sa représentation graphique. Cette section "Révision" de ce chapitre, montre par ailleurs que la représentation graphique des fonctions de type y = a cos(bx+c) et y = a sinus(bx+c) est un enjeu important du chapitre puisqu'elle concerne les deux tiers des exercices de la section "Révision".

Il nous semble que ces deux dernières catégories d'exercices/activités sont celles significatives de l'utilisation de la période et de l'amplitude dans la technique de représentation graphique des fonctions trigonométriques utilisée en classe de 10ème palestinienne : période et amplitude font partie intégrante d'une technique algébrique/graphique justifiant le tracé de la fonction qui reste cependant, par contrat, similaire à celui des fonctions de référence cosinus et sinus.

2.3.4 Conclusion du chapitre "Fonctions trigonométriques"

Les fonctions sinus et cosinus sont présentées comme des fonctions de référence, étant à la fois objet d'enseignement, et permettant d'institutionnaliser la sous-classe des fonctions périodiques de type y = a cos(bx+c) et y = a sinus(bx+c), ainsi que les notions de périodicité, période et amplitude.

L'étude des fonctions sinus et cosinus et, plus généralement, des fonctions trigonométriques de type y = a cos(bx+c) et y = a sinus(bx+c) se confond avec celle de leur représentation graphique. La représentation graphique des fonctions cosinus et sinus, en tant que fonctions de référence pour la classe des fonctions trigonométriques de 10ème, est justifiée sur la base de leurs variations sur l'intervalle $[0, 2\pi]$, au moment de leur institutionnalisation. L'idée de variation est alors permise par la référence à la situation géométrique initiale. L'exemple des fonctions trigonométriques semble constituer l'unique exemple permettant l'appréhension de la fonction comme loi de variation annonçant le passage vers un cadre fonctionnel avec une idée de dépendance entre variables plus élaborée.

Cependant, les cadres numérique et algébrique reprennent déjà le dessus avec l'institutionnalisation de la totalité de la courbe des fonctions de référence, les considérations de variations n'étant plus que sous-jacentes à la représentation graphique. Le retour vers un cadre numérique-algébrique se confirme avec la technique institutionnalisée d'obtention des représentations graphiques de fonctions périodiques sur la base de leurs période et amplitude. Seul le contrat d'analogie avec les fonctions cosinus et sinus fait une référence implicite à une idée de variation mais la technicité requise de calcul de période ou d'amplitude, ainsi que l'établissement d'un tableau de valeurs et les conversions algébriques/graphiques nécessaires re-situent l'étude de la fonction dans le cadre d'une appréhension ensembliste en conformité avec la conception de la fonction développée au chapitre I.

Il faut souligner le recours au registre graphique pour institutionnaliser notamment les notions de périodicité et de période. Cet emploi du registre graphique nous rappelle son utilisation dans la définition de fonction et de fonction injective. Ainsi, le registre graphique est préféré au registre algébrique pour institutionnaliser des objets d'enseignement dont l'institutionnalisation dans le registre algébrique est jugée au-dessus du niveau des élèves. La technique algébrique de détermination de la période d'une fonction, comme les techniques algébriques de discrimination relation/fonction et fonction/injection apparaissent alors comme des techniques permettant de complexifier des tâches familières aux élèves.

Par ailleurs, il faut souligner également avec l'enseignement des fonctions trigonométriques qu'il n'y a pas de mathématisation des considérations géométriques. Tout juste une familiarisation avec certaines propriétés géométriques relevant du registre graphique qui ne sont cependant pas formalisées. Ainsi, il n'y a pas de présentation d'une technique de changement d'origine/d'échelle ou de la notion de transformation qui permettraient de mieux justifier l'obtention des courbes des fonctions trigonométriques au programme relativement à celles des fonctions sinus et cosinus de référence. Les justifications géométriques sont au contraire contournées par la mise au point de techniques de conversion du registre algébrique vers le registre graphique. Ces techniques de représentation graphique de fonctions ont par conséquent une *portée* (au sens de Chevallard) limitée. En effet, alors que les justifications relatives au concept de transformation, ou à l'utilisation de la technique de changement d'origine/d'échelle, peuvent s'appliquer à toutes les classes de fonctions étudiées en seconde française une fois institutionnalisées la fonction de référence de chacune d'entre elles, les techniques de conversion du registre algébrique vers le registre graphique seront à revoir pour chaque classe de fonction dans le programme palestinien. Ces constatations doivent être reliées, plus généralement, à la réduction du cadre théorique.

2.4 Synthèse de l'évolution de l'enseignement du concept de fonction en cours d'année de 10ème

La synthèse de l'évolution de l'enseignement de la fonction en seconde palestinienne est à réaliser relativement aux deux chapitres "Relations et fonctions" et "Fonctions trigonométriques" aussi l'essentiel des conclusions établies pour le chapitre I sont à reprendre ici : la fonction fonctionne essentiellement dans les cadres numérique et algébrique. Le cadre numérique sert principalement à se familiariser avec les nouvelles notions et les nouveaux savoir-faire correspondants, le cadre algébrique imposant ses techniques algébriques est un objectif traduisant un niveau supérieur d'acquisition des connaissances.

Le recours aux seuls cadres numérique et algébrique pour faire fonctionner le concept de fonction se situe en totale conformité avec l'appréhension ensembliste de la fonction en l'état des connaissances de l'élève. En particulier les notions de variable, variable dépendante et variation ne sont pas des objectifs explicites de ce programme de seconde. Seule une familiarisation avec ces notions est à envisager à travers le travail de la technique relative à certaines tâches comme les calculs d'image par substitution de valeur et la technique algébrique de détermination d'une fonction composée ou de la réciproque d'une fonction. En fait, le concept de fonction semble davantage permettre de renouveler les cadres numérique et algébrique que d'aider à l'acquisition de la notion de variable. De façon cohérente, la représentation graphique d'une fonction, en tant que tâche s'imposant dans l'étude des fonctions particulières du programme, ne se justifie pas sur la base de ses variations. L'obtention de la représentation graphique d'une fonction se base davantage sur des conversions dans le registre graphique de données algébriques, technique permettant de contourner des justifications d'ordre géométrique. Il nous semble que même l'exemple des fonctions trigonométriques de type y = a cos (bx + c) et y = a sinus (bx + c), ne contredisent pas ces conclusions. En effet, si la représentation graphique des fonctions cosinus et sinus sur l'intervalle $[0, 2\pi]$, se base effectivement sur les variations de ces fonctions sur cet intervalle, il n'en reste pas moins que la technique, institutionnalisée dans le cours, de représentation graphique des autres fonctions trigonométriques au programme reste une technique de conversion algébrique/graphique ; et seul le contrat d'analogie de ces fonctions avec les fonctions sinus et cosinus peut faire une référence implicite à leurs variations.

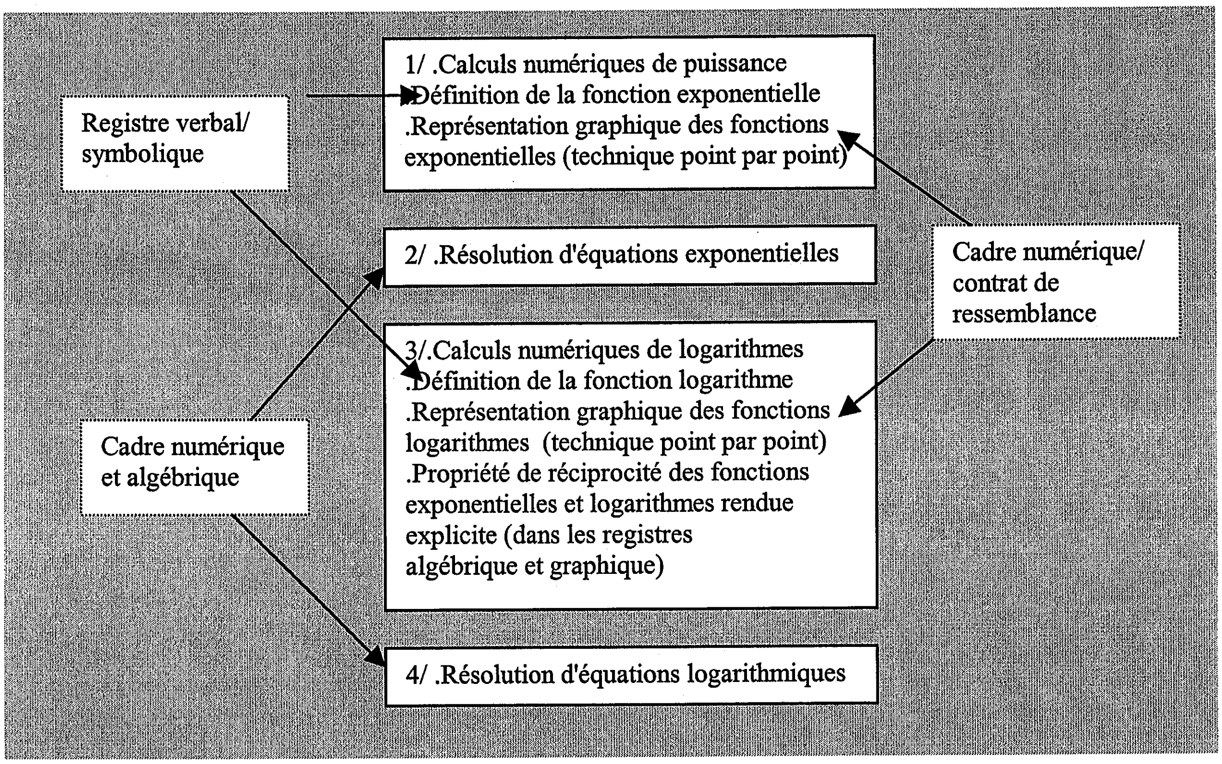
Mais l'importance de l'obtention de la représentation graphique d'une fonction dans l'étude des fonctions particulières ne traduit pas une importance du registre graphique. Le registre algébrique reste le principal registre utilisé pour faire fonctionner le concept de fonction. Cependant le registre graphique lui est quelquefois préféré pour l'institutionnalisation d'une notion et/ou comme registre support d'une technique de résolution quand l'équivalent, dans le registre algébrique, est jugé trop complexe. La solution par une technique algébrique est alors reléguée en tâches de complexification.

Ce statut des registres algébrique, et dans une moindre mesure, graphique en tant que registres dans lesquels les techniques à enseigner sont institutionnalisées reflète d'une part, le poids de l'apprentissage de techniques dans la conception de l'enseignement en classe de seconde palestinienne et d'autre part, la limitation du cadre théorique. L'aspect conceptuel des notions à mettre en place apparaît effectivement négligé relativement à l'acquisition des techniques qui justifient les tâches relevant des organisations mathématiques décrivant ces notions. Ceci se traduit par une forte segmentation dans la présentation des objets d'enseignements, et une absence d'explication de niveau technologique relativement à nombre de techniques.

3. Analyse des manuels de 11ème : Le chapitre "Exponentielle et logarithme"

Un seul chapitre du programme de 11ème relève de notre étude. Il s'agit du chapitre "Exponentielle et logarithme". Deux nouvelles fonctions sont ainsi étudiées en 11ème, les fonctions exponentielles et logarithmes. Seules 5 des 9 sections du chapitre nous concernent. Ils s'agit des sections consacrées à l'enseignement des fonctions exponentielles et logarithmes, ainsi que de celles consacrées à la résolution des équations/inéquations correspondantes. Bien que ces dernières soient traitées dans des sections distinctes, nous les avons prises en compte, dans la mesure où elles sont enseignées dans un même chapitre, pour ce qu'elles peuvent révéler de l'approche de l'enseignement du concept de fonction dans cette classe. La dernière section, qui comme toujours dans ces manuels palestiniens, est une section d'exercices de révision est prise en considération lors de l'analyse des exercices/activités. Les quatre autres sections du chapitre qui se situent entièrement dans les cadres numérique et algébrique ont bien sûr été écartées : elles traitent des propriétés numériques et algébriques des logarithmes. L'enseignement des tables de logarithmes y est prévu et se conçoit en raison de l'interdiction de la calculatrice.

3.1 Organigramme du cours du chapitre



3.2 Description, commentaire et analyse du cours

3.2.1 L'objet d'enseignement : fonction exponentielle

La section débute par un rappel des règles de calculs sur les puissances. Ces travaux numériques situent la familiarisation avec la nouvelle fonction à étudier dans le cadre numérique sur la base de notions connues. Il est nécessaire de présenter en quelques lignes comment s'opère la généralisation de ces règles de calculs des exposants entiers aux exposants réels.

Les calculs sur les puissances en classes précédentes

Dans les classes de 8ème et 9ème, les règles de calculs sur les puissances ont d'abord été définies pour des exposants entiers positifs.

En supposant que la propriété $a^m . a^n = a^{m+n}$ est vérifiée pour m, n entiers négatifs, les règles de calculs sur les exposants sont étendues à tous les exposants entiers relatifs par la définition de a^{-m} : $a^{-m} = 1 / a^m$.

Une deuxième généralisation aux exposants rationnels est permise en supposant la propriété $(a^m)^n = a^{mn}$ admise pour m et n rationnels et en définissant $a^{1/n}$ comme étant la racine nième de a.

En classe de 11ème, pour les besoins d'introduction de la fonction exponentielle, on admet que ces règles de calculs sur les exposants peuvent être étendus aux exposants réels.

Dans cet esprit de continuité établissant les nouveaux concepts à partir de concepts familiers, les fonctions exponentielles étudiées dans cette section ne peuvent cependant inclure la fonction exponentielle de base e.

Définition de la fonction exponentielle

La fonction exponentielle est ensuite formellement établie dans le registre verbal/symbolique : "La fonction exponentielle $f(x) = a^x$, avec $a>0$ et $a \neq 1$, est une fonction où la variable indépendante est un exposant. Le domaine de définition de cette fonction est R et son but est R^+ ".

Cette nouvelle fonction est, d'autre part, reliée aux fonctions étudiées en classe de seconde par un rappel de la définition générale de la fonction : "une fonction est une relation qui lie chaque élément de son domaine à un élément unique de son but".

La nouvelle fonction exponentielle est donc introduite en liaison avec la définition de la fonction institutionnalisée en seconde, soit sur la base d'une relation algébrique statique entre deux valeurs. Cependant il nous faut souligner l'utilisation du terme *variable* dans cette définition. Ce terme ne faisait en effet que de très rares apparitions dans les manuels de 10ème, essentiellement avec l'étude des situations fonctionnelles. Il nous ne nous semble pas que son utilisation soit pour l'heure significative de l'installation d'un nouveau mode d'appréhension, l'appréhension comme loi de variation. Elle viserait plutôt à souligner la position inhabituelle de la *lettre x* dans l'écriture algébrique de la relation. Ce point sera confirmé dans la suite de l'analyse du chapitre.

Cette position de la lettre x permet entre autres de distinguer les fonctions exponentielles des autres fonctions : justement quelques exemples de fonctions exponentielles dans le registre algébrique sont proposés.

Représentation graphique des fonctions exponentielles

Deux exercices résolus exposent la technique d'obtention de la courbe d'une fonction exponentielle, dont voici le premier :

"Exemple 1 : " Représente la courbe de la fonction $f(x) = 2^x$, puis détermine à l'aide de la représentation la valeur de f(5,2).

Solution : on dresse un tableau pour certaines valeurs $(x, 2^x)$.

(un tableau de valeurs de 0,5 en 0,5 pour x compris entre -2 et 2 est dressé).
Remarque que plus les valeurs de x augmentent, plus celles de f(x) augmentent.
(enfin, f(5,2) est donné par lecture graphique, puis calculé : $2^{5,2} = 5,66$)".

La technique graphique de représentation des fonctions exponentielles est institutionnalisée sur la base d'exemples particuliers. Il faut souligner qu'elle ne nécessite pas de justification mathématique et qu'elle s'obtient à partir de la seule technique point par point. Cette constatation laisse à penser que l'étude des fonctions trigonométriques en classe de 10ème, et en particulier la justification des courbes des fonctions sinus et cosinus sur la base de leurs variations, n'était pas annonciatrice d'une nouvelle approche du concept de fonction. Seule la particularité de la situation géométrique de départ permettait de se référer aux variations. Cette référence se limite donc au cas particulier des fonctions sinus et cosinus. La représentation graphique des fonctions exponentielles ne s'obtient que par à une technique numérique basée sur un contrat d'analogie, technique déjà soulignée pour le tracé des courbes de fonctions trigonométriques autres que celles des fonctions sinus et cosinus de référence.

Ainsi, les représentations graphiques de cas particuliers de fonctions exponentielles ont force de contrat. Les élèves devront conclure que toutes les fonctions exponentielles, en tant que fonction faisant partie d'une même classe, auront une même allure. Les professeurs insisteront probablement, de leur côté, sur ce point.

Le deuxième exemple résolu concerne la représentation graphique de "$f(x) = (1/2)^x$". Comme la première fonction, cette représentation est obtenue à partir d'un tableau de valeurs. Cette fois celles-ci sont uniquement des valeurs entières de x comprises entre -3 et 3. Comme la première courbe, la deuxième est ensuite commentée par des remarques concernant ces variations "*plus les valeurs de x augmentent, plus celles de f(x) diminuent*".

Ces remarques concernant les variations visent deux objectifs à notre avis :

- d'une part, familiariser les élèves avec l'idée de variation. Il s'agit d'une approche intuitive de la notion de variation sur la base du registre graphique, qui succède à l'approche également intuitive des variations lors de l'étude des fonctions sinus et cosinus sur la base de la référence à une situation géométrique.
- d'autre part, il nous semble qu'elle visent également, et peut-être davantage, à souligner l'allure de la courbe dans chaque cas, puisque ces deux types d'expression auxquelles correspondent deux types de courbes définissent le contrat d'analogie qui justifie l'emploi par l'élève de la technique point par point pour tracer des fonctions exponentielles.

L'analyse de la suite du chapitre et en particulier des exercices/activités permettra d'établir le poids des objectifs liés à la variation relativement à ceux liés à la représentation graphique de ces fonctions.

L'objet d'enseignement : résolution d'équations exponentielles

L'introduction des équations exponentielles se base sur la définition générale d'une équation :
"Tu sais qu'une équation est une proposition ouverte à une ou plusieurs variables, construite de façon équivalente, et tu as déjà étudié des équations diverses comme :
l'équation du second degré : (...)
l'équation trigonométrique : (...)
Nous allons voir les équations exponentielles comme : $2^x = 4$; $3^{4x} = 9$; (...)
Tu remarques que la variable x apparaît dans la puissance".
La méthode de résolution de ces équations est donnée sur une base ostensive à l'aide de la résolution d'une série d'exercices proposée en exemple du cours. En voici deux :
1er Exemple : "Résous l'équation exponentielle suivante : $3^{4x} = 9$.
Solution : Puisque $9 = 3^2$alors $4x = 2$; Ainsi, $3^{4x} = 3^2$ et $x = 1/2$."
2ème exemple : "$4^x + (17 * 2^x) + 16 = 0$.
Solution : Puisque $4^x = (2^2)^x = 2^{2x} = (2^x)^2$
On pose $y = 2^x$ alors $y^2 - 17y + 16 = 0$

$(y - 16)(y - 1) = 0$

donc $(2^x - 16)(2^x - 1) = 0$

soit $2^x - 16 = 0$ et $2^x = 2^4$ donc $x = 2$;

ou $2^x - 1 = 0$ et $2^x = 2^0$ donc $x = 0$."

Nous nous contenterons ici de souligner les deux points révélateurs des relations qu'entretiennent fonctions et équations dans ces manuels de première :

- L'emploi du *terme de variable* pour différencier les équations exponentielles des autres est comparable à l'emploi de ce terme pour différencier les fonctions exponentielles des autres fonctions. La présence de ce terme est donc uniquement à relier à l'écriture de l'expression algébrique de l'équation ou de la fonction.
- La méthode de résolution proposée est une méthode numérique ou algébrique, en particulier le registre graphique n'est jamais exploité dans les résolutions d'équations fonctionnelles.

Il apparaît que les résolutions d'équations font partie intégrante de l'étude de fonction. Elles situent cette étude dans un cadre numérique/algébrique par opposition à un cadre fonctionnel dans la mesure où elles ne constituent pas une occasion d'emploi du concept de fonction selon son statut outil. La distinction fonction/équation, et donc la distinction variable/inconnue, n'est pas marquée, ceci en conformité avec l'enseignement de la fonction en classe de 10ème

3.2.2 L'objet d'enseignement : Fonction logarithme

Définition de la fonction logarithme

Ce nouvel objet d'enseignement est présenté de manière comparable à l'exponentielle. Le logarithme est d'abord introduit dans un cadre numérique sur la base de calculs de logarithmes permis par la

relation de réciprocité entre logarithme et exponentielle. Cette relation de réciprocité institutionnalise également la fonction logarithme à travers la définition :
"On appelle fonction logarithme de base a la fonction notée $\log_a$ telle que $y = \log_a x$ si et seulement si $x = y^a$, avec $x > 0$ et $a > 0$ et a 1".

Représentation graphique des fonctions logarithmes

Comme pour la technique de représentation graphique de la fonction exponentielle, la représentation graphique est obtenue par la technique point par point, un exemple particulier ($f(x) = \log_2 x$) ayant force de contrat et institutionnalisant l'allure des courbes de cette nouvelle classe de fonctions. Soulignons par ailleurs qu'un tableau de 8 valeurs permet la représentation de cette fonction et que celles-ci sont choisies de façon à ce que la majorité des valeurs de la variable et de la fonction soient entières (3 valeurs fractionnaires pour x auxquelles correspondent 3 valeurs entières, toutes les autres valeurs du tableau sont entières).

La relation de réciprocité des deux fonctions logarithme et exponentielle dans le registre graphique

La relation de réciprocité entre ces deux fonctions est ensuite visualisée dans le registre graphique à travers un exemple particulier : la représentation graphique dans le même repère des deux fonctions $f(x) = y^2$, et $g(x) = \log_2 x$. La symétrie relativement à la droite d'équation ($y = x$) des deux courbes respectives de ces fonctions est constatée et sert à justifier le résultat suivant : "de façon générale, les fonction exponentielle et logarithme, $f(x) = a^x$ et $g(x) = \log_a x$, étant réciproques, leurs courbes représentatives sont symétriques relativement à la droite d'équation ($y = x$)".

Le registre graphique est utilisé pour permettre la visualisation de la relation de réciprocité entre les deux fonctions logarithme et exponentielle. Rappelons-nous qu'en classe de 10ème, la notion de fonction réciproque était introduite sur une base formelle dans le registre algébrique, et qu'elle n'était pas traduite de façon générale dans le registre graphique. La traduction de cette propriété dans le registre graphique n'était que constatée pour un exemple particulier de fonction affine et de sa réciproque à travers un seul exercice. Dans ce chapitre également, la traduction de cette propriété dans le registre graphique n'est que constatée pour un exemple particulier. Cependant contrairement à la classe de 10ème, la réciprocité de ces deux fonctions dans le registre graphique fait ici l'objet d'une institutionnalisation. *Il nous semble que cette institutionnalisation est significative de l'utilisation du registre graphique dans le but de permettre la visualisation d'une notion afin de la rendre plus accessible. Ceci s'explique par l'importance que revêt la notion de réciprocité dans l'étude des fonctions exponentielles et logarithmes : c'est précisément cette relation entre les deux fonctions qui permet de traiter une des tâches principales relevant de l'étude de ces fonctions, la tâche de résolution d'équation.*

L'objet d'enseignement : résolution d'équations logarithmiques

L'approche de cet objet d'enseignement est à comparer dans son esprit, à celle utilisée pour enseigner les résolutions d'équations exponentielles dans la mesure où la résolution des équations logarithmiques se situe dans un cadre numérique/algébrique et la dimension fonctionnelle que permettrait l'exploitation du registre graphique est totalement ignorée.

3.3 Analyse par tâches et techniques des exercices/activités des sections "Fonctions exponentielles" (7 exercices/activités) et "Fonctions logarithmes" (5 exercices/activités).

(voir tableau des tâches et techniques du manuel de 11ème en annexe du chapitre IV)

Nous nous contenterons d'une analyse par tâches et techniques dans la mesure où les exercices/activités de cette section qui relèvent de notre étude se limitent pratiquement à deux tâches, *la représentation graphique d'une fonction exponentielle ou logarithme* donnée par son expression algébrique, et la *tâche d'image/antécédent* apparaissant uniquement dans des situations fonctionnelles dont la relation fonctionnelle est établie dans l'énoncé. La variété des registres et cadres impliqués dans le rapport à construire relativement au concept de fonction s'en trouve d'autant réduite. Les tâches que nous analyserons dans cette section sont donc les tâches de :

- Représentation graphique (resp. 7 et 3 exercices/activités),
- Image/antécédent (resp. 1 et 3 exercices/activités).

La tâche de représentation graphique

Elle apparaît, le plus souvent en tant que tâche unique, ou si elle est couplée à d'autres tâches (voir le tableau des tâches et techniques de la section "Fonctions exponentielles") celles-ci semblent lui être subordonnées dans le sens où elles visent la familiarisation avec ces nouvelles classes de fonctions. Bien que la technique ne soit jamais précisée, nous pouvons aisément supposer que celle exposée dans le cours soit attendue par contrat, les élèves n'en ayant pas d'autres à disposition.

La simplicité des expressions algébriques surtout dans le cas des fonctions exponentielles, de la forme a^x, a^{-x} ou a^{x+b}, a^{-x+b}, ajoutée à la fréquence de la tâche de représentation graphique, laisse à penser que l'objectif envisagé par les auteurs vise davantage une familiarisation avec l'allure des courbes de ces nouvelles classes de fonctions, qu'une réelle maîtrise de leur représentation graphique. Ce qui s'explique probablement par le caractère rudimentaire du statut mathématique de la technique institutionnalisée. Soulignons, en particulier, que celle-ci n'a pas été renforcée, du point de vue mathématique, par une technique de conversion algébrique-graphique basée sur l'effet des coefficients de l'expression algébrique sur le graphe de la fonction, comme cela a pu être envisagé avec les fonctions trigonométriques en classe de 10ème et les fonctions du second degré en classe de 9ème. Il nous semble, cependant, pouvoir déceler, à la formulation des exercices/activités dans le cas des fonctions exponentielles, qu'une certaine sensibilisation aux particularités graphiques de ces fonctions compte tenu des paramètres de leurs expressions algébriques ait été laissée à la charge des élèves. Ainsi, à titre d'exemple les 2 exercices/activités suivants :

1. *" Représente graphiquement chacune des fonctions suivantes : $f(x) = 3^x$ et $g(x) = 3^{-x}$. Vérifie que les deux courbes sont bien symétriques" (exercice 4, tableau des tâches et techniques de la section "Fonctions exponentielles").*

   Le but de cet exercice est davantage de sensibiliser les élèves aux deux représentations types des courbes des fonctions exponentielles (de part et d'autre de l'axe (Oy)) et de la traduction algébrique de ce fait par la présence ou l'absence du signe moins devant la variable x, que d'insister sur la symétrie en tant que transformation géométrique. Nous avons vu que le cadre géométrique n'était pas véritablement envisagé dans l'étude des fonctions en classe de 10ème. Ceci reste vrai en classe de 11ème où la symétrie n'est que constatée ; elle n'est en particulier pas réinvestie dans d'autres exercices pour déduire la courbe d'une fonction à partir de celle d'une autre.

2. *"Représente graphiquement la fonction f(x) t.q $f(x) = 4^{x}$ si $-2 \quad x \quad 0$ et $f(x) = 4^{-x}$ $0 \quad x \quad 2$" (exercice 5, tableau des tâches et techniques de la section "Fonctions exponentielles").*

   Outre la difficulté liée à la nature même de fonctions par intervalles (ce type de fonction avait souvent été relevé en 10ème dans un but de complexification des tâches à réaliser), il nous semble que, comme pour le précédent, le but de cet exercice est d'insister sur la traduction graphique de la présence ou de l'absence du signe moins devant la variable, auquel il faut rajouter, ici, la particularité de l'allure de la courbe avant et après le point de rencontre avec l'axe (Oy).

Ainsi, l'analyse des exercices/activités montre que l'objectif de la *tâche de représentation graphique* se limite à la familiarisation avec l'allure générale des courbes des fonctions exponentielles et logarithmes en tant que trait caractérisant, dans le registre graphique, cette nouvelle classe de fonctions comparativement à leur caractérisation dans le registre algébrique (présence de la variable pour les exponentielles). L'utilisation du registre graphique dans la classe de 11ème n'implique pas un changement de statut de ce registre relativement à son utilisation en classe de 10ème : ce registre n'est pas, en effet, exploité en tant que registre de départ pour de nouvelles tâches ou techniques. Par exemple, la propriété de réciprocité n'est pas impliquée en tant que technique pour l'obtention de la représentation graphique de la fonction logarithme à partir d'une fonction exponentielle (ou inversement). Le registre graphique reste donc essentiellement subordonné au registre algébrique.

La tâche d'image/antécédent

Elle n'est envisagée que dans des situations fonctionnelles. Elles sont relativement fréquentes dans cette section. Leur présence dans ce chapitre de 11ème se conçoit après l'approche qui en a été faite en classe de 10ème. Cependant, la modélisation est ici à la charge de l'énoncé, probablement du fait de la difficulté pour l'élève d'établir une relation exponentielle ou logarithmique à partir d'une situation donnée dans le langage naturel. Par ailleurs, en l'absence d'interprétation de la fonction en termes de variation, les tâche qui lui sont rapportées ne peuvent pas être très variées et se limitent ici à la tâche d'image ou d'antécédent.

Dans ce contexte, les situations fonctionnelles n'apparaissent alors que pouvoir jouer un rôle très réduit dans l'appropriation de la notion de fonction. Elles ne favorisent que peu l'utilisation de la fonction en tant qu'outil, dans la mesure où la fonction qui modélise la situation de départ ne permet pas une véritable étude de cette situation. De même, elles ne peuvent jouer qu'un rôle réduit dans l'appropriation des notions de variable et de variable dépendante dans la mesure où la tâche de modélisation n'est pas à résoudre par l'élève. Pour les mêmes raisons, elles ne permettent que peu de jouer leur rôle potentiel de lien entre diverses disciplines.

Enfin, la répartition des exercices de la section "révision" et leur formulation confirment nos conclusions. Il faut souligner que les situations fonctionnelles et les tâches de représentations graphiques sont rares relativement aux tâches qui relèvent des cadres algébriques et numériques. Un ensemble qui laisse à supposer que l'aspect fonctionnel est encore plus marginalisé relativement à l'aspect algébrique dans la conception de l'enseignement de ces deux nouvelles classes de fonctions.

3.4 Synthèse du chapitre "Exponentielle et logarithme" et de l'enseignement sur les fonctions en classe de 11ème.

L'approche du concept de fonction en classe de 11ème, à travers l'enseignement des deux nouvelles classes de fonctions, exponentielles et logarithmes, reste comparable pour l'essentiel, à celle adoptée en classe de 10ème.

La principale, voire l'unique différence se situe probablement dans l'exploitation faite en classe de 11ème de la propriété de réciprocité introduite en classe de 10ème. Investie selon son statut outil en classe de 11ème, relativement à une utilisation selon son statut objet en 10ème, elle permet d'introduire le logarithme à partir de l'exponentielle, présentation qui justifie son enseignement dans la classe précédente. En retour, la réciprocité des fonctions exponentielles et logarithmes, quoique limitée aux cadres numérique et algébrique peut permettre l'approfondissement du concept.

Cette présentation de la propriété de réciprocité, d'abord selon son statut objet, éventuellement ensuite selon son statut outil met de nouveau l'accent sur l'aspect classique, maintes fois souligné, de l'enseignement palestinien. Les nouvelles notions sont, dans un premier temps, toujours institutionnalisées sur une base formelle qui s'allie avec leur appréhension selon leur statut objet. L'appréhension ultérieure de ces notions selon leur statut outil, dans les rares cas où elle est envisagée, prend alors la forme d'une application qui contribue à leur donner davantage de sens. Ainsi le sens à donner aux notions succède à leur institutionnalisation formelle, approche conforme à un enseignement où l'aspect intuitif et concret des notions n'est pas pris en compte au moment de leur installation.

Par ailleurs, c'est seulement en 11ème que la traduction de la réciprocité dans le registre graphique a été prévue. Ceci s'explique par le fait que les fonctions exponentielles et logarithmes sont les seuls cas particuliers de fonctions réciproques des programmes de 10ème/11ème dont la représentation graphique soit également objet d'enseignement : *l'effet de la relation de réciprocité* peut alors *être visualisé* dans le registre graphique. Cependant la réciprocité dans le registre graphique n'est jamais que constatée. Aucune justification mathématique n'est apportée. Ce qui s'accorde à la fois avec la limitation du cadre théorique général, et la marginalisation du cadre géométrique qui caractérisent aussi bien les programmes de 10ème que ceux de 11ème. Enfin, l'exemple même de la non exploitation de la réciprocité dans le registre graphique confirme d'une part le statut marginal de ce registre relativement au registre algébrique, et confirme d'autre part qu'il n'est pas envisagé dans l'optique de la création d'un cadre fonctionnel.

4. Analyse des manuels de 12ème : Le chapitre "Applications de la dérivation"

Un seul chapitre des manuels de 12ème relève de notre étude, il s'agit du chapitre "Applications de la dérivation". Ce chapitre est composé de 8 sections qui nous concernent toutes, à l'exception des deux premières qui traitent d'applications de la dérivée plus spécifiques de l'analyse. Les 6 sections retenues apparaissent dans l'ordre suivant, leur contenus étant indiqués dans l'organigramme ci-dessous : "Croissance et décroissance", "Extremum", "Concavité/convexité" (qui traite davantage des applications de la dérivée seconde à l'étude de fonctions), "Représentation graphique de fonction", "Applications des extremum", et bien sûr la section "Révision".

Les trois premières sections à analyser présentent donc de nouvelles notions qui apparaissent liées à la celle de variation. Ceci laisse à penser que la fonction est maintenant appréhendée en tant que loi de variation. Dans l'analyse de la partie cours, nous serons attentifs à mettre en évidence comment ce nouveau mode d'appréhension est amené, et comment il s'exprime en termes de cadres et registres. Dans cette optique, il ne faudra pas perdre de vue que ces notions relatives à l'idée de variation sont rencontrées ici pour la première fois, soit après l'installation de l'analyse (limite, continuité et dérivation) qui a fait l'objet des deux premiers chapitres. Les deux dernières sections sont consacrées aux techniques de résolutions des problèmes emblématiques, principaux objectifs d'enseignement en fin de scolarité : il s'agit des problèmes de représentation graphique de fonctions et des situations fonctionnelles. Ces problèmes seront analysés avec les exercices/activités.

4.1 Organigramme du cours du chapitre

3).Définition des notions de croissance et décroissance d'une fonction
.Théorème reliant dérivée 1ère et sens de variation

4).Définition d'extremum relatif et absolu.
.Théorème reliant dérivée 1ère et extremum.

5).Définition de la convexité et concavité de la fonction f.
.Théorème reliant convexité/concavité de la fonction f et signe de sa dérivée 2nde.
.Définition du point d'inflexion
.Théorème reliant extremum relatifs de f et signe de sa dérivée 2nde.

6).Méthode de représentation graphique d'une fonction polynôme de degré au plus 4.

7).Méthode de résolution des situations fonctionnelles (problèmes d'optimisation)

Définitions et théorèmes tous donnés dans le registre verbal/symbolique et visualisés dans le registre graphique

4.2 Description, commentaire et analyse du cours

Pour présenter et analyser les différentes notions de croissance/décroissance, maximum/minimum relatif et absolu, concavité/convexité et aussi point d'inflexion et technique de détermination de la nature d'un extremum par la dérivée seconde, nous nous appuierons sur la description de la première section, dans un esprit de synthèse rendu possible par la similarité dans l'esprit et dans la forme, de ces trois premières sections.

L'objet d'enseignement : Fonction croissante et décroissante

La section concernée dans le manuel de l'élève présente d'emblée la définition de fonction croissante et décroissante sur un intervalle fermé : "Soit f une fonction définie sur [a, b]. Si pour tous si x_1, x_2 appartenant à [a,b] tels que $x_1 < x_2$ on a $f(x_1) \leq f(x_2)$, la fonction f est une fonction croissante sur [a, b] et si pour tout si x_1, x_2 appartenant à [a, b] tels que $x_1 < x_2$ on a $f(x_1) \geq f(x_2)$, la fonction f est une fonction décroissante sur [a, b]".

Le registre graphique utilisé à l'appui permet de visualiser ces nouvelles notions et de mieux expliciter la définition des inégalités ; ainsi les commentaires du manuel de l'élève: "la fonction est croissante quand la courbe monte lorsque x se déplace sur la droite (de même pour une fonction décroissante)" alors que le manuel du professeur conseille de multiplier les représentations de courbes et de demander, à chaque fois aux élèves de comparer les positions de x_1 et x_2 relativement à celle de $f(x_1)$ et $f(x_2)$.

Précisons que c'est à travers cette définition et sa visualisation dans le registre graphique que les élèves rencontrent pour la première fois les nouvelles notions de croissance et décroissance. Les notions liées à la variation de fonction sont institutionnalisées en classe de 12ème directement de façon formelle. Elles ne sont pas contextualisées. Mais, nous l'avons vu, l'enseignement palestinien des mathématiques, dans les classes précédentes, ne démarrait jamais sur du concret. Cette tendance ne peut que s'affirmer en dernière année de cycle scolaire. Le registre graphique permet de lier la relation entre les inégalités en x et en f(x), à l'interprétation de la fonction en termes de variations.

Ce sont en effet les explications sur le changement en x en liaison avec la forme que prend la courbe, qui elle-même fait une allusion implicite au changement en f(x), qui marque la nouvelle forme d'appréhension de la fonction, soit son appréhension en tant que loi de variation. Le manuel du professeur semble cependant insister davantage sur la manipulation des inégalités laissant l'idée de variation quelque peu implicite. L'interprétation de la fonction en tant que loi de variation est-elle alors plutôt laissée à la charge des élèves ? Nous tenterons d'éclaircir ce point par la suite. Par ailleurs il ne faut pas oublier que le professeur peut, de sa propre initiative, insister davantage sur cette nouvelle interprétation de la fonction. Mais il est fort possible également que cet enseignement ayant lieu après l'installation de l'analyse, l'interprétation de la fonction comme loi de variation soit considérée comme allant de soi : ce serait alors dans ce sens que se baserait le recours à l'intuition graphique en termes de variation en x, et de variation conséquente en f(x).

La section se poursuit avec la mise en place du théorème reliant variations et signe de la dérivée 1ère. Ce théorème est très clairement présenté dans le but de remplacer, au niveau technologique et donc technique, la définition de fonction croissante/décroissante et la manipulation des inégalités dans l'organisation mathématique relative à la tâche d'étude des variations d'une fonction. Le manuel du professeur précise en effet qu'il est nécessaire de convaincre l'élève, "à l'aide de deux ou trois exemples", de la difficulté d'appliquer la définition pour déterminer les intervalles de croissance et de décroissance d'une fonction, la technique de la dérivée 1ère lui sera préférée de façon systématique. Soulignons que l'institutionnalisation de ce théorème s'appuie également sur une visualisation graphique puisque les commentaires du manuel de l'élève mettent l'accent sur le changement dans l'angle de la tangente avec l'axe (Ox) en tant qu'indicatif du signe de la dérivée.

La suite de cette section, que nous venons de décrire, revêt de l'importance de deux points de vue :

- Du point de vue de l'organisation mathématique qu'elle implique. Nous voyons que la tâche d'étude des variations de fonction sera à résoudre par la technique justifiée par le théorème plutôt que par celle justifiée par la définition des inégalités. Dans un même esprit et de façon plus stricte encore, la définition des inégalités n'est pas une seule fois exploitée pour la résolution de la tâche d'extremum. Cela n'est, certes, pas étonnant sur le plan écologique : dans la mesure où les différentes technologies relatives à une même tâche, sont envisagées non seulement dans le même chapitre, mais dans la même section du chapitre, il est normal que la plus performante annule la moins performante. Mais cette présentation du cours souligne que le travail des inégalités d'un point de vue technique et dans le but d'un réinvestissement ultérieur en analyse, n'est pas un objectif en soi. La technique des inégalités serait donc travaillée, si jugée nécessaire en analyse en 12ème palestinienne, dans le cadre d'une autre organisation mathématique. *Elle met en lumière, une fois de plus, l'accent mis dans l'enseignement des mathématiques en Palestine, sur l'acquisition de techniques que souligne la forte segmentation des objets d'enseignement en tâches souvent uniques, traitées par une technique également souvent unique, et si souvent relevé en classes de 10ème -11ème.*

- D'un autre point de vue, les explications relatives au registre graphique, et qui aboutissent à une lecture concernant la dérivée (changement dans l'angle des tangentes), que l'on retrouve également dans les deux sections suivantes, semblent indiquer que l'interprétation d'une courbe comme informant sur le changement est déjà un acquis. L'appréhension de la fonction comme loi de variation semblerait aller de soi, ou tout au moins ne pas nécessiter beaucoup d'insistance aux yeux des auteurs, après l'enseignement de l'analyse, et n'est pas à prendre véritablement en compte par l'enseignement.

En conséquence, le second mode d'appréhension de la fonction apparaît plutôt comme aller de soi, et se baser fortement sur l'intuition apportée par le registre graphique. Registre graphique qui non seulement aide à institutionnaliser les notions nouvelles dans le registre verbal-symbolique mais semble même remplacer les démonstrations de théorèmes absentes dans ce chapitre.

Il faut également souligner l'absence notoire du cadre numérique. Il constituait pourtant dans les classes précédentes le cadre principal utilisé pour l'installation des nouvelles connaissances. L'intuition sur les variations, rendue nécessaire par le nouveau mode d'appréhension de la fonction à mettre en place, semble annuler de fait le recours à ce cadre, remplacé par le recours au registre graphique.

Les nouvelles tâches et leurs techniques associées imposés par l'enseignement de ces nouvelles notions

Ces nouveaux objets d'enseignement qu'impose le nouveau mode d'appréhension de la fonction amènent une organisation mathématique qui tranche avec celle caractérisant l'étude de fonctions jusque-là. Les nouvelles notions institutionnalisées dans ce chapitre imposent des tâches et des techniques nouvelles, à l'exception de la tâche de représentation graphique de fonction dont seule la technique est nouvelle, qui définissent l'activité de l'élève relativement au concept de fonction et sont donc censées induire chez lui l'appréhension de ce concept selon son nouveau mode. Ces tâches, ainsi que les techniques amplement détaillées dans le cours sous forme d'exemples résolus, sont les suivantes : la *tâche de croissance/décroissance* par la technique de la dérivée première, la *tâche d'extremum* par les deux techniques de la dérivée première et seconde, la *tâche de concavité/convexité* et de *point d'inflexion* par la dérivée seconde sont toutes des tâches totalement inexistantes dans les classes précédentes.

Elles sont bien sûr présentées sous forme de tâches distinctes dans les trois premières sections concernées. Elles se révèlent, avec l'institutionnalisation des *deux objets d'enseignement* que sont *la représentation graphique de fonction*, et *la résolution de situations fonctionnelles* (voir dans l'organigramme, les deux dernières sections du chapitre), pouvoir également être envisagées comme des sous-tâches dans le cadre de la résolution de ces problèmes emblématiques marquant la fin du cycle scolaire de l'étude de fonctions. L'analyse par tâches/techniques précisera la relation entre les différentes tâches/techniques envisagées comme sous-tâches de ces deux problèmes emblématiques, et ces mêmes tâches/techniques envisagées comme tâches uniques. Par ailleurs, l'analyse par tâches/techniques fera ressortir, entre autres, quels critères décident du choix de la technique à appliquer pour résoudre la tâche d'extremum ; quel est le rôle des tâches de concavité/convexité et de point d'inflexion inexistantes du côté français ? Quel lien existe-t-il entre ces tâches caractérisant l'étude de fonction en classe de 12ème et celles la caractérisant dans les classes précédentes ?

4.3 Analyse par tâches et techniques des exercices/activités

(voir tableau des tâches et techniques du manuel de 12ème en annexe du chapitre IV)

Nous nous limiterons à une analyse par tâches et techniques, l'analyse des exercices/activités n'apportant rien de nouveau, relativement à celle du cours, en termes des cadres et registres exploités. En particulier, les registres utilisés se limitent aux registres verbal/symbolique, et surtout algébrique. Le registre graphique est inexistant sinon en tant que registre d'arrivée dans le cadre de l'obtention de la courbe d'une fonction. Le cadre numérique n'est pas explicitement exploité, ou à l'initiative de l'élève s'il en ressent le besoin, le cadre géométrique qui faisait quelques apparitions timides, dans les classes de 10ème et de 11ème, et uniquement à titre de familiarisation avec certaines préoccupations géométriques, est totalement inexistant. Quant au cadre fonctionnel, nous verrons après l'analyse de cette banque d'exercices/activités dans quelle mesure il est effectivement sollicité.

Les tâches explicitement demandées que l'on retrouve dans les exercices/activités des différentes sections de ce chapitre sont les tâches de :

-Variation (6 exercices/activités), -Extremum par la dérivée première (4 exercices/activités), -Extremum par la dérivée seconde (2 exercices/activités), -Concavité/convexité (2 exercices/activités), -Point d'inflexion (1 exercices/activités), -Expression fonctionnelle (4 exercices/activités), -Représentation graphique (5 exercices/activités),

-Extremum dans le cadre des problèmes d'optimisation (14 exercices/activités).

Les **tâches de variation, d'extremum** par la dérivée première ou seconde, de **concavité/convexité**, de **point d'inflexion** apparaissent en tant que tâches uniques dans les exercices/activités relatifs à la section concernée. Ils se conçoivent dans le cadre d'un entraînement à la technique exposée dans le cours à travers des exemples. Les différentes techniques à connaître sont donc enseignées dans le cadre de l'ostension. La technique de résolution, généralement unique, relative à une tâche donnée est attendue par contrat ; dans les rares cas où un choix entre deux techniques doit être fait, nous pensons en particulier à la tâche d'extremum, la technique attendue est précisée. En voici un exemple : "Détermine les maximum et les minimum relatifs des fonctions suivantes en utilisant si possible la dérivée seconde, si cela n'est pas possible utiliser la dérivée première :
a) $f(x) = (x + 4)^{3/2} + 3$; b) $f(x) = x^2 - 1$; (...)".

Les tâches de **représentation graphique** et **d'extremum dans le cadre des problèmes d'optimisation** apparaissent comme des problèmes où les différentes tâches/techniques institutionnalisées en début de chapitre, vont pouvoir être réinvesties en tant que sous-tâches à réaliser, par contrat, dans ces problèmes posés en unique tâche.

La tâche de Représentation graphique

La technique relative à cette tâche est exposée dans le manuel de l'élève de même qu'il est précisé qu'elle ne concernera que les fonctions polynômes de degré au plus 4 :

- déterminer les points d'intersection de la courbe de f avec l'axe (Oy), soit rechercher f(0).
- calculer f'(x) et f''(x).
- étudier le signe de f'(x) qui nous informe sur les intervalles de croissance/décroissance de la fonctions, ainsi que sur les extremums relatifs et absolus de la fonction,
- étudier le signe de f''(x) qui nous informe sur la concavité/convexité de f et sur l'existence de points d'inflexion,
- rassembler toutes ces informations dans un tableau de signe (équivalent du tableau de variation français).
- représenter les différents points (d'intersection, extremum) obtenus, puis en utilisant les information du tableau joindre les points par une ligne courbe continue.

Le contrat précise donc qu'il faut étudier à la fois le signe de la dérivée première et celui de la dérivée seconde. La nature des extremums relatifs est à déterminer par la dérivée première. L'importance de la *tâche de concavité/convexité* et de *point d'inflexion*, tient nous semble t-il dans la possibilité qu'elle donne d'obtenir une courbe *précise* en se passant de la panoplie des tâches (tâches d' "Asymptote/limite/tangente/ point d'intersection/position relative de courbes/équation de droites"), que l'on retrouve en classe de première française, et qui ont justement pour objectif de rendre plus précise la représentation graphique de la fonction à représenter. Elles nous apparaissent comme un moyen mis au point par l'enseignement palestinien pour éviter l'intervention des tâches/techniques nécessitant le recours au cadre géométrique ou à l'étude de limite, ou autre, dans l'étude de fonctions. Ceci s'explique dans le contexte général, que nous avons maintes fois souligné, d'une forte segmentation des objets de d'enseignement. Ainsi, les calculs de limites existent bien en 12ème palestiniennes mais ils relèvent d'une autre organisation mathématique en liaison avec l'enseignement de l'analyse ; ici l'organisation mathématique locale concernée correspondant à l'application de la dérivée à l'étude de fonctions et ne prévoit pas d'inclure des calculs de limites.

Pour être plus claire, il nous semble par exemple, que *la tâche de concavité/convexité* permet d'éviter *l'étude des directions asymptotiques de la courbe* mais aussi *l'étude des limites aux bornes du domaine de définition*, dans la mesure où les fonctions à représenter sont bien choisies pour cela puisqu'elles se limitent aux fonctions polynômes de degré 4 : elles sont donc continues sur leur domaine de définition et la connaissance de la convexité/concavité suffit, par contrat, à représenter correctement la courbe aux bornes du domaine.

A ce stade, il nous faut faire quelques remarques concernant la tâche de représentation graphique par la technique valable en classe de 10ème/11ème et la tâche de représentation graphique par la technique des variations :

- La technique point par point des classes précédentes s'appuyait sur un contrat de ressemblance, les fonctions d'une même classe ayant toutes même allure. Aussi, la représentation graphique de fonctions ne se concevait que dans le cadre de l'étude d'une classe (ou sous-classe) de fonctions ; ainsi ont été abordées les représentations graphiques des fonctions affines, des fonctions du second degré, des fonctions avec valeur absolue, des fonctions avec partie entière, des fonctions trigonométriques et des fonctions exponentielles et logarithmes. La technique des variations dispense de cette organisation de l'étude des fonctions par classe d'appartenance. La puissance de la technique des variations tient justement au fait qu'elle dépasse toutes ces frontières et permet d'envisager l'étude d'une fonction, donc sa représentation graphique, sans en avoir rencontré au préalable un exemple de référence. *Mais alors, le fait de confiner la tâche aux seules fonctions polynomiales, ne risque t-il pas de constituer un obstacle à la prise de conscience de l'intérêt et de la puissance de cette nouvelle technique par rapport à la précédente ?*

- En fait, il nous semble que les différentes sous-tâches envisagées en tant que tâches uniques (car elles persistent d'après la section révision où elles sont en proportions importantes relativement aux tâches emblématiques de représentation graphique et d'extremum), sont là pour contrebalancer quelque peu cette limitation de la représentation graphique aux seules fonctions polynomiales. En effet, puisqu'elles concernent non seulement les fonctions précédemment étudiées (à l'exception bien sur des fonctions logarithmes dont la dérivée n'a pas encore été étudiée) mais toutes celles exprimables par une expression algébrique connues (fonctions avec racine carrée voire avec racine cubique, fonction rationnelle, etc., ..). Mais ces tâches n'aboutissant pas à la représentation graphique de la fonction, les élèves développeront-ils la conviction de la possibilité d'étendre la technique à toutes les fonctions algébriques ? Cela est donc essentiellement laissé à la charge de l'élève, les exemples éventuels que pourrait montrer le professeur de sa propre initiative ne contrebalanceraient pas cette évidence (n'oublions pas que nous sommes dans une classe d'examen et que le professeur ne peut multiplier les activités hors programme).

- Par ailleurs, aucun lien explicite n'est fait entre les deux techniques : les fonctions à représenter, à l'exception des fonctions de second degré, ne sont pas les mêmes. Si la technique des variations permet a priori de percevoir les variations de fonctions à travers les tracés de courbe, qu'en est-il des tracés connus depuis les classes précédentes puisque aucune activité ne prend en compte une relecture ne serait-ce que limitée au registre graphique, en ce sens. La représentation de fonction en tant que tâche peut-elle tout de même réussir à promouvoir l'appréhension de la fonction comme loi de variation ?

Il nous semble qu'il y a là matière à investigation, le confinement de la tâche de représentation graphique à certaines fonctions polynomiales qui, nous l'avons souligné, s'explique du point de vue de la philosophie pédagogique de l'enseignement palestinien, ne va-t-il pas occasionner une perte de sens ? En effet, la forme que prend la tâche de représentation graphique de fonction par la technique des variations dans le système palestinien s'inscrit dans le cadre de la séparation des domaines mathématiques entre eux, caractéristiques des plus frappantes de l'enseignement palestinien, et que nous avons constatée tout au long de l'étude des manuels des classes étudiées. Cette séparation des domaines mathématiques s'accordent, d'un autre côté, avec l'accent mis sur l'acquisition de techniques qui occasionnent un découpage des savoir-faire à acquérir en tâches et techniques bien délimitées voire quelque peu stéréotypées. La théorie anthropologique et la théorie de l'organisation par tâches/techniques/technologie mettent en lumière ici le lien indissoluble existant entre l'organisation mathématique d'un enseignement donné et la philosophie pédagogique générale de cet enseignement.

Enfin, pour terminer avec la tâche de représentation graphique et les différentes sous-tâches qui la composent, il faut souligner que l'insistance même des auteurs sur ces sous-tâches, qui persistent sous la forme de tâches uniques, met l'accent sur l'importance du registre algébrique dans l'organisation mathématique relative au concept de fonction en classe de 12ème. En effet, comme le montrent les exercices suivants, l'expression algébrique de la fonction constitue la variable principale permettant aux concepteurs des manuels à la fois de varier les exercices/activités à proposer et de modeler la difficulté même de la tâche à proposer :

1) Utilise la dérivée première pour déterminer les intervalles de croissance et de décroissance des fonctions suivantes :

$f(x) = \sqrt{(x^2+4)}$; $f(x) = 1/x + x$; $f(x) = (x-2)^{1/3}$ (voir tableau des tâches et techniques, section "Croissance, décroissance", tirés des exercices 2 et 3).

Et

2) Etudie la convexité/concavité des fonctions suivantes :

$f(x)=(x+4)^{3/2} + 3$; $f(x)= x^2-1$ (voir tableau des tâches et techniques, section "Concavité/convexité", tirés des exercices 1 et 4);

La technicité algébrique requise devient alors l'objectif principal de ces différentes tâches et semble prendre, de fait, le dessus sur le sens éventuel à donner aux différentes notions mises en jeu (notion de variation, d'extremum, de concavité/convexité, etc.).

La tâche d'extremum dans le cadre des problèmes d'optimisation

La section correspondante commence par l'introduction suivante : "On rencontre dans les domaines des sciences, géométrie économie et ailleurs des problèmes qui consistent à déterminer le maximum ou le minimum d'une quantité variable. Ces problèmes sont le plus souvent posés dans le langage naturel. En voici, quelques exemples qui te permettront de voir comment s'opère leur conversion du langage naturel au langage mathématique, puis comment déterminer les extremums recherchés".

Il est donc très clair que les situations fonctionnelles sont conçues uniquement comme des problèmes d'optimisation (de détermination de maximum/minimum). La technique de résolution relative à cette tâche est présentée à l'aide de cinq exemples dont nous examinerons le premier :

"**Exemple** : Soit un terrain rectangulaire de périmètre égal à 600 m. Détermine les dimensions de ce terrain de sorte que sa surface soit maximale.

Solution : - On pose x et y les dimensions du terrain et S, sa surface. Alors S = xy.

- Les données du problème sont que le périmètre du terrain est de 600m. Il est demandé de déterminer les valeurs de x et y pour que S soit maximal.
- Il faut donc rechercher l'équation qui relie les variables entre elles de telle façon que la quantité variable dont on recherche l'extremum soit une fonction d'une seule variable dépendante.
- On peut alors écrire d'après les données : $2x + 2y = 600$

  D'où $y = 300 - x$

  Alors $S = x\,y = x\,(300-x)$
- Ainsi, S est une fonction de x. On peut donc écrire $S(x) = x\,(300-x)$
- On dérive deux fois l'équation obtenue comme s'il s'agissait d'une fonction pour déterminer l'extremum recherché. On recherche les valeurs annulant la dérivée première (le détail est donné). On substitue ces valeurs dans l'expression de la dérivée seconde (le détail est donné) et on décide d'après le signe obtenu, si l'extremum est un maximum ou un minimum".

Par opposition aux situations fonctionnelles de la classe de 10ème, il semble que celles de 12ème soit plus clairement à interpréter comme modélisables par des fonctions appréhendées comme loi de variation (voir les situations fonctionnelles en classe de 10ème dans le paragraphe 2.1.7 de ce chapitre) ; c'est du moins ainsi que nous comprenons la description de ces problèmes comme consistant à "*déterminer le maximum ou le minimum d'une quantité variable*". En effet, le fait que cette *quantité variable* puisse atteindre un maximum ou un minimum fait, ne serait-ce qu'implicitement, allusion à une variation dans les valeurs que prend la quantité variable. Ceci par opposition à la seule détermination d'une relation entres variables qui caractérisait les situations fonctionnelles de la classe de 10ème. D'ailleurs, cette relation était a priori statique et relevait du cadre algébrique plutôt que fonctionnel, d'autant plus que, nous l'avions souligné, l'utilisation du terme *variable* dans les manuels de 10ème et 11ème palestiniens, n'était pas significatif de l'interprétation de la fonction en tant que loi de variation, dans la mesure où ce terme était indifféremment utilisé pour les équations ou les expressions algébriques de fonctions.

En fait, nous avions montré qu'en classe de 10ème, la relation entre variables une fois établie seulement, pouvait être interprétée comme représentant une fonction. Justement ce rapport à l'équation décrivant la relation entre les différentes variables se retrouve, nous semble t-il, en classe de 12ème : la relation à établir relève du cadre algébrique. Une fois établie seulement, elle s'interprète comme une fonction : "*ainsi, S est une fonction, on peut donc écrire S(x)*" et aussi "*on dérive l'équation obtenue comme s'il s'agissait d'une fonction*". C'est donc l'activité de recherche d'un extremum qui donne à l'équation valeur de fonction, alors qu'en classe de 10ème, l'interprétation de l'équation algébrique en termes de fonction n'était pas très convaincante, la relation était quasiment l'unique tâche demandée et surtout n'était jamais réinvestie dans une étude de la situation fonctionnelle liée à l'idée de variation.

C'est essentiellement la tâche d'extremum qui inscrit ce problème dans le cadre fonctionnel nouveau. Les situations fonctionnelles ne sont en particulier pas l'occasion de réinvestir en les contextualisant d'autres notions comme celles de variations, d'opérations algébriques ou de se familiariser avec de nouvelles notions comme celle de comparaison de fonction. Cette forme stéréotypée des situations fonctionnelles, donnant d'autant plus de poids à l'aspect technique de la résolution, nous pousse à nous interroger sur la sollicitation effective du cadre fonctionnel par les élèves : Si ce cadre est effectivement celui visé par les auteurs, il est difficile de certifier que l'élève soit conscient de travailler dans ce cadre, autrement dit, il est difficile de certifier que l'élève interprète effectivement la fonction comme une loi de variation. Nous ne serions pas étonnée, quoique cela nécessiterait des investigations supplémentaires, que la technique imposée par le contrat didactique pour *la tâche de détermination d'un extremum dans une situation fonctionnelle* joue un rôle négatif au niveau de l'appréhension potentielle de la fonction en tant que loi de variation. Les auteurs imposent en effet pour la résolution de cette tâche, l'utilisation de la technique de la dérivée seconde. Il est très clairement précisé que la technique de la dérivée première ne doit être utilisée qu'en cas d'impossibilité d'appliquer celle de la dérivée seconde, soit si la dérivée seconde est nulle pour l'extremum repéré, et ceci ne se produit que dans un seul des 5 exemples du cours.

La technique souhaitée par le contrat dispense donc d'une étude des variations de la fonction, dispense également de l'établissement d'un tableau de variations, et en l'absence de registre graphique puisque la tâche de représentation graphique n'est jamais demandée dans une situation fonctionnelle, toute lecture faisant référence à l'appréhension de la fonction comme loi de variation ne risque t-elle pas d'être compromise par la technique de la dérivée seconde qui se base essentiellement sur des considérations numériques et de signe, et a donc tendance à occulter la dimension *variation* à donner à la fonction ? Il nous semble déceler également à travers la forme que prend la tâche d'extremum dans les situations fonctionnelles du système palestinien une interférence entre organisation mathématique et philosophie pédagogique générale qui aboutit à laisser essentiellement à la charge de l'élève la conception de la fonction selon son mode d'appréhension comme loi de variation.

4.4 Conclusion sur l'enseignement de la fonction en 12ème et synthèse de l'évolution de l'enseignement du concept de fonction au cours du lycée.

L'étude de fonction en classe de 12ème se produit après l'installation des notions d'analyse de limite, continuité et dérivation. L'enseignement de la fonction en classe de 12ème est conçu en rupture totale avec le concept de fonction installé jusque-là. L'appréhension ensembliste de la fonction est remplacée par une appréhension comme loi de variation sans que ce passage ne soit particulièrement pris en compte au niveau du cours : il apparaît *aller de soi* après installation de l'analyse ou être essentiellement laissé à la charge de l'élève. Cela se conçoit dans le cadre d'un enseignement classique, ne prenant pas appui sur l'aspect intuitif et concret des notions qui sont alors directement mises en place de manière formalisée.

L'appréhension de la fonction comme loi de variation, avec la mise en place de notions nouvelles, se traduit par une organisation mathématique conséquente qui diffère fondamentalement de celles caractéristiques de l'appréhension comme loi ensembliste :

Ainsi, les notions générales de fonction, relation, injection, opérations algébriques, composition, réciprocité, mais aussi périodicité, etc., qui institutionnalisaient le concept de fonction en classe de 10ème, ne sont pas revues en classe de 12ème. Elles sont remplacées par de nouvelles notions liées à la variation.

De même les problèmes emblématiques et les tâches/techniques qui leur sont liées, de représentations de fonctions par la technique point par point et de résolution des équations/inéquations correspondant aux fonctions étudiées qui instituaient le rapport au concept de fonction en 10ème/11ème sont remplacés par les problèmes également emblématiques, et les tâches/techniques qui leur sont liées, de représentation graphique par la technique de variation, et de problèmes d'optimisation. L'organisation mathématique inscrite dans un premier temps dans les cadres numérique et algébrique, seuls envisageables en l'état des connaissances de l'élève, du fait de l'appréhension ensembliste de la fonction, cède la place à une organisation mathématique qui relève davantage du cadre fonctionnel.

Mais le fonctionnement dans le cadre fonctionnel que l'on attendrait des élèves et qui s'impose par le nouveau mode d'appréhension de la fonction est, à défaut d'être pris en charge par l'enseignement, paradoxalement rendu possible par un découpage de l'activité des élèves en tâches/techniques très précises voire stéréotypées, et l'usage de techniques qui tendent à occulter la dimension variation de la fonction. Un tel découpage s'exprime en termes de cadres et registres associés, par une limitation de ceux-ci encore plus stricte que celle relevée dans les manuels des classes précédentes. Le seul cadre auquel on puisse a priori se référer est le cadre fonctionnel, qui apparaît subordonné au cadre de l'analyse dans la mesure où l'appréhension de la fonction comme loi de variation qui signe le fonctionnement dans le cadre fonctionnel, succède à l'installation de l'analyse. De même que le seul registre qui jouisse d'un statut effectif est le registre algébrique. En effet, le registre graphique en particulier, s'il persiste dans le cours, dans le but d'illustrer les nouvelles notions à mettre en place grâce à l'intuition des variations qu'il porte en lui, n'a qu'un statut marginal dans les exercices/activités puisque son apparition se limite au tracé de certaines fonctions appartenant à la seule classe de fonctions polynomiales. Cette présence circonscrite de la représentation graphique explique qu'il ne puisse être réinvesti en tant que registre dans d'autres tâches, en particulier dans la tâche d'équations/inéquations dont on ne peut manquer de souligner la disparition totale en classe de 12ème dans le cadre de l'étude de fonctions. Le registre du tableau de variations, avec une présence circonscrite à la sous-tâche de détermination des variations d'une fonction dans le registre algébrique ne peut jouer qu'un rôle marginal dans l'appropriation du concept.

C'est donc à travers une variété de tâches/techniques restreintes et précises qui s'allie avec une limitation conséquente des cadres et registres où faire fonctionner le concept de fonction que doit se forger, chez les élèves, une appréhension de la fonction comme loi de variation. Cette limitation de l'espace de fonctionnement du concept de fonction apparaît comme la réponse de l'enseignement palestinien pour rendre possible la résolution des tâches/techniques, savoir-faire attendus des élèves, à défaut d'une réelle appréhension de la fonction comme loi de variation.

5. Programmes palestiniens et programmes américains : quelques constatations

Nous avons souligné dans notre introduction une certaine similarité, du point de vue des contenus, entre la conception des programmes jordano-palestiniens et celle des programmes américains sur les fonctions, du fait de l'influence culturelle américaine sur cette région du monde.

Nous nous baserons pour le mettre en lumière sur la publication par le NCTM (National Council of Teachers of Mathematics) du "Principles and Standard for Schools Mathematics" [NCTM, 2000]. La première publication de ces principes et standards, dont les points essentiels ont été repris dans la publication de l'année 2000, est paru en 1989 sous le titre de : "Curriculum and Evaluation Standards for school mathematics". Cette étude avait pour objectif d'évaluer les programmes mathématiques américains existants et de proposer des programmes nouveaux, tant du point de vue des contenus mathématiques que du point de vue des méthodes pédagogiques à adopter. Ceci, de façon à proposer un ensemble mieux en accord avec les évolutions actuelles du monde, en particulier les développements technologiques modernes, tenant compte du développement psycho-cognitif des élèves, s'adressant à tous et non pas réservé à une élite scientifique. On peut remarquer que ces directives générales sont également celles soulignées par les programmes français.

Remarquons cependant que ces programmes ne sont en rien obligatoires : il s'agit d'un outil et guide valable aussi bien pour les professeurs dans la préparation de leurs cours, que pour les concepteurs de programmes, éditeurs, les décideurs au niveau local de l'état et au niveau national en matières d'éducation, etc. En fait, les programmes varient fortement d'un état américain à l'autre mais les propositions du NCTM reflètent, en général une vision moderniste de l'enseignement sur les deux plans des contenus et pédagogique. Ainsi, les programmes des états n'ayant pas, ou pas encore, adopté cette réforme proposée par l'association propose un enseignement plus classique, qui pourrait davantage encore se rapprocher des programmes palestiniens.

L'enseignement des mathématiques dans les classes allant de la 9ème à la 12ème, correspondant à l'enseignement secondaire supérieur, est divisé en cinq domaines principaux :
"Nombres et opérations", "Algèbre", "Géométrie", "Mesures" et "Analyse des données et probabilité".
L'enseignement des fonctions fait partie intégrante de l'algèbre qui recouvre quatre champs principaux de connaissances que doivent pouvoir développer les élèves :

- "Understand patterns, relations and functions",
- "Represent and analyse mathematical situations using algebraic symbols",
- "Use mathematical models to represent and understand quantitative relationships",
- "Analyse change in various context".

Le premier champ de connaissances recouvre, entre autres, le lien entre les notions de fonction et de relation, les opérations sur les fonctions (opérations algébriques, composition et réciproque). Les fonctions sont donc introduites sur la base de la définition générale ensembliste et comme pour les programmes palestiniens l'enseignement des opérations sur les fonctions, dont la réciproque, se conçoit dans le cadre d'un exposé général sur les fonctions. Ce champ recouvre également la connaissance des propriétés de classes de fonctions dont les fonctions exponentielles, polynomiales,

rationnelles, logarithmes et périodiques (les fonctions sont énumérées dans cet ordre). Soulignons que ces classes de fonctions sont abordées sans aucune référence à la notion de variation. On peut donc supposer que les représentations graphiques de fonctions seront obtenues, par la technique point par point ou par des techniques numériques-algébriques basées sur un contrat d'analogie comme nous l'avons remarqué dans les programmes palestiniens.
Le deuxième champ concerne plus directement les savoir-faire algébriques à développer.

Le troisième point fait référence à la modélisation mathématique de situations : de façon générale, les programmes NCTM insistent sur l'importance de l'activité de résolution de problèmes et sur la nécessité de proposer à l'élève des situations réelles à modéliser de façon à mieux faire le lien entre les mathématiques et le monde réel et à donner plus de sens à l'activité mathématique. Ici, un lien est plutôt à faire avec les directives générales des programmes français. Cependant le problème se pose de savoir de quelle façon ces directives seront mises en applications. Après tout, les programmes jordano-palestiniens font état de l'importance des mathématiques dans la vie de tous les jours, mais leur approche des situations fonctionnelles, par exemple, présente ces applications mathématiques comme une activité quelque peu externe aux mathématiques dont l'exploitation, en conséquence, ne réussit pas entièrement à promouvoir le sens à donner au concept de fonction. Par ailleurs, précisons une fois de plus que l'absence d'une prise en compte explicite de la notion de variation, limite assez considérablement, d'après notre analyse des programmes palestiniens et français, les activités possibles sur les situations fonctionnelles.

Enfin, soulignons que le quatrième point qui pourrait faire penser à la prise en compte de cet aspect loi de variation est simplement ainsi détaillé par les commentaires suivants : "students should approximate and interpret rates of change from graphical and numerical data". Il s'agit donc d'une familiarisation avec la notion de taux de variation et non pas de variation (sens de variation). Sur ce point P. W Thompson fait remarquer, dans son analyse des curriculums scolaires américains relativement au concept de fonction, que : "In today's mathematics curriculum there is no emphasis on function as covariation[10]. In fact, there is no emphasis on variation. I examined the most recent editions of two popular K-9 test series and found that the closest they come to examine variation is to have students construct tables of data, and even there is a profound confusion between the ideas of random variable and variable magnitude. (...) Finally, I am surprised that so little has been investigated in regard to students concepts of variable magnitude, the focus instead being on variable as literal representation of number. It seems, to me anyway, that a progressively more abstract notion of covariation rests upon a progressively more abstract image of variable magnitude." [Thompson, 1994]

Nous avons également consulté un manuel d'enseignement de cycle secondaire "HBJ Algebra 2 with trigonometry"[11] pour voir comment ces lignes générales pouvaient être appliquées. Ce manuel se

[10] L'auteur oppose ici "function as covariation" et "function as correspondance", comme nous opposons la fonction comme loi de variation et la fonction comme loi ensembliste.
[11] A. Coxford and J. Payne (1991) "HBJ Algebra 2 with trigonometry", 2nd edition, Harcourt Brace Javonovich Publishers.

trouve être précisément le manuel des élèves de la classe de mathématiques en langue anglaise que nous avons eu à enseigner à notre arrivée en Palestine. Les auteurs, tous les deux, "professor of mathematics education" à l'université précisent dans la préface : "The focus ins HBJ Algebra program is on helping students to become successful within a curriculum that moves in the direction of NCTM for school mathematics".

Nous avons pu constater de grandes similarités, dans la succession des chapitres relatifs aux fonctions et dans la manière dont les différents objets d'enseignement étaient traités. Nous proposons en annexe du chapitre IV, le sommaire des chapitres de ce manuel relatif à l'enseignement de la fonction. Précisons que ce manuel s'adresse grossièrement à tout le cycle secondaire supérieur, ce qui signifie que tous les chapitres ne sont pas enseignés dans une même classe. Un chapitre peut même être étalée sur deux voire trois années (nous pensons particulièrement au chapitre "Exponential and logarithmic functions"). Enfin, précisons qu'aux Etats-Unis d'Amérique, l'enseignement de l'analyse, *calculus*, n'est pas obligatoire en général avant l'entrée à l'université. Ce manuel s'il devait être enseigné entièrement dans le système palestinien correspondrait alors aux classes de 9ème - 11ème.

Ainsi, on retrouve dans les programmes américains deux points caractéristiques du programme palestinien :

- la fonction est introduite en tant que loi ensembliste en liaison avec la notion de relation,
- l'aspect loi de variation est largement marginalisé et n'est éventuellement pris en compte que de façon implicite dans l'étude de certains cas particuliers de fonctions. Cet aspect ne peut donc apparaître de façon explicite qu'avec les débuts de l'analyse.

6. Conclusion

L'analyse institutionnelle séparée de chacune des deux institutions du cycle secondaire supérieur palestinien et des classes de Seconde et Première françaises ayant été effectuée, nous nous proposons dans cette conclusion de mettre en rapport les principales caractéristiques de chacun des deux enseignements de la notion de fonction.

Modes d'appréhension de la fonction : place laissée à la définition générale

Du côté Français, où les programmes stipulent de façon très claire qu'une définition formelle de la fonction n'est envisageable ni en Seconde, ni même en Première et que les fonctions étudiées doivent se limiter aux fonctions définies sur un intervalle, les deux modes d'appréhension de la fonction, comme processus et comme loi de variation, se côtoient dès l'introduction de la notion. La notion de variation, et celles qui peuvent lui être liées comme la notion d'extremum, est mise en place très tôt dans l'enseignement français, grâce d'une part à une approche concrète et intuitive permise par les situations fonctionnelles et des registres de représentation adaptés, comme le registre graphique et le tableau de variation, mais aussi grâce à l'accent mis dès le départ sur l'étude des différentes classes de fonctions numériques.

Du côté palestinien, la fonction est proposée aux élèves sur la base de la définition ensembliste en liaison avec la notion de relation. Cette présentation formelle de la fonction, centre son enseignement dès les débuts de la classe de 10ème, sur les notions de domaine, de but, d'image (d'antécédent), d'opérations algébriques, de composition et de réciproque. La notion de variation, par contre, est largement marginalisée aussi bien au niveau de la classe de 10ème que de la classe de 11ème. Seule une approche intuitive en est envisageable, quoique limitée à des classes particulières de fonctions, les fonctions trigonométriques en 10ème et les fonctions exponentielles en 11ème. Cette approche ensembliste semble réduire considérablement l'ensemble de tâches, mettant en jeu le concept de fonction, susceptibles d'être proposées aux élèves. Celles-ci se limitent essentiellement, et de façon assez caractéristique, à des tâches d'image/d'antécédent, de représentation graphique par la technique point par point appuyée, quand la classe de la fonction le permet, par une technique numérique/algébrique, les représentations graphiques de fonctions se justifient alors sur la base d'un contrat d'analogie (par opposition à une justification sur la base des variations), ainsi qu'à des tâches relevant plus généralement du cadre algébrique, notamment des résolutions d'équations (plus rarement d'inéquations) sans dimension fonctionnelle.

L'évolution de l'enseignement de la fonction se poursuit du côté français par l'apparition progressive d'une appréhension de la fonction selon un mode plus général, la fonction prend graduellement le statut d'objet alors que l'appréhension en tant que loi de variation persiste et se renforce, et que l'appréhension comme processus devient implicite au fur et à mesure que les tâches lui correspondant entrent dans le topo de l'élève. Cependant, cette appréhension plus générale de la fonction ne se base pas sur la prise en compte de la définition générale de la fonction. La condition d'unicité de l'image, en tant que caractéristique principale de la fonction, est en effet assez marginalisée dans l'enseignement français tout au long des deux premières années de lycée.

Du coté palestinien, ce n'est qu'en classe de 12ème que la notion de variation est mise en place de façon explicite, sur une base directement formelle par l'intermédiaire du théorème liant les variations au signe de la dérivée, donc après l'installation de l'analyse. Le deuxième mode d'appréhension de la fonction n'est donc pas envisagé de façon graduelle et progressive mais est conçu en rupture avec l'enseignement de la fonction installé jusque-là. L'organisation mathématique de tâches/techniques/technologie qui en résulte est alors totalement nouvelle puisque mettant en jeu des notions relatives à la fonction non connues jusque-là.

Ainsi dans l'enseignement français, l'installation et l'évolution de la notion de fonction suit un processus dialectique de plusieurs étapes, où deux modes d'appréhension au moins se côtoient toujours. Alors que l'enseignement palestinien de la fonction prévu en deux étapes, se caractérise par la prise en compte d'un mode d'appréhension principal différent à chaque étape, sans continuité palpable dans l'évolution de la première vers la seconde étape. Par ailleurs, la marginalisation de la définition ensembliste dans l'enseignement français, n'a pas forcément de conséquence néfaste quant à la résolution des différentes tâches à proposer aux élèves à ce niveau scolaire mais pourrait poser problème du côté du savoir mathématique visé.

Comment se fait l'étude des variations ?

L'analyse de l'institution française a fait ressortir que la notion de variation était centrale dans l'organisation de l'enseignement français alors qu'elle était largement marginalisée dans l'enseignement palestinien avant la classe de 12ème. Cette position de la notion de variation dans chacun des deux enseignement, est en totale cohérence avec la manière dont la fonction est appréhendée dans chacun des deux enseignement, et avec les techniques d'étude des variations et leurs évolutions dans chacune des deux institutions. Ainsi, en France, où la notion de variations de fonctions est mise en place d'abord de façon intuitive et concrète, l'étude des variations se réalise principalement en conséquence, sur la base de techniques de lecture dans les registres de représentation les mieux adaptés à cette notion. Par la suite, la formalisation de la notion, sur la base de la définition des inégalités, impose de nouvelles techniques de résolution de la tâche d'étude des variations de fonctions. L'institutionnalisation des notions d'opérations de fonctions (dans le sens large) amène à son tour de nouvelles techniques pour la résolution de cette même tâche. Enfin, avec l'installation des débuts de l'analyse, la technique justifiée par le théorème liant signe de la dérivée et sens de variations, efface les précédentes.

Dans l'institution palestinienne, la notion de variation est quasiment absente avant la classe de 12ème. L'accent est davantage mis sur l'acquisition de la notion de variable tout au long des deux années de 10ème et de 11ème. En conséquence la tâche d'étude des variations n'existe pas dans l'organisation mathématique décrivant ces deux années d'enseignement. La notion de variation apparaît sur la base formelle de la définition des inégalités en classe de 12ème. Cette définition n'est cependant pas impliquée en tant que technologie justifiant la technique de résolution de cette tâche. Une seule technique est alors disponible pour la tâche d'étude des variations de fonctions, celle que justifie le théorème liant signe de la dérivée et sens de variations de fonctions.

Implication des registres de représentation dans chacun des deux enseignements

Nous avons vu que l'enseignement français utilise la diversification des registres d'une façon plus prononcée en général que l'enseignement palestinien même si l'accent est mis sur l'utilisation de deux registres principaux, les registres algébrique et graphique.

Dans l'enseignement français, il n'y a pas de bouleversement dans la nature des registres utilisés. On retrouve les mêmes registres (registre graphique, algébrique, du tableau de variation, verbal-symbolique et tableau de valeurs) tout au long des deux années de 2nde et de 1ère, le changement se situe davantage dans le rôle et le niveau d'implication de chacun d'eux. Cet appui sur les mêmes registres est dans une certaine mesure à mettre en relation avec l'approche pédagogique adoptée où l'enseignement sur les fonctions est construit dans un esprit de continuité. La position du registre verbal-symbolique reste quasiment inchangée durant ces deux années. Le tableau de valeurs et le tableau de variations, plus fréquents aux débuts de l'enseignement sur les fonctions, en raison de la nécessité de se familiariser, d'une part, avec certaines des notions nouvelles en Seconde, plus facilement exprimées à l'aide de ces registres, et de se familiariser, d'autre part, avec ces mêmes registres de représentation, notamment le tableau de variations, en tant que registres nouveaux, ont tendance à se marginaliser par la suite. Leur rôle respectif se circonscrit : le tableau de valeurs est relégué à la charge éventuelle de l'élève alors que le tableau de variations n'est plus sollicité qu'en tant que registre intermédiaire facilitant le passage de l'étude des variations de la fonction à sa représentation graphique.

Les registres graphique et algébrique restent les registres majeurs de l'enseignement des fonctions dans le système français, leur importance s'affirme avec l'évolution de cet enseignement. Mais le registre graphique change radicalement de statut. Il est largement utilisé au départ, du côté de l'institution, pour l'institutionnalisation des savoirs nouveaux sur une base intuitive, et du côté de l'élève en tant que registre de traitement dans la phase de familiarisation avec ces savoirs nouveaux. Par la suite, son statut en tant que registre de traitement régresse au fur et à mesure que se renforce l'utilisation du registre algébrique en relation avec la formalisation des différentes notions et des exigences plus grandes du point de vue des justifications mathématiques que l'élève doit apporter dans la résolution des différentes tâches. Le registre graphique se transforme et prend essentiellement le statut de registre de conjecture et de contrôle de l'erreur mais en tant que tel il est essentiellement laissé à la charge de l'élève.

Du côté palestinien, l'organisation de l'enseignement centré sur la définition ensembliste, donc sur l'idée de correspondance d'une valeur à une autre, et la marginalisation de la notion de variation imposent, dans les classes de 10ème et 11ème, des tâches relevant essentiellement des cadres numérique et algébrique. Des registres variées (diagramme sagittal, couples ordonnés, graphe de fonctions discrètes, etc.) relevant du cadre numérique sont utilisés, de façon quasi-systématique pour installer les notions nouvelles, en relation avec l'appréhension ensembliste de la fonction en classe de 10ème. La généralisation de ces notions se fait du cas fini / (registres du) cade numérique au cas infini / (registre algébrique du) cadre algébrique dans une certaine transparence dans la mesure où la continuité de la variable n'est pas véritablement prise en compte et se limite à un ensemble de quantités constantes, le plus souvent entières. Par la suite, quand ces notions sont à approfondir et avec l'étude des quelques fonctions numériques aux programmes des classes de 10ème et 11ème, seul le registre algébrique persiste véritablement. Le registre graphique et du tableau de valeurs sont précisément impliqués dans l'obtention de la représentation graphique des différentes fonctions. Mais le registre graphique est également quelquefois utilisée en tant que registre de traitement pour la résolution de certaines tâches dont la technique algébrique n'est pas exigible des élèves. En classe de 12ème, il sert à l'illustration des nouvelles notions à institutionnaliser, il jouit donc d'un statut intuitif mais le seul registre vraiment présent en classe de 12ème est bien le registre algébrique. En particulier le registre graphique n'est jamais exploité en tant que registre de conjecture.

Place de la modélisation dans l'étude de fonctions, plus généralement liens entre différents domaines mathématiques ou différentes disciplines.

L'institution française apparaît plus soucieuse que l'institution palestinienne de présenter un enseignement des mathématiques qui insiste autant que possible, à la fois sur les liens existants entre les différents domaines mathématiques, voire entre différentes disciplines, et sur l'aspect pragmatique des mathématiques. Les fonctions apparaissent, nous l'avons déjà remarqué dans notre chapitre 1, un objet d'élection en ce sens. La pratique de la diversité des cadres mathématiques dans un enseignement donné permet en général de mettre en relation les différents domaines mathématiques leur correspondant, alors que la modélisation de situations fonctionnelles constitue un exemple spécifique de mise en rapport de deux cadres, le cadre fonctionnel et le cadre d'origine de la situation qui peut aussi bien être issu des mathématiques ou de situations externes (autres disciplines ou vie quotidienne).

Lors de l'introduction du concept de fonction en France, les situations fonctionnelles occupent une partie non négligeable de l'enseignement. Outre l'intérêt que nous venons de leur souligner, elles aident à introduire sur une base concrète les nouveaux objets d'enseignement liés à la fonction et présentent l'objet fonction en tant qu'outil pragmatique permettant l'étude de divers phénomènes du monde réel, ce qui vise à donner plus de sens à l'objet fonction lui-même, mais aussi à travers cet objet, aux mathématiques dans leur ensemble. Les situations d'origine géométrique sont généralement les plus fréquentes. Ceci s'explique par le caractère familier du domaine géométrique pour les élèves français depuis le collège, donc la facilité relative d'obtenir des relations fonctionnelles à partir de situations géométriques. Mais le lien entre le domaine géométrique et le domaine du fonctionnel ne se limite pas aux situations fonctionnelles : avec l'introduction des transformations et de certaines propriétés de fonctions traduisibles dans le cadre géométrique, comme les propriétés de parité ou de périodicité, puis avec l'introduction de l'analyse permettant une représentation graphique plus précise et présentant la courbe comme un objet géométrique que l'on étudie par l'intermédiaire d'une panoplie de tâches appropriées (tangente, points d'intersection avec d'autres courbes, positions relatives de courbes, direction asymptotique, etc.), le domaine géométrique apparaît comme un domaine mathématique privilégié aux côtés du domaine fonctionnel.

Le domaine algébrique reste cependant le domaine mathématique principal de l'enseignement des fonctions à ce niveau scolaire. Ceci se conçoit dans la mesure où le cadre fonctionnel est un cadre en construction, qui se présente essentiellement comme sous-cadre de l'algèbre avant de devenir plus tard un sous-cadre de l'analyse. Il nous semble alors que les tâches algébriques résolues selon de nouvelles techniques mettant en jeu la fonction en tant qu'outil (résolution graphique d'équations, étude de signe d'expression algébrique par l'outil variation, traitement d'inégalités en se référant aux variations des fonctions correspondantes), par rapport à des techniques algébriques souvent plus familières des élèves, vont contribuer fortement à souligner les liens entre domaine de l'algèbre et domaine du fonctionnel en aidant à distinguer le sous-cadre fonctionnel du cadre de l'algèbre en même tant que se constitue la dimension outil de l'objet fonction.

Par opposition, l'enseignement palestinien centre davantage son enseignement de la fonction sur les cadres numérique et algébrique. Le fait qu'il n'y a pas véritablement de création de cadre fonctionnel dans les classes de 10ème et 11ème ne permet pas de lier le cadre fonctionnel à un autre cadre. On souligne bien quelques tentatives très localisées de prise en compte de certaines propriétés géométriques comme avec la technique de représentation graphique des fonctions valeurs absolues, et en 11ème avec la traduction de la propriété de réciprocité dans le registre graphique. Mais ces tentatives ne permettent pas d'envisager un cadre géométrique intégré à l'étude de fonctions. Il n'y a pas par exemple d'étude de parité, la propriété de périodicité n'est pas institutionnalisée selon un point de vue géométrique, les techniques numérique/algébrique de représentations graphiques de courbes, valables en 10ème et 11ème, contournent nous l'avons vu, toute considération géométrique.

Le cadre fonctionnel ne se constitue véritablement que comme sous-cadre du cadre de l'analyse. Seules les situations fonctionnelles peuvent permettre alors d'établir un lien entre le domaine du fonctionnel et les autres domaines mathématiques ou les autres disciplines impliquées dans leur cadre d'origine. Cependant, les situations fonctionnelles de la classe de 12ème présentent, comme généralement l'ensemble des exercices apparaissant dans le système palestinien, une formulation très standard. Elles se ramènent très précisément à une tâche de recherche d'extremum à résoudre uniquement selon les techniques de la dérivée première, ou de préférence, de la dérivée seconde. Ces limites très strictes imposées aux activités relatives aux situations fonctionnelles réduisent d'autant, nous semble t-il, le réseau de liens susceptible d'être établi entre le cadre d'origine des situation fonctionnelles et le cadre fonctionnel. Par ailleurs, le fait que les situations fonctionnelles ne sont conçues que sous la forme d'applications des connaissances mathématiques et ne sont jamais impliquées dans la génération de ces connaissances mathématiques, contribue également à accentuer cette vision hétérogène des mathématiques et plus généralement des disciplines scientifiques entre-elles. La modélisation mathématique, et plus généralement, la pratique de la diversité de cadres ne peuvent avoir qu'un rôle très réduit dans la construction des connaissances mathématiques relatives au concept de fonction de l'élève palestinien.

Initiative accordée aux élèves à travers la résolution des exercices

L'enseignement palestinien de la fonction se caractérise fortement, et dès son introduction, par une marge de manœuvre laissée à l'initiative des élèves très réduite. En effet, il se présente comme un enseignement axé sur l'apprentissage de techniques de résolution d'exercices standards : les exercices sont courts, se décomposent en peu de tâches, les questions sont formulées de façon toujours identiques, peu de notions sont à mettre en relation dans un même exercice, peu d'exercices classés problèmes, dans le sens français du terme, sont proposés aux élèves. La technique de résolution à adopter est toujours demandée ou attendue par contrat. La présentation même du cours sous la forme d'exercices résolus, succédant aux principaux résultats technologiques à retenir, renforce ce sentiment. Cette conception de l'enseignement explique, en partie, le recours à une faible diversité de registres de représentation dans la mesure où ceux-ci déterminent dans une grande mesure les techniques de résolution : une faible diversité de registres implique une faible diversité de techniques relativement à une tâche donnée.

Du côté français la variété des techniques de résolution disponibles pour un même type de tâches s'explique donc, en partie, par le recours de l'enseignement à une plus grande variété de registres et de cadres, mais l'organisation progressive de l'enseignement, et en particulier l'évolution de cet enseignement, d'une approche intuitive à une approche formelle, explique aussi que plus d'une technique puisse exister, dans l'institution française, pour la résolution de tâches impliquant une même notion. Par ailleurs, la richesse de l'organisation mathématique du concept de fonction dans l'enseignement français, s'explique aussi par la présence d'un nombre plus important d'objets d'enseignement. De nombreux objets d'enseignement existant dans l'institution française sont, en effet, absents dans l'institution palestinienne : citons par exemple les notions de parité, de transformation, les techniques de résolution graphique d'équations, la technique de variation par opérations sur les fonctions, sans compter l'inclusion des notions de limites, asymptotes, tangente dans la représentation graphique des fonctions, ainsi qu'une plus grande variété de classes de fonctions étudiées. Mais la question qui se pose du côté français est dans quelles mesures cette organisation de l'enseignement qui doit, a priori, permettre à l'élève de développer plus de flexibilité dans la mise en rapport des connaissances, lui donner la possibilité de décider de lui même de la technique de résolution la mieux adaptée pour une tâche donnée, éventuellement lui donner également plus de capacités à envisager des tâches ou des techniques non enseignées peut-elle atteindre effectivement ces objectifs ?

Il nous semble devoir envisager l'éventualité que certains professeurs, au moins, pour tenir compte du niveau plus faible de leurs élèves et pour pallier à la difficulté d'enseigner un programme somme toute plus chargé du point de vue des contenus à enseigner, mais aussi probablement plus complexe étant donné le réseau de liens plus fourni à établir entre les différentes connaissances et qui se traduit par une organisation praxéologique plus riche en tâches, techniques et technologies à leur transmettre, tendent à restreindre leur enseignement par une pédagogie plus directive, cernant de façon stricte les tâches et les techniques demandées aux élèves et réduisant de façon sensible leur marge de manœuvre potentielle

Le poids du sens à donner aux notions dans l'organisation de l'enseignement

L'accent porté, dans l'institution française, sur le sens à donner aux notions à mettre en place est sensible à différents niveaux et nous les résumons par les point suivants :

- souci d'introduire les premières notions relative à l'objet fonction sur une base intuitive et concrète en accordant une place importante à l'activité de résolution de problèmes, et notamment à l'activité sur les situations fonctionnelles, et en s'appuyant sur des registres (notamment le registre graphique) auxquels l'institution rattache une grande force d'intuition ;
- souci d'introduire dès le départ un maximum de notions afin de proposer plus tôt à l'élève un ensemble d'activités plus riche. Ceci implique une évolution du concept de fonction respectant une certaine continuité dans la mesure où l'objet fonction conserve ses caractéristiques principales le long de ces deux années. Ce sont ainsi davantage les techniques de résolution plus que les tâches mettant en jeu le concept de fonction qui vont subir les plus grandes transformations.
- Un appui plus conséquent sur la diversité des cadres et registres, comme nous avons pu le rappeler dans les points précédemment discutés, mais aussi assez souvent une installation des notions selon leur double statut outil/objet. Nous avons pu constater d'ailleurs que la présentation de certaines notions selon leur statut outil était réalisée pour des notions envisagées essentiellement de façon formelle (comme par exemples les opérations sur les fonctions, les transformations de fonctions mais aussi la notion de réciproque). Cette présentation vise précisément le but de leur donner plus de sens dans la mesure où leur présentation de façon contextualisée, ou sur une base intuitive, n'a pu être envisagée ou ne l'a été qu'à une échelle très réduite (par exemple à l'occasion de rencontres informelles de la notion dans la résolution d'exercices précédents son institutionnalisation).

Par opposition nous avons constaté dans l'institution palestinienne un cadre théorique très réduit au profit d'un aspect technique fortement marqué, qui se traduit par un enseignement présentant les traits suivants :

- les notions nouvelles sont envisagées de manière directement formelle, et sont rarement envisagées selon un autre statut que le seul statut objet ;
- l'organisation en tâches, techniques et technologies se caractérise par un ensemble peu riche en notions nouvelles surtout durant les deux premières années du cycle scolaire étudié ;
- l'enseignement palestinien ne s'appuie pas sur la diversité des cadres. Le cadre fonctionnel a même du mal à se dégager durant les années d'enseignement de 10ème et 11ème, or l'absence de ce cadre signifie que l'idée de dépendance fonctionnelle primordiale dans la construction du sens relatif à l'objet fonction n'est que difficilement prise en compte. De même l'enseignement palestinien ne met en jeu que peu de registres de représentation, ce qui se traduit par une restriction des techniques disponibles pour la résolution d'une tâche donnée, et qui rejoint le trait précédemment considéré d'une restriction de l'organisation praxéologique décrivant l'enseignement palestinien du concept de fonction ;
- l'évolution du concept de fonction des classes de 10ème/11ème à la classe de 12ème s'inscrit dans le contexte d'une rupture très marquée dans la mesure où les caractéristiques de l'objet fonction, et donc l'organisation praxéologique relative à cet objet dans la classe de 12ème, n'ont que peu en commun avec celles relatives à l'objet fonction dans les deux classes de précédentes ;
- les connaissances sont présentées de façon fortement segmentées, ce qui induit un découpage important des exercices et activités proposés aux élèves.

La mise en relation des connaissances dans un tel enseignement, et le sens à donner aux notions que cette mise en relation est susceptible d'induire, semble a priori difficile à concevoir. Elle est en tous cas entièrement laissé à la charge de l'élève.

L'analyse institutionnelle que nous avons menée dans ce chapitre a permis de caractériser l'objet fonction et son fonctionnement dans chacune des deux institutions et a fait ressortir les différences radicales existants dans la transposition didactique du concept de fonction dans chacun des deux systèmes d'enseignement étudiés. L'objet fonction naît et mène une vie spécifique au système d'enseignement auquel il appartient. Cette vie de la fonction, qui définit sa nature en tant que concept, s'exprime à travers un ou plusieurs modes d'appréhension qui diffèrent dans chacune des phases de son évolution dans l'institution. Ces modes d'appréhension eux-mêmes se reflètent par l'organisation praxéologique, et l'évolution de celle-ci, qui décrit à la fois la vie du concept dans chaque institution mais aussi les activités demandées aux élèves et qui doivent permettre l'appropriation du concept et des notions qui lui sont liées. Les tâches qui composent chacune des deux organisations praxéologiques et leurs techniques respectives se laissent analysées en termes de cadres et de registres associés, mais aussi en terme de statut outil ou objet des notions impliquées qui se jouent dans une dialectique spécifique d'un enseignement à l'autre : notre première hypothèse de *tout équilibré* se trouve donc bien vérifiée.

Ce tout équilibré qui reflète la vie du concept de fonction dans chacun des deux systèmes d'enseignement, et notamment sa traduction en termes de registres et cadres, et de statut outil ou objet des notions enseignées, retentit de façon sensible sur les grandes intentions didactiques et les méthodes pédagogiques spécifiques de chaque système. L'enseignement du concept de fonction du point de vue de ses contenus s'accorde, du côté français, avec une approche éducative mettant l'accent sur l'aspect intuitif des notions et le sens à leur donner au moment de leur introduction, alors que du côté palestinien c'est au prix d'une approche centrée sur l'apprentissage de techniques de résolution d'exercices standards qu'une présentation des notions nouvelles sur une base directement formelle dans le contexte d'un cadre théorique général fortement réduit est rendu possible. Notre approche analytique a donc permis d'éclairer le degré d'imbrication existant entre méthodes pédagogiques et intentions didactiques, d'une part, et contenus mathématiques à enseigner, d'autre part. Notre deuxième hypothèse se trouve donc également vérifiée.

Cette analyse institutionnelle qui nous a permis de définir le rapport de chacune des deux institutions à l'objet fonction constitue donc la base de l'analyse a priori selon laquelle nous étudierons, dans le prochain chapitre, le rapport personnel des élèves à ce même objet. Nous sommes en effet maintenant capable de savoir ce que l'on peut attendre des élèves, de part et d'autre, et par conséquent d'envisager sur quelles bases un test commun pourra être établi malgré les différences radicales existant dans la transposition didactique du concept de fonction ici et là. Par ailleurs, notre analyse met également en lumière un point primordial, qui tient davantage de l'aspect pédagogique de l'enseignement que de ses contenus mathématiques, et qu'il ne nous faudra pas perdre de vue lors de l'analyse des résultats des élèves : les méthodes pédagogiques adoptées dans l'enseignement palestinien sont caractéristiques d'un enseignement directif, où une marge de manœuvre et d'initiative minime laissée à l'élève laisse a penser qu'il aura du mal a priori à se dégager des strictes limites de l'enseignement reçu. Celles de l'institution française, par contre, qui se veulent beaucoup plus soucieuses du développement génétique de l'élève et visent à lui donner plus de flexibilité dans la mise en rapport des connaissance et de capacité à réinvestir ses connaissances dans des contextes peu familiers, sont cependant fortement dépendantes du rôle et de l'intervention du professeur.

PARTIE C

ANALYSE DES REPONSES DES ELEVES
A UN QUESTIONNAIRE COMMUN

Chapitre V

Le questionnaire

Introduction

L'un des questionnements auquel notre étude de la transposition didactique du concept de fonction tente de répondre est le sens que prend le concept de fonction pour les élèves de chacun des deux systèmes d'enseignement français et palestinien. Nous avons donc voulu insister davantage sur le poids institutionnel qui pèse sur les conceptions des élèves en tant que résultant de l'enseignement reçu, plutôt que sur l'aspect cognitif individuel de leurs conceptions. Ce questionnement vise à refléter, dans le cadre de la transposition didactique, l'écart entre le savoir à enseigner et le savoir enseigné. C'est dans l'objectif de tenter d'y répondre que nous avons élaboré un test dont la présentation et l'analyse font l'objet de ce chapitre.

Objectifs du questionnaire

Ce test vise à évaluer les connaissances des élèves en fin de cycle scolaire d'étude sur les fonctions et son élaboration s'appuie sur deux volets d'étude :

- l'analyse institutionnelle effectuée dans les deux chapitres précédents qui vise à caractériser ce que l'on est en droit d'attendre des élèves en termes de connaissances sur les fonctions. En particulier, quel chemin ont-ils effectué au niveau de l'appropriation de la notion de fonction en tant qu'objet et quelles tâches/techniques sont-elles supposées être de leur ressort ?
- ce que nous avons retenu des différentes études réalisées sur la notion de fonction et que nous avons présenté au chapitre I.

  Ces deux volets d'étude constituent la base de l'analyse a priori de notre test.

Populations concernées et conditions de passation du questionnaire

Le questionnaire a été passé par une classe de 1ère S de 30 élèves, en France, et par deux classes de 12ème scientifique, de 30 et 31 élèves chacune, de deux lycées différents, dans la ville de Ramallah dans les territoires palestiniens. L'un est un lycée public de garçons, et l'autre est un lycée privé mixte. L'enseignement public n'est pas mixte dans les territoires palestiniens, et nous n'avons pas réussi à obtenir l'autorisation de faire passer le test dans le lycée de filles, la directrice expliquant que le lycée avait connu trop de fermetures depuis le début de l'année du fait de la situation politique. C'est pour ne pas nous limiter à une population de garçons que nous avons alors choisi le lycée privé mixte. Nous avions prévu deux classes en France également mais finalement, le professeur contacté a été malade et n'a pas pu faire passer le questionnaire dans sa classe. Il a été proposé aux élèves dans le courant de l'année 2001, au mois de janvier pour les élèves palestiniens de façon à ce que l'enseignement en analyse n'ait pas trop progressé, mais aussi pour ne pas être gêné par les échéances liées à la préparation de l'examen de fin d'études scolaires. Du côté français, le questionnaire a été passé vers la fin du mois de mai, de façon à être sûr que la totalité du programme prévu sur les fonctions avait bien été enseigné. Les élèves français ont donc une demi année d'enseignement en moins, mais il aurait été difficile de faire accepter la passation en terminale d'un questionnaire en grande partie très éloigné des programmes et de ce qu'on peut attendre au baccalauréat. Nous avons demandé aux élèves d'indiquer leur nom, de façon à assurer un peu plus de sérieux de leur part. Cependant le questionnaire n'a pas été présenté comme une évaluation individuelle mais comme un test d'évaluation des connaissances de l'ensemble des élèves, dans le but d'une comparaison entre l'enseignement des fonctions en France et en Palestine, ce qui n'a d'ailleurs pas manqué de motiver certains élèves palestiniens. Notre idée première lors de l'élaboration de ce test était de le proposer aux élèves sans limitation de temps, mais ceci s'est bien sûr avéré techniquement difficile. Nous avons pu obtenir que 2 heures environ soient accordées aux élèves de part et d'autre : 2 périodes d'enseignement (45 mn chacune), suivies du temps de la récréation du côté palestinien, et deux heures consécutives de T.D du côté français. Il faut, par ailleurs, souligner le contexte politique difficile que connaissent les territoires palestiniens depuis septembre 2000 et qui n'a pas manqué d'interférer sévèrement sur la bonne marche de l'éducation.

I. Analyse a priori du questionnaire

Notre questionnaire se compose de deux parties : la première partie vise à tester les capacités des élèves à reconnaître une fonction dans des situations variées; la seconde vise à évaluer la capacité des élèves à résoudre certaines tâches. Le questionnaire complet est donné en annexe du chapitre 5.

I.1. La première partie : Reconnaître une fonction

Certes le type d'enseignement reçu et en particulier la variété des fonctions rencontrées ne peuvent pas être sans influence sur la capacité à reconnaître une fonction. Mais il nous semble par ailleurs, que la force d'un enseignement se traduit aussi du côté des élèves par leurs capacités à intégrer une conception plus générale de la notion enseignée. Notre idée, à travers cette première partie du questionnaire est alors d'évaluer la capacité des élèves à se départir du confinement a priori du concept enseigné, pour reconnaître une fonction exprimée sous une forme non standard, et par là même d'évaluer les points forts et les points faibles de chacun des deux enseignements relativement à cette capacité. Ainsi, si nous nous interrogeons forcément à travers cette question sur les connaissances individuelles des élèves relativement au concept de fonction, nous l'envisageons en tant que résultant de l'enseignement reçu, c'est ce que la comparaison entre les deux groupes d'élèves permettra de mettre particulièrement en lumière.

Cette capacité est par ailleurs significative de l'évolution des connaissances de l'élève vers une conception de la fonction en tant qu'objet puisque l'élève serait capable de voir au delà du registre de représentation utilisé et de la spécificité de chacune des situations proposées, afin d'y repérer les éléments caractérisant une fonction. L'unanimité que semble faire ce dernier point dans la majorité des travaux menés sur la fonction que nous avons présentés au chapitre I, et ce malgré leurs divergences théoriques, a guidé notre choix d'y consacrer une partie de notre test. Quelques-unes de nos questions ont d'ailleurs été inspirées ou apparaissent dans les tests réalisés dans certains de ces travaux (en particulier ceux de (Dubinski, 1992), (Sfard, 1992) et (Even, 1993)). Nous avons également retenu des questions du test de Noguès qui s'est intéressée tout particulièrement à la conceptualisation de la notion de fonction chez des élèves de 2nde française (Noguès, 1993). Nous avons été attentive à ne choisir, pour chacune des situations proposées, qu'un terrain où autant que possible aucune classe ne serait trop favorisée par rapport à l'autre.

I.1.1. Rôle des registres utilisés

Notre but n'est pas véritablement de tester les registres de représentation de fonction. Nous avons vu dans les chapitres précédents que les registres de représentation étaient incontournables dans l'enseignement de la fonction. Ils déterminent en effet le rapport qui se construit avec le concept de fonction dans la mesure où ils définissent les techniques de résolution des différentes tâches, voire le choix même des tâches susceptibles d'être proposées à l'élève. Nous les avons envisagés ici, comme un support permettant de varier les situations à proposer aux élèves. Il ne s'agit pas d'ailleurs du seul critère sur lequel nous nous sommes basée pour les faire varier, ainsi la nature des ensembles (ensembles numériques à variables réelles, ensembles numériques discrets, ensembles non numériques) et celle de la loi fonctionnelle (loi algébrique, loi ne pouvant s'exprimer par une équation, etc.) constituent des critères d'importance non moins grande. Par ailleurs, pour des raisons de faisabilité mais également pour éviter d'avantager les élèves d'un enseignement par rapport à l'autre, il n'a pas été possible de proposer une situation dans chacun des registres de représentation de fonctions disponibles. Nous avons retenu alors le registre verbal, utilisé dans une seule situation en tant que registre unique de représentation de fonction, et quasi-systématiquement en tant que registre d'accompagnement ou en remplacement d'un autre registre notamment du registre algébrique. Le registre graphique fait également l'objet d'une situation. Pour éviter de favoriser les élèves d'un des deux enseignements quand le registre de représentation était plus familier aux uns qu'aux autres, nous avons pris soin de nous référer à des fonctions, ou au contraire à des relations non fonctionnelles, présentant des points de similarité avec d'autres fonctions censées être connues des élèves.

I.1.2. Potentialité des élèves relative au traitement de cette question selon leur système d'enseignement respectif

Spécificité des élèves français

- Cette question n'est pas véritablement familière aux élèves français. Une définition de la fonction, quoique informelle, apparaît effectivement dans le manuel de seconde. Cependant l'analyse des programmes et manuels a montré que l'élève français n'est jamais mis en position de s'assurer que les conditions de cette définition sont bien vérifiées par l'objet manipulé dans les exercices/problèmes ou étudié en cours. Ainsi, nous n'avons rencontré qu'une seule tâche de discrimination relation/fonction explicitement posée, dans chacun des deux manuels de seconde et de première. Elle est de plus donnée dans le seul registre graphique. En fait, dans les différentes tâches composant les exercices /problèmes que l'élève français rencontre le long des deux années de 2nde et de 1ère, la fonction est donnée de façon explicite ou implicite (essentiellement alors dans ce que nous avons appelé des situations fonctionnelles), et la question de vérifier s'il s'agit bien d'une fonction ne se pose pas : il est par contrat supposé que l'on a affaire à une fonction.
- Par ailleurs, les élèves français risquent de n'avoir pas rencontré d'autres types de fonctions que les seules fonctions numériques usuelles des programmes. En effet, si le programme de seconde français ne manque pas de souligner la nécessité de proposer aux élèves des fonctions autres que les seules fonctions usuelles, ce point y est, nous l'avons vu, insuffisamment développé et le manuel retenu, en partie du fait de la densité des tâches et de leurs techniques associées à enseigner aux élèves, avait du mal à diversifier véritablement les exemples de fonctions et plaçait ailleurs ses priorités d'enseignement. Les seules fonctions familières aux élèves français sont donc les fonctions algébriques continues sur un intervalle auxquelles il faut ajouter cependant les suites étudiées en 1ère en tant qu'exemple de fonctions discrètes et qui n'ont pas été incluses dans notre étude.

Spécificité des élèves palestiniens

- Ce type de question, ou les différentes tâches qui la composent, sont plus familières aux élèves palestiniens. Ils les ont rencontrées lors de l'installation des notions de relation et de fonction au début de la 2nde, et par la suite à chaque nouvelle fonction algébrique introduite, la démarche de vérification que l'objet est bien une fonction par application de la définition est toujours présente, même si elle est en général à la charge du professeur dans la mesure où elle fait partie du cours.

- Si les fonctions proposées au départ, dans l'enseignement palestinien, sont essentiellement numériques et discrètes, donc fréquemment représentées dans les registres de représentation appropriés tels que les couples ordonnés, les diagrammes sagittaux, les listes de valeurs, ou quoique plus rarement à l'aide du registre ensembliste, les exemples de fonctions ont rapidement tendance à se limiter par la suite à des fonctions numériques continues dont la loi s'exprime par une équation algébrique.
- Les élèves palestiniens ont cependant beaucoup moins d'aisance que les élèves français dans la manipulation des fonctions algébriques notamment dans l'étude de fonctions aboutissant à leur représentation graphique. Ils ont aussi beaucoup moins de références face au registre graphique. Nous avons vu que les seules fonctions algébriques que l'élève palestinien sait, en principe, représenter graphiquement sont les fonctions polynômes de degré au plus 4, et que la majorité des autres expressions algébriques de fonctions étaient rencontrées dans le cadre des situations fonctionnelles sous forme de problèmes d'optimisation où les fonctions ne faisaient jamais l'objet d'une représentation graphique.

I.1.3. Critères généraux d'analyse des réponses

Dans les réponses des élèves nous nous attacherons d'une part à relever les critères sur lesquels ils se basent pour accepter ou rejeter une situation comme représentant une fonction et d'autre part à repérer certaines erreurs typiques relevées dans les différentes études sur les fonctions que nous avons présentées dans la partie 3 du chapitre I. L'importance que nous accordons aux critères de justification qu'apportent les élèves, est une spécificité de notre étude et n'apparaît pas dans les questionnaires proposés dans certains des travaux auxquels nous nous référons au début de notre thèse. Ceci pourrait s'expliquer par deux raisons principales :

- Tous ces travaux sont des recherches menées à partir de curriculums anglo-saxons ou à tendance culturelle anglo-saxonne. Le concept de fonction y étant installé de façon similaire, l'analyse des réponses des élèves n'a pas révélé de divergence notoire sur ce point. La tendance culturelle anglo-saxonne du curriculum palestinien/jordanien ne fait pas de doute pour nous, et la comparaison avec le curriculum français fondamentalement différent, pourrait mettre en évidence un point laissé dans l'ombre ailleurs.
- Le peu d'importance accordé à ces justifications peut également être une conséquence de l'accent que mettent ces travaux sur l'aspect cognitif individuel de la construction du concept alors que nous nous intéressons davantage au poids institutionnel qui pèse sur cette construction.

Nous nous sommes cependant appuyée sur ces travaux et questionnaires pour établir, puis relever les différentes erreurs susceptibles d'apparaître dans les réponses des élèves. Encore une fois, ces erreurs sont a priori typiques des curriculums à tendance anglo-saxonne et devraient donc se retrouver du côté palestinien. A chaque fois qu'il sera possible, quand la situation proposée a été testée par un autre chercheur, nous comparerons les résultats des élèves palestiniens à ceux des autres élèves testés. La deuxième comparaison avec les résultats des élèves français fera également ressortir les spécificités dues à chacun des systèmes d'enseignement.

La grille définitive d'analyse des réponses sera présentée lors de l'analyse des productions des élèves car le dépouillement a mis en évidence certains éléments que nous n'avions pas prévus dans notre analyse a priori. Nous donnons ici les principaux critères et les principales erreurs que nous pouvions attendre d'après l'analyse de l'enseignement que nous avons réalisée et les travaux antérieurs.

Critères de reconnaissance d'une fonction et décomposition par sous-tâches de cette tâche

- **Les élèves reconnaissent-ils une fonction par application de la définition générale ?**
  Reconnaître une fonction sur la base de la définition générale fait que la tâche de reconnaissance d'une fonction se trouve décomposée en plusieurs sous-tâches : tâche de détermination de l'ensemble de départ ou du domaine de définition, tâche de détermination de l'ensemble d'arrivée ou du but, tâche de détermination des variables : distinction des variables dépendante et indépendante, détermination de la loi reliant les deux variables entre elles et tâche de discrimination relation/fonction (ou de vérification de la condition de l'unicité de l'image). Ces différentes sous-tâches ne nécessitent pas toutes d'être systématiquement résolues, les différents éléments s'y rapportant et caractérisant une fonction peuvent être plus ou moins explicites selon la situation et le registre de représentation choisi. La nécessité de les prendre en compte (et donc d'avoir effectivement à résoudre les sous-tâches correspondantes) sera précisée lors de l'analyse question par question.

- **Ou se réfèrent-il au rapprochement avec une fonction familière ?**
  Cette stratégie de résolution n'est en général possible que pour les fonctions exprimées dans les registres algébrique ou graphique : l'élève se justifie en reconnaissant la fonction "c'est la fonction carré", ou sa classe d'appartenance "c'est une fonction polynôme"; ou dans le registre graphique en reconnaissant la courbe représentée comme étant celle d'une fonction connue "c'est une hyperbole ou une parabole". La même stratégie de résolution est également valable dans le cas de certaines situations fonctionnelles pour lesquelles la relation de dépendance est connue par l'élève comme étant une relation fonctionnelle. Cette justification dispense, bien sûr, de réaliser les différentes sous-tâches identifiées dans le cas de la stratégie de résolution précédente. Elle dispense en particulier de la vérification de la condition de l'unicité de l'image. D'ailleurs, la technique de résolution de cette dernière tâche dans le registre algébrique n'est enseignée, il faut le souligner, ni du côté français, ni du côté palestinien.

Cette stratégie de résolution sera plus probablement adoptée par les élèves français qui bénéficient de références plus grandes relativement aux deux registres cités et aux situations fonctionnelles, et qui n'ont pas l'habitude de mobiliser la définition générale dans leurs activités sur les fonctions.

Les erreurs ou difficultés prévues a priori

a) *les restrictions sur le concept de fonction*

Ces erreurs traduisent, de la part de l'élève, une restriction sur le concept de fonction du point de vue de la nature des ensembles et de la nature de la loi fonctionnelle. L'élève exprime, à travers elle, des difficultés à généraliser le concept de fonction et en particulier à admettre les conditions d'arbitraire sur les ensembles et sur la loi. La littérature présente des exemples permettant de les repérer, en voici quelques-uns parmi les plus pertinents relativement aux situations que nous avons proposées :

* Restriction sur la nature des ensembles : les élèves ont tendance à n'accepter comme fonction que les fonctions numériques. Dans le cas où la variable est discrète, les domaines et but doivent contenir un nombre suffisant d'éléments, en particulier les singletons ne sont souvent pas acceptés comme domaine ou but.
* Restriction sur la nature de la loi : les élèves ont tendance à n'accepter comme fonction que celles dont la loi fonctionnelle peut être exprimée à l'aide d'une formule précise, de préférence algébrique. Ils rejetteront en particulier les fonctions dont la loi est arbitraire mais ils rejetteront aussi les fonctions nécessitant plus d'une équation. De façon générale, il nous semble que cette restriction est repérable quand l'élève se focalise uniquement sur la loi fonctionnelle pour décider si oui ou non la situation à tester est une fonction, en particulier il ne tient pas compte de la condition d'unicité de l'image.

b) *Erreurs, dues à la difficulté de discerner le statut des variables x et y*

Il s'agit d'erreurs apparaissant particulièrement dans le cas où la fonction est exprimée dans les registres algébrique ou graphique quand l'élève est incapable de discerner le statut des variables x et y, de saisir le rôle asymétrique entre la variable dépendante et la variable indépendante. L'élève rejettera, par exemple, une fonction dont l'équation est, de façon inhabituelle, formulée sous la forme d'une équation en y, il confondra les variables x et y dans une autre équation, il aura du mal à positionner ses variables dans le registre graphique, etc. Ces erreurs traduisent des difficultés profondes d'ordre fonctionnel. Elles mettent en particulier en lumière la difficulté du passage du cadre algébrique au cadre fonctionnel. Sierpinska (Sierpinska,1992) dans ses travaux présentés au chapitre I, les considère comme un obstacle épistémologique au développement du concept de fonction.

c) Autres erreurs d'ordre fonctionnel

Il s'agit, pour nous, des différentes erreurs d'ordre fonctionnel autres que l'erreur précédente plus typique du registre algébrique. Ce sont les différentes erreurs où l'élève a du mal à déterminer l'ensemble de départ/d'arrivée, à déterminer le lien fonctionnel entre variables (autre que l'erreur de restriction sur le lien fonctionnel) voire à déterminer l'image d'un élément en substituant une valeur à une variable dans le cas d'une fonction algébrique, etc. Très souvent ces erreurs sont liées au registre de représentation surtout quand celui-ci est peu familier. Il sera donc difficile de distinguer les erreurs plus spécifiquement dues au registre de représentation, des autres erreurs d'ordre fonctionnel. Cependant, si l'élève exprime de façon explicite, une difficulté liée au registre de représentation de la situation, nous le signalerons à l'aide de la colonne réservée aux commentaires.

d) Autres difficultés d'ordre algébrique

Il s'agit de difficultés liées à la manipulation de l'expression algébrique d'une fonction. Elles ne mettent pas en cause a priori la compréhension de la notion de fonction par l'élève. Cependant comme le registre algébrique est incontournable dès l'amorce d'un travail plus approfondi sur la notion de fonction, elles soulignent l'importance de la maîtrise de ce registre pour une appréhension effective de celle-ci.

Les cas de non réponse ou de réponse non justifiée

Les cas de non-réponse traduisent pour nous, une déstabilisation des élèves face au type de situation proposée et peuvent cacher tout aussi bien une restriction sur le concept de fonction que des difficultés d'ordre fonctionnel dont celles liées au registre de représentation. Les réponses non justifiées ne diffèrent pas le plus souvent des non réponse. Cependant elles peuvent parfois signifier un cas d'évidence pour l'élève. Aussi, les réponses correctes non justifiées nécessiteront une analyse spécifique et seront acceptées ou rejetées selon la situation concernée. Les cas de non réponse et de réponses non justifiées seront précisés.

I.2. La deuxième partie : Test des connaissances des élèves sur différents points du programme

La deuxième partie est consacrée à l'assimilation de certains points du programme, retenus principalement pour être communs aux deux enseignements français et palestinien. Elle teste ainsi l'assimilation des notions d'opérations de fonctions, de la notion de périodicité en tant qu'unique propriété géométrique institutionnalisée du côté palestinien. Une situation fonctionnelle et une résolution d'équation sont également proposées, pour leur caractère emblématique dans l'étude des fonctions ainsi que pour tester la capacité des élèves à envisager la fonction selon son statut outil. La situation fonctionnelle permet de plus de vérifier les capacités des élèves relatives à certaines tâches comme la représentation graphique de fonction, la détermination d'un extremum, etc.

Notre objectif est ici de comparer le niveau de maîtrise atteint par les élèves, en relation avec leur enseignement respectif, des différents objets d'enseignement visés par cette deuxième partie du questionnaire, niveau de maîtrise qui ne peut que refléter leur rapport institutionnel aux différentes notions impliquées. Cette deuxième partie du questionnaire permettra également, à travers l'évaluation des élèves, d'évaluer chacun des deux enseignements, tout au moins, sur les notions testées. Notre souhait étant de mettre en évidence dans quelle mesure ces deux enseignements fondamentalement différents ont effectivement produit un rapport différent aux notions testées.

I.2.1 Choix des objets d'enseignement à tester : des tâches/techniques inhabituelles proposées aux élèves

Pour permettre cette comparaison d'une façon aussi objective que possible, notre souci principal a été alors de concevoir des questions en veillant à ne pas favoriser un groupe d'élèves part rapport à l'autre. Cette tâche s'est avérée bien difficile, compte tenu des différences importantes dans la conceptions de l'enseignement sur les fonctions de part et d'autre, tant du point de vue des contenus des programmes, de la progression adoptée, de la variété des cadres et registres, de l'installation des notions relativement à leur institutionnalisation ultérieure, etc., et que notre analyse dans les chapitres III et IV de cette thèse a fait ressortir. Nous avons dû alors nous limiter aux objets d'enseignement précisés dans le paragraphe ci-dessus.

La deuxième étape de l'élaboration de cette deuxième partie du questionnaire, toujours dans le même esprit de neutralité vis-à-vis de chacune des deux populations testées, a été la formulation des questions. Leur conception a été guidée par l'idée de présenter aux élèves des tâches pour lesquelles les techniques à utiliser seraient différentes de celles institutionnalisées, ou tout au moins, ne seraient pas explicites dans l'énoncé. Des tâches/techniques donc inhabituelles, loin des questions bien balisées rencontrées en classe : l'idée étant de vérifier dans quelle mesure l'élève est capable de mettre en œuvre une technique de résolution, non ou peu rencontrée en classe, pour une tâche visant une notion néanmoins familière. Notre souhait est de pouvoir ainsi repérer si l'élève est capable d'opérer des transferts de connaissances ; Bloch (Bloch, 2000) fait référence à ce questionnement en parlant de *dépendance des élèves du contrat usuel de la classe*. En reprenant cette question d'une façon plus spécifique à notre travail, la comparaison des résultats des deux groupes d'élèves à cette deuxième partie du questionnaire permettra de répondre à la question de savoir **si l'organisation de l'enseignement français autour d'un nombre plus varié de tâches/techniques donne plus d'initiative à l'élève en matière de choix des techniques à utiliser, donc les prépare à une**

meilleure réussite ? Ou au contraire rend plus difficile la mobilisation des connaissances adéquates pour mettre en œuvre la technique de résolution valable ?

I.2.2 Rôle des cadres et registres utilisés dans cette deuxième partie

En référence au travail réalisé dans les chapitres précédents de cette thèse, et à ce que nous avons retenu des différents travaux présentés dans le chapitre I, quant au lien inextricable entre tâches et techniques institutionnalisées, et cadres et registres mobilisés dans un enseignement, nous nous sommes appuyée sur la diversité des cadres et registres afin de formuler les questions composant ce questionnaire de façon à provoquer l'utilisation de techniques autres pour leur résolution. Nous avons pu alors nous inspirer, voire retenir, certaines questions apparaissant dans d'autres questionnaires, et relatifs à des travaux en partie présentés dans notre chapitre I, malgré leur problématique souvent fondamentalement différente de la nôtre. Il s'agît du questionnaire de Breidenbach et al. (Breidenbach et al., 1992) dans ces travaux auxquels nous nous référons au chapitre I, ainsi que de ceux Funrighetti et Somaglia (Funrighetti et Somaglia,1994), et EVAPM (EVAPM, 1991) ; les questions concernées seront précisées dans l'analyse question par question. La référence à ces travaux antérieurs constitue un premier contrôle de nos résultats, quoique cette comparaison ne puisse se réaliser qu'à titre indicatif, les questionnaires ayant souvent été proposés, rappelons-le, dans une autre philosophie et les populations observées étant souvent incomparables à la nôtre, en particulier pour celles de Breidenbach et al.

Les cadres et registres sont donc impliqués au même titre que dans la première partie de notre questionnaire et, de façon identique, ils ne sont pas toujours les seuls critères sur lesquels nous nous sommes basée pour poser différemment les questions. Ce point s'éclaircira également dans notre analyse question par question.

Cependant, si notre objectif n'était pas de tester spécifiquement la capacité des élèves à traiter avec tel ou tel registre ou cadre, ou à réaliser des conversions de cadres ou de registres, notre analyse a posteriori permettra également d'évaluer l'aptitude des élèves relativement à certains cadres ou registres, ainsi que de se renseigner sur le caractère porteur de sens de ces cadres et registres. En particulier, **certaines questions impliquant le registre graphique ou le cadre numérique permettront de constater l'aptitude respectivement, des élèves français et des élèves palestiniens,** dans ce registre et cadre étant donné la place que détient le registre graphique dans l'enseignement français, et le recours fréquent, dans l'enseignement palestinien, au cadre numérique pour installer les notions nouvelles. Au-delà de cette aptitude dans les registres ou cadres familiers, nous chercherons à savoir si **l'organisation de l'enseignement français autour de cadres et de registres plus variés que dans l'enseignement palestinien, donne à l'élève plus de facilité à traiter avec d'autres**

cadres et registres, par exemple, si la place réservée au registre graphique dans l'enseignement français permet aussi d'aborder des tâches relevant du cadre numérique. Ou est-ce que, au contraire, celles-ci nécessitent un enseignement spécifique à l'image de l'enseignement palestinien davantage axé sur le cadre numérique ?

Nous nous attendons, de façon générale, à une meilleure réussite des élèves palestiniens sur la première partie du questionnaire et à une meilleure réussite des élèves français sur la deuxième partie.

II Analyse des réponses à la première partie du questionnaire

II.1. Présentation de la grille utilisée pour le codage des réponses des élèves

Nous avons envisagé une grille constituée de plusieurs colonnes, la première pour le numéro des élèves, la deuxième pour prendre en compte la réussite ou l'échec à la question ainsi que les cas de non réponse ou de réponse non justifiée. Les troisième et quatrième colonnes concernent le type de justifications et le degré de précision de ces justifications. Les 7 suivantes visent à repérer certaines des erreurs les plus récurrentes. Certaines colonnes ont donc été ajoutées à celles prévues a priori, le dépouillement ayant mis en évidence de grandes divergences d'un élève à l'autre dans le degré de précision donné dans les justifications, ainsi que d'autres erreurs que, malgré leur présence dans la littérature, nous n'avions pas, au départ, songé à inclure (voir la grille du questionnaire en annexe de ce chapitre).

II.1.1 Critères de reconnaissance d'une fonction et degré de précision des justifications

Dans notre analyse a priori, nous avions envisagé deux critères principaux selon lesquels l'élève se justifierait : par référence à la définition générale de fonction et par rapprochement avec une fonction familière. Le degré de précision varie surtout dans le cas du premier critère. Nous avons remarqué, essentiellement du côté des élèves palestiniens, que l'élève pouvait se justifier :

- par un simple rappel de la définition de la fonction dans sa forme générale, c'est une fonction car chaque élément du domaine a une image unique dans le but. Il nous a semblé alors que ce cas de réponse trop générale était difficile à évaluer car il n'est pas possible d'exclure complètement l'éventualité d'une réponse donnée au hasard. Ces réponses seront donc analysées, au cas par cas, en effectuant une comparaison avec les autres réponses de l'élève et en tenant compte de la difficulté de la situation : il nous est par exemple plus facile d'accepter une telle justification pour la situation 2 (tableau de valeurs), où la spécificité du registre de représentation montre bien la correspondance entre deux éléments, que pour la situation 7 (valeurs booléennes).

- par une contextualisation de la définition générale, soit en précisant dans la réponse et selon la situation certaines des caractéristiques de la fonction (le domaine de définition, et/ou le but, et/ou les variables, etc. sont spécifiés). A titre d'exemple pour la situation 3, la justification suivante : *oui, car chaque réel x a une image unique 1/x,* sans être tout à fait précise reste est plus explicite que *oui, car chaque élément du domaine a une seule image dans le but.* Ces cas de réponses nous apparaissent comme les plus explicites relativement à la maîtrise de l'application de la définition.

- par un simple "oui" appuyé d'une autre représentation de la fonction. Ici, l'autre représentation tient lieu de justification, même si l'élève ne l'a pas forcément envisagé ainsi et a simplement estimé répondre à la partie de la question demandant justement d'exprimer autrement la fonction. Nous avons décidé d'accepter ce cas de réponse comme une véritable justification, en nous référant aux remarques faites à propos de la démonstration en tant qu'activité mathématique dans les nouveaux programmes français applicables à partir de l'année 2001-2002 et qui soulignent la difficulté qu'ont les élèves à formuler les justifications notamment dans les domaines mathématiques nouveaux : "*en analyse, par contre, la plupart des objets manipulés ne sont pas définis formellement (...) Il conviendrait donc d'accepter des argumentations conçues et exposées à l'aide de schémas (même si les élèves ne peuvent pas à ce stade les traduire en un texte linéaire)*" (B.O n° 7, 31 août 2000 Hors série) p.168. L'analyse a posteriori montre que les élèves palestiniens ont plus souvent tendance à utiliser cette forme de justification que les élèves français. Les registres de représentation, nous le verrons, ne sont pas les mêmes dans les deux cas : les élèves palestiniens utilisent les registres du cadre numérique (diagramme sagittal, liste de valeurs, etc.), les élèves français passent au graphique. Cette différence est significative du rapport institutionnel différent au concept de fonction et nous semble, plus ou moins liée, à la définition institutionnalisée de part et d'autre : idée de correspondance d'un côté (à une valeur correspond une valeur), et idée de continuité sur un intervalle de l'autre. Cependant la référence à cette définition ne semble pas tout à fait consciente chez les élèves : pour eux, il , qu'ils peuvent faire avec les situations proposées ce que l'on peut faire habituellement avec les fonctions. Il nous semble dans ce sens que cela traduit une conceptualisation moindre du concept de fonction.

Une deuxième représentation n'est pas uniquement présente dans ce dernier cas de réponse, en particulier, certains élèves donnent une définition contextualisée ou se justifient par rapprochement avec une fonction familière, et proposent une autre représentation, aussi avons-nous prévu, dans notre grille d'y consacrer deux colonnes plutôt qu'une. La 4ème colonne permet de coder le type de justification : définition générale, définition générale contextualisée, ou critère de familiarité, et la 5ème colonne indique si oui ou non une autre représentation de la fonction est donnée.

II.1.2 Autres erreurs récurrentes

Le dépouillement a mis en évidence certaines erreurs supplémentaires que nous avons dû rajouter à celles prévues lors de notre analyse a priori.

a) Confusion fonction/injection

Cette erreur est relevée, chez Dubinski (Dubinski, 1992), comme l'un des facteurs permettant de déterminer le niveau de progression de l'élève vers le stade de processus dans l'acquisition du concept de fonction : pour lui un élève qui présente cette erreur, significative d'une mauvaise interprétation de la condition de l'unicité de l'image, est très clairement un élève qui n'a pas atteint ce stade (voir chapitre I paragraphe 3 travaux sur les fonctions). Nous n'avions pas pensé, lors de notre analyse a priori l'inclure dans notre grille, mais le dépouillement nous a révélé qu'elle apparaissait effectivement du côté palestinien quoique jamais du côté français. Elle nous semble liée à la manipulation de la définition générale de la fonction. Elle est codée dans la colonne 9.

b) Confusion domaine /but :

Cette erreur n'est pas signalée dans la littérature. Elle n'apparaît également que du côté palestinien et serait donc liée à la manipulation de la définition générale. Il s'agit également, pour cette erreur, d'une mauvaise interprétation de la condition de l'unicité de l'image, interprétée ici comme l'unicité de l'antécédent. Cette variante de l'erreur précédente est codée dans la colonne 10.

c) Confusion entre domaine et ensemble de départ

Cette confusion se manifeste quand l'élève estime que le domaine doit apparaître systématiquement dans la description d'une situation. La distinction entre ensemble de départ et domaine de définition ne fait pas partie de ses démarches. Il ne s'agit pas véritablement d'une erreur ; cette confusion résulte directement de la définition de la fonction actuellement proposée dans les deux institutions puisque ensemble de départ et ensemble de définition y sont confondus : une fonction est souvent définie sur son ensemble de définition. Ainsi, la définition du manuel de seconde française : "Définir une fonction f sur un intervalle [a ; b] c'est donner un procédé qui à chaque élément x de [a ; b] fait correspondre un nombre noté f(x)". Par ailleurs, les programmes de 2nde et de 1ère, précisent que les fonctions étudiées sont définies sur un intervalle, que l'ensemble de définition sera le plus souvent indiqué et qu'il faut éviter les exercices de recherche a priori de cet ensemble. Les manuels étudiés s'en tiennent à ces recommandations et si l'étude d'un problème ou d'une situation fonctionnelle prévoit la détermination du domaine d'une fonction, cette tâche est en général explicitement demandée.

Du côté palestinien, la fonction est également définie sur son domaine de définition : "une fonction est une relation qui lie chaque élément de son domaine de définition à un élément unique dans le but", de même que l'étude de fonction en classe de 12ème ne prévoit pas de recherche systématique du domaine de définition. C'est essentiellement leur plus grande familiarité avec la tâche de reconnaissance de fonction qui pourrait expliquer, chez eux, une distinction éventuelle entre domaine de définition et ensemble de départ.

Nous avions pensé lors de l'analyse a priori que cette confusion était de moindre gravité, et devrait pouvoir être corrigée facilement, ce qui doit effectivement être le cas en général, mais il nous est apparu lors du dépouillement que cette confusion peut constituer un véritable blocage si l'élève ne se focalise que sur le domaine de définition pour évaluer une situation. Ainsi, certains élèves rejettent la situation 1 (les frères) parce que des élèves pourraient ne pas avoir de frères et ne voient donc pas que la condition de l'unicité de l'image n'y est pas vérifiée. Cette confusion est codée dans la colonne 8.

II.1.3 Tableau et codage des réponses

Notre grille (voir annexe du chapitre V) correspond donc à un tableau composé d'une ligne pour chaque situation à tester et des 13 colonnes suivantes :

N° : Numéro de l'élève pour le dépouillement.
Réu : 0 non réponse ou réponse non justifiée/ 1 Réussite/2 Echec
Déf : 1 définition générale /2 définition générale contextualisée /3 critère de familiarité
/0 pas de justification verbale.
Rep : 1 autre représentation /0 pas d'autre représentation

Pour les colonnes suivantes visant à repérer les erreurs des élèves, le code sera 1 si l'élève présente l'erreur et 0 autrement. Si une erreur particulière n'est pas pertinente pour une situation donnée la colonne correspondante sera noircie. Par exemple, si une situation exprime une fonction numérique, la restriction sur la nature des ensembles ne peut apparaître et la cinquième colonne sera noircie :

Ens : restriction sur la nature des ensembles (1/0)
Loi : restriction sur la nature de la loi (1/0)
d/d : confusion domaine/ensemble de départ (1/0)
f/I : confusion fonction/injection (1/0)
d/b : confusion domaine/but (1/0)
x/y : difficulté liée au statut des variables x et y relative aux registres algébrique et graphique (1/0)
ft : Autres difficultés d'ordre fonctionnel (1/0)

alg : Autres difficultés d'ordre algébrique (1/0)
La dernière colonne est réservée aux commentaires éventuels.

II.2. Analyse question par question

Cette première partie du questionnaire propose 9 situations où il est demandé pour chacune d'elles de reconnaître en justifiant si la situation proposée représente ou non une fonction, et d'en donner si possible une autre représentation. Les textes des questions sont rappelés en gras ; l'ensemble du questionnaire figure en annexe.

- **S1 : Associer à chaque élève de votre classe chacun de ses frères.**
  Cette situation exprime une relation non numérique proposée dans le registre verbal. Bien sûr la réponse correcte exige que l'élève envisage deux possibilités : "ça dépend de la classe, si chaque élève a au plus un frère, c'est une fonction. Si un élève a au moins deux frères, ce n'est pas une fonction". Mais nous accepterons les réponses où l'élève n'envisage qu'une seule possibilité à condition qu'il se réfère explicitement à la condition de l'unicité de l'image (en France, il y a beaucoup de chances pour que cela puisse définir une fonction puisque la plupart des familles n'ont que deux enfants, en Palestine cette situation n'exprime certainement pas une fonction). Nous souhaitons tester à l'aide de cette question la capacité des élèves à interpréter une situation non numérique mais cependant simple. Les élèves palestiniens risquent d'être avantagés relativement à cette situation car il est fort possible que des exemples similaires leur aient été proposés par leur professeur lors de l'installation de la notion de fonction. Les ensembles de départ, d'arrivée ainsi que la loi de la relation sont a priori évidents à déterminer. Pour les élèves français cette question risque de ne pas avoir de sens.

  a) Analyse des réponses des élèves français

  * 6 élèves ne répondent pas.
  * 6 élèves répondent "non" sans se justifier. Il nous est difficile de considérer cette réponse comme une réussite dans la mesure où les raisons de donner cette réponse peuvent être très diverses. Nous ne pensons pas qu'il s'agisse d'un cas d'évidence mais cette réponse serait plutôt liée à notre avis au fait que cette situation n'a pas de sens pour beaucoup d'élèves français.
  * Sur les 18 élèves qui traitent la question et proposent une justification, aucun n'estime avoir affaire à une fonction mais 10 d'entre eux donnent une justification erronée :

    - 6 élèves présentent une restriction sur la nature des ensembles : ils pensent qu'une fonction doit être numérique, ainsi l'explication "*Ce n'est pas une fonction car on n'associe pas à un réel un autre réel qui serait son image*" (élève n°30).

- 4 élèves présentent une restriction sur la nature de la loi fonctionnelle : ils justifient leur réponse en s'appuyant uniquement sur la loi qui ne leur paraît pas être une loi fonctionnelle. Malgré les divergences dans les différentes argumentations, leurs réponses indiquent qu'une loi fonctionnelle doit pouvoir s'exprimer de manière plus précise : "*non, car à chaque élève on associe ses frères, c'est une expérience qui relève de l'aléatoire*" (élève n° 29) ou doit traduire une certaine idée de la dépendance "*ici on a une association mais pas une mise en fonction d'élève en fonction de frères*" (élève n°28).

* 3 élèves présentent une confusion domaine/ensemble de départ : ils refusent d'y voir une fonction parce que certains éléments peuvent ne pas avoir d'image.
* Seuls 5 élèves donnent une bonne réponse, soit ne reconnaissent pas une fonction du fait de la non vérification de la condition de l'unicité de l'image. Les élèves qui répondent correctement se basent forcément sur la définition générale de fonction.

Ainsi, 40% des élèves ne donnent pas de réponse ou pas de justifications, 34% montrent une restriction sur la loi fonctionnelle ou sur la nature des ensembles, alors que 3% présentent une confusion domaine/ensemble de départ. 17% des élèves donnent une réponse correctement justifiée.

Réussite (par référence à la définition)	17%	Confusion domaine/ensemble de départ	10%
Restriction sur les ensembles	20%	Réponse non justifiée	20%
Restriction sur la loi	13%	Non réponse	20%

b) Analyse des réponses des élèves palestiniens

* 5 élèves donnent une réponse non justifiée (3 "oui" et 2 "non"). Comme pour les élèves français, nous n'accepterons pas la réponse correcte ("non") sans justifications mais les réponse "oui" sont certainement des échecs.
* 2 élèves présentent une restriction sur la nature des ensembles :
  Les domaine et but qui doivent, à leur avis, présenter certaines similarités "*le but n'est pas le même ensemble que le domaine*" (élève n°50) ou "*non, car pour avoir une fonction, il faut que l'élève soit lié à un autre dans sa classe et non à l'extérieur de la classe dans laquelle il se trouve*"(élève n°38).
* 2 élèves présentent une restriction ou une erreur d'ordre fonctionnel sur la loi :

  - 1 élève pense qu'il ne s'agit pas de fonction car "*il n'y a pas de relation entre le domaine et le but*" (élève n°35), traduisant également une restriction sur la nature de la loi fonctionnelle.

- 1 élève se justifie en testant uniquement la loi : "*Ils sont de la même famille, c'est normal qu'ils soient liés. C'est une fonction*" (élève n°36). Cette réponse indique que le critère principal qui permet de décider si oui ou non on a affaire à une fonction, est que la loi traduise une certaine idée que l'élève se fait de la dépendance ; la condition d'unicité de l'image en particulier n'est absolument pas prise en compte par l'élève.

* 4 élèves présentent une confusion domaine/but :

- 1 élève explique que c'est une fonction "car chaque élément du domaine peut avoir plusieurs images dans le but" (élève n°31). Il nous est apparu en comparant sa réponse à cette situation et à la situation de fonction constante qu'il rejette également en tant que fonction, que cet élève confond domaine et but (comme nous l'avons expliqué dans l'analyse a priori il interprète la condition d'unicité de l'image comme la condition d'unicité de l'antécédent).
- 3 élèves se justifient par la possible existence de deux frères dans la même classe "si deux frères se trouvent dans la même classe, alors deux élèves auront les mêmes images" (élève n°17) ou "c'est une fonction sauf s'il y a des jumeaux") (élève n°37) qui semble indiquer qu'ils interprètent mal la condition de l'unicité de l'image. L'un d'entre eux illustre même sa réponse, à l'aide de diagrammes de Venn, en montrant un élève lié à plusieurs autres qu'il accepte comme cas de fonction, et deux frères ayant les mêmes images qui lui pose problème.

* 4 élèves présentent une confusion domaine/ensemble de départ.

* 5 élèves donnent des réponses que nous pensons fausses mais qu'il a été difficile d'interpréter :

- 2 élèves pensent qu'il s'agit d'une fonction et justifient leurs réponses en se référant à la définition générale de fonction. L'un d'eux (élève n°34) illustre sa réponse par un digramme sagittal où il fait correspondre à chaque nom apparaissant dans le domaine de définition, un seul nom dans le but. Il est possible qu'ils n'aient pas pris en compte la possibilité d'existence de plusieurs frères.
- 3 élèves se justifient en disant : "c'est une fonction car chaque frère de la classe est lié à un frère différent". L'un de ces élèves nous semble avoir de sérieuses difficultés avec le concept de fonction, à en croire la qualité très médiocre de ses réponses aux autres situations et en particulier ses justifications souvent très sommaires ou inexistantes (élève n°52). Les 2 autres, par contre, semblent n'avoir pas pris en compte l'éventualité de l'existence de plusieurs frères. Il ont en effet bien répondu à la situation de fonction constante donc ne refusent pas l'idée que plusieurs éléments aient la même image, et d'après leur réponse à la situation du dé où ils construisent mal la fonction, ils refusent la multiplicité d'images (élèves n°55 et 46).

* Les 39 autres élèves donnent une réponse correcte justifiée :

- 37 élèves se basent sur la définition générale de fonction dont 28 donnent une définition contextualisée

- 2 élèves ne justifient pas verbalement leur réponse mais l'illustrent correctement par un diagramme sagittal. (élève n°21).

Ainsi, 64 % des élèves réussissent à cette question. 7 % montrent une restriction sur la loi fonctionnelle ou sur la nature des ensembles. 7 % des élèves confondent domaine et but, et 7% confondent domaine et ensemble de départ. 8% des élèves ne donnent pas de réponse ou donnent une réponse non justifiée. Les autres réponses fausses concernent 8% des élèves.

Réussite (par référence à la définition)	61%	Confusion domaine/ensemble de départ	7%
Réussite par changement de registre	3%	Confusion domaine/but	7%
Restriction ou erreur d'ordre fonctionnel sur la loi	3%	Autre réponse fausse	8%
Restriction sur la nature des ensembles	3%	Réponse non justifiée (oui et non)	8%

c) **Comparaison des réponses des élèves français et palestiniens**

Les taux élevés de non réponse ou de réponse non justifiées ainsi que le faible taux de réussite enregistrés par les élèves français confirment que, comme prévu, les situations traduisant des relations non numériques n'ont pas beaucoup de sens pour ces élèves. Les élèves palestiniens réussissent beaucoup mieux sur cette question, cela n'a rien d'étonnant ; mais leur taux de réussite, relativement modeste (64%), indique que les relations non numériques même simples ne sont pas si évidentes à interpréter.

- **S2 : Vendre dans un magasin des articles à l'unité ou par paquets de 2, 3, 5, 10, 20. Voici le tableau des prix : (...).**

Cette situation exprime une fonction numérique et discrète donnée par un tableau de valeurs. Le tableau de valeurs est un registre utilisé de part et d'autre pour la représentation de fonction. Il a cependant essentiellement un rôle de registre intermédiaire entre l'expression algébrique de la fonction et sa représentation graphique. Dans cette situation 2, le tableau de valeurs n'est pas un registre intermédiaire puisque la loi fonctionnelle ne peut être exprimée à l'aide d'une formule algébrique. En particulier, et cela pourrait davantage gêner certains élèves français, ce tableau de valeurs ne traduit pas une relation de proportionnalité. Une loi fonctionnelle non exprimable par une formule algébrique peut-elle être acceptée des élèves ? Dans l'affirmative, deux stratégies de résolution sont possibles :

- l'élève accepte l'idée de correspondance arbitraire, donc se base sur la définition générale de fonction. Il ne peut notamment pas y reconnaître une fonction sur la base de sa classe d'appartenance puisque cette loi fonctionnelle ne s'exprime pas par une expression algébrique,
- l'élève accepte cette loi comme une loi fonctionnelle mais se justifie par le fait que la situation fonctionnelle exprime une certaine idée de la dépendance qui lui est significative en tant que telle.

Une telle justification traduit, tout à la fois, un effet de contrat basé sur un critère de familiarité de même qu'elle indique une restriction sur la nature de la loi fonctionnelle.
Cette question est une question du test de Noguès (Noguès, 1993).

a) Analyse des réponses des élèves français

* 8 élèves ne répondent pas.

* 1 élève répond oui sans justification. Nous acceptons cette réponse oui comme un cas d'évidence et la considérons comme une réussite partielle. Nous la comptons séparément.

* 7 élèves présentent une restriction sur la loi fonctionnelle :

- Ils n'y voient pas une fonction parce que la loi fonctionnelle ne peut se ramener à une relation de proportionnalité (3 cas sur 8) ou plus généralement à une expression algébrique précise. D'où les justifications suivantes à leur réponse négative :
- "(...) car les prix en fonction du nombre d'articles ne sont pas proportionnels. En effet, 1x5,5   2x3 et 10x55   20x27" (élève n°4) ou "*On ne peut pas savoir la valeur que prendrait la fonction*" (élève n°2) ou encore "*c'est juste un tableau de valeurs permettant de représenter une courbe mais en aucun cas on n'a f : x   f(x)*" (élève n°29).

* 4 élèves pensent avoir une fonction sur la base de la détermination de la classe d'appartenance supposée de la fonction et présentent une erreur d'ordre fonctionnel ; Nous n'avions pas prévu ce cas de réponse à cette situation dans notre analyse a priori :

- 1 élève pense reconnaître une fonction affine.
- 3 élèves pensent reconnaître une suite et proposent une expression pour le terme général "*c'est une suite arithmétique car Un+1 - Un = constante. C'est donc une fonction Un+1 = Un + 5/2*") (élève n°13). Ces élèves expriment certainement une erreur d'ordre fonctionnel au niveau de la détermination de la loi de la fonction puisqu'ils omettent de s'assurer que la loi identifiée est vérifiée par l'ensemble des couples (antécédent, image). Mais il faut également souligner la force de la stratégie de résolution qui pousse l'élève à rechercher une fonction familière, favorisée peut-être par le registre de tableau de valeurs.

* 3 élèves justifient leur réponse uniquement par référence à une représentation graphique possible :
"*oui, dans cette situation on a bien une fonction. On met le nombre d'articles en abscisses et le prix en Francs en ordonnée*" (élève 10). Nous avons eu du mal à évaluer cette réponse non prévue par notre analyse a priori. Elle traduit déjà, le lien pour ces élèves entre tableau de valeurs et représentation graphique. Ces élèves semblent avoir accepté le fait que la loi fonctionnelle puisse ne pas être exprimée par une formule algébrique précise. Leur passage

par la représentation graphique est un effet de l'enseignement reçu puisque c'est en général comme cela qu'on leur a introduit les fonctions, et traduit également une difficulté à mobiliser la définition générale de la fonction. Cependant ces élèves n'ont pas donné de représentation graphique pour vérifier qu'ils obtiennent effectivement le graphe d'une fonction. Aussi nous considérons qu'ils ont partiellement réussi à cette question par changement de représentation. Comme l'élève qui a reconnu une fonction sans donner de justification, ces trois élèves réussissent partiellement avec cependant une tentative de justification.

* 5 élèves pensent avoir une fonction et se justifient par référence à une loi de dépendance ou à une fonction qui leur est familière :

  - 3 élèves se justifient en en se référant uniquement à la loi qui indique, selon eux, une dépendance fonctionnelle : "*c'est une fonction car on a le prix en fonction du nombre d'articles*" (élève n° 1).
  - 2 élèves estiment avoir une suite. Même si la réponse n'est pas totalement correcte puisque les entiers de départ ne se suivent pas, nous la considérons comme une réussite car les élèves français n'ont que peu de référence pour les fonctions discrètes.

* Seuls 2 élèves répondent correctement en se justifiant sur la base de la définition générale : "*C'est une fonction f qui à chaque réel x de l'ensemble de définition, associe un seul et unique réel f(x), x étant le nombre d'articles et f(x) son image, c'est-à-dire son prix*" (élève n°30).

Aucune autre représentation de la fonction n'est donnée :

- Il faut souligner qu'aucune tentative de représenter autrement la situation proposée n'a été réalisée par les 14 élèves qui ont reconnu une fonction. Même les rares élèves qui se réfèrent au registre graphique dans leurs justifications n'ont pas été jusqu'à la représentation effective de cette situation. Soit qu'ils aient interprété la consigne concernant la donnée d'une autre représentation comme facultative et donc de moindre importance, soit qu'ils aient eu du mal à réaliser effectivement une représentation graphique faite de points non reliés par une courbe continue.
- Ainsi, 27% d'élèves ne répondent pas, 23% présentent une restriction sur la loi fonctionnelle, 13% présentent une erreur d'ordre fonctionnel. Aucun élève n'est gêné par le fait que la fonction soit définie sur un ensemble fini. 10% réussissent partiellement, 17% réussissent par référence à une fonction ou une loi de dépendance familière et 7 % donnent une réponse correcte renvoyant à une conception plus générale de la fonction. 13% des élèves qui ont échoué, ont également adopté une stratégie de résolution basée sur la recherche d'une fonction familière.

Réussite (par référence à la définition)	7%	Erreur d'ordre fonctionnel (établissement de la loi)	14%
Réussite par fonction familière	17%	Restriction sur la loi	24%
Réussite partielle (référence à une représentation graphique ou absence de justification)	13%	Non réponse	27%

b) Analyse des réponses des élèves palestiniens

* 1 élève ne répond pas.

* 2 élèves répondent "oui" et 2 élèves répondent "non" sans donner de justification. La réponse "oui" est acceptée comme une réussite de même que pour les élèves français.

* 1 élève présente une confusion domaine/but : " *(ce n'est pas une fonction) car chaque élément du domaine doit avoir une image dans le but et pas le contraire*" (élève n°31). Cet élève montrait déjà le même type d'erreur à la situation précédente. Il semble avoir de sérieuses difficultés avec la notion de fonction.

* 11 élèves présentent une restriction sur la nature de la loi fonctionnelle : Leurs justifications indiquent en effet qu'une loi fonctionnelle doit pouvoir être exprimée par une formule précise (algébrique) *: "Il n'y a pas de relation même si chaque paquet à un prix*" (élève n°21), ou encore "*Ce n'est pas une fonction car il n'y a pas de règle entre la quantité et le prix*" (élève n°38).

* 1 élève présente une erreur d'ordre fonctionnel : il reconnaît une fonction en réussissant à établir une loi mathématique liant les éléments du domaine à ceux du but en se limitant au premier couple (image, antécédent) du tableau. Nous avons repéré ce cas d'erreur du côté français et souligné que la stratégie de résolution semble se baser sur un rapprochement avec une fonction familière (élève n°32).

* 6 élèves reconnaissent bien une fonction mais avec des justifications qui ne se réfèrent pas, ou pas uniquement à la définition générale de fonction :

- 3 élèves se justifient à la fois par le fait que la loi traduit une certaine idée de la dépendance et sur la base de la définition générale. Ainsi l'élève *n°20 "oui, c'est une fonction car elle représente quelque chose de la réalité et chaque élément à une image*". Ces trois élèves proposent également une autre représentation sous la forme d'un diagramme sagittal ou d'une représentation graphique. L'idée de la dépendance est trop vague, quoique cela soit normal chez les élèves palestiniens qui ont moins de référence relativement aux situations fonctionnelles. Nous considérerons donc que ces élèves se justifient davantage sur la base de la définition générale.
- 3 élèves ne justifient pas leur réponse verbalement mais se contentent de proposer une autre représentation. Ces 3 élèves représentent respectivement : 1 diagramme sagittal, 1 une représentation graphique et 1 une liste de valeurs "f(x) = ...".

* 37 élèves reconnaissent une fonction et se justifient par la définition :

  - 10 élèves pensent avoir une fonction et se justifient uniquement en reprenant la définition générale. Nous avons estimé dans notre analyse a priori que le simple rappel de la définition générale à cette situation 2, pouvait être considéré comme une réussite.
  - 27 élèves justifient leur réponse à l'aide de la définition générale, contextualisée dans 24 cas et/ou appuyée d'une autre représentation. Au total 13 de ces élèves donnent une autre représentation. Ces représentations se répartissent ainsi : 7 diagrammes sagittaux, 1 ensemble de couples, 1 liste de valeurs et 4 représentations graphiques.

* Sur les 41 élèves qui ont reconnu en cette situation une fonction et y ont apporté des justifications correctes, 19 élèves proposent une autre représentation. Ces représentations sont toutes des représentations valables pour les fonctions discrètes. Nous constatons cependant que les représentations graphiques sont faites de croix correspondant aux coordonnées des différentes valeurs apparaissant sur le tableau de valeurs, mais qu'elles ont été reliées par une courbe continue. Il ne nous semble pas pourtant que ces élèves là sont bien conscients de la signification de la courbe continue mais cela traduit davantage l'idée qu'il se font d'une représentation graphique comme devant présenter une certaine continuité.

Ainsi, 5% des élèves ne répondent pas ou donnent une réponse fausse non justifiée. 18% présentent une restriction sur la loi fonctionnelle. 4% présentent une confusion domaine/but ou une erreur d'ordre fonctionnel. 5% reconnaissent une fonction par une stratégie de changement de registre. 66 % des élèves reconnaissent une fonction et se justifient, de façon plus ou moins précise sur la base de la définition générale de fonction. Seuls 2% des élèves ont adopté une stratégie de résolution sur la base de la recherche d'une fonction familière ; ils ont échoué.

Réussite (par référence à la définition)	66%	Confusion domaine/but	2%
Réussite par changement de registre	5%	Erreur d'ordre fonctionnel (établissement de la loi)	2%
Réussite sans justification	3%	réponse fausse non justifiée	3%
Restriction sur la loi	18%	Non réponse	2%

c) Comparaison des réponses des élèves français et palestiniens

Le taux d e réussite total est nettement plus élevé du côté palestinien, 74%, que du côté français où il n'atteint 37% que si l'on considère les deux taux de réussite et de réussite partielle. Or les élèves français sont plus familiers de ce registre que les élèves palestiniens, et ne semblent pas être gênés par le fait que la fonction soit discrète. Ce qui apparaît davantage les handicaper est, comme nous l'avions supposé dans l'analyse de la question, que la loi fonctionnelle ne puisse être exprimée par une expression algébrique précise. Justement les tableaux de valeurs expriment toujours du côté français de telles fonctions. Cette situation montre que les élèves français ont du mal à se dégager des exemples de fonctions fréquentées en classe.

- **S3 : Associer à tout nombre réel x appartenant à l'intervalle] –1; 1 [, le nombre 1/x.** Cette situation exprime verbalement la fonction inverse restreinte à l'intervalle]-1; 1[. Par ailleurs, l'ensemble de départ est précisé au lieu du domaine de définition. Les élèves accepteront-ils comme une fonction cette restriction de la fonction inverse ? Si oui, auront-ils tendance à y voir précisément la fonction inverse ? Distingueront-ils ensemble de départ et ensemble de définition ? Cette question permet en ce sens de tester à quel point les élèves sont capables de se départir des exemples vus en cours, nous pensons en particulier aux élèves français pour qui la fonction inverse est une fonction de référence mais qui sont familiers avec les fonctions définies sur des intervalles. Par ailleurs, les élèves palestiniens risquent d'avoir du mal à justifier l'unicité de l'image (nous avons vu que cette tâche/technique relativement au registre algébrique ne faisait pas l'objet d'un enseignement) or la fonction inverse n'est pas étudiée en cours.

Cette question a été inspirée d'une des questions du test de Noguès (Noguès, 1993).

a) Analyse des réponses des élèves français

* 5 élèves ne donnent pas de réponse.
* 1 élève ne reconnaît pas une fonction pour une raison qui semble liée à l'incompréhension du registre verbal/symbolique : "*car on associe des x avec des x et non des x avec des y*" (élève n°11). Il n'aurait apparemment pas compris que 1/x est justement l'image généralement symbolisée par la lettre y !
* 2 élèves montrent une confusion domaine/ensemble de départ : cette situation ne représente pas une fonction parce que la valeur 0 n'est pas exclue.
* 22 élèves donnent une réponse que nous avons acceptée même si les justifications manquent souvent de précision :

    - 10 d'entre eux proposent une justification en se référant essentiellement à la fonction inverse ou à sa représentation graphique : Leur justification est ainsi très succincte, 3 élèves se justifient simplement en remarquant que "*c'est une fonction : f : x -> 1/x*" (élève n°23). L'un de ces trois élèves se trompe même sur l'expression algébrique à donner à cette fonction, "*x -> x + 1/x*" (élève n°22). Ces trois cas sont les seuls parmi ces 10 élèves à avoir proposé une autre représentation (algébrique) de la fonction, même si cette représentation tient lieu de justification. Les 7 autres élèves constatent que c'est la fonction inverse alors qu'un élève se justifie même en remarquant que "*ce sera une hyperbole*". Deux d'entre eux soulignent cependant la restriction à l'intervalle] -1; 1[: "*c'est la fonction inverse dans l'intervalle] -1; 1[*" (élève n°7).

- 12 élèves, tout en reconnaissant là une fonction familière sont plus précis dans leurs justifications : " *(...) En effet, pour tout x de] -1; 1[, cette fonction associe une image. Elle s'écrit f : x -> 1/x. y = 1/x*" (élève n°17). La référence à la définition générale témoigne d'une tentative de généralisation du concept de fonction. Dans le même sens, nous constatons une tentative de contextualisation de leurs réponses puisque 8 de ces 12 élèves précisent la restriction de la fonction sur l'intervalle] -1; 1[et/ou le domaine de définition. Ce qui manque essentiellement à ces justifications est la précision concernant l'unicité de l'image, mais peut-être est-elle implicite pour eux ? En fait un seul élève, donne une réponse vraiment complète "*c'est une fonction car à chaque réel x de l'intervalle] -1; 1[, on associe une image unique f(x)= 1/x excepté pour le réel x=0 (...)*" (élève n° 26). Enfin, 10 de ces 12 élèves proposent une autre représentation de la fonction, il s'agit toujours de la représentation algébrique. L'un d'entre eux fait également allusion à une représentation graphique possible "... *on aura ici une asymptote d'équation x=0* ... " (élève n° 26).

* 15 élèves sur les 22 à avoir reconnu une fonction donnent une autre représentation :
Il s'agit toujours de la représentation algébrique, celle-ci entre dans la stratégie de résolution. Aucun élève n'a donné de représentation graphique de cette fonction.

Ainsi, 17 % des élèves ne répondent pas. 7% confondent domaine de définition et ensemble de départ. 34% donnent une réponse correcte mais imprécise et se justifient par rapprochement avec une fonction familière. Enfin, 40% donnent une réponse correcte dénotant d'une tentative de généralisation du concept de fonction au-delà des exemples stricts de fonctions institutionnalisées en classe.

Réussite avec justification montrant un effort de généralité	40%	Erreur due au registre verbal/symbolique	3%
Réussite par rapprochement avec une fonction familière	34%	Confusion domaine/ensemble de départ	7%
		Non réponse	17%

b) Analyse des réponses des élèves palestiniens

* 9 élèves ne répondent pas.

* 4 élèves répondent "non" et 3 élèves répondent "oui" sans donner de justification. Les élèves palestiniens montrant en général de grandes difficultés avec cette situation, la réponse "oui" non justifiée ne peut être acceptée comme une réponse juste.

* 3 élèves ont des difficultés avec le registre symbolique :

- 2 élèves n'ont pas compris la notation d'intervalle.
- 1 élève pense qu'il ne s'agit pas d'une fonction "*car il n'y a qu'une seule image dans le but*" (élève n°31) ; ici, l'élève apparaît ne pas discerner la notation 1/x symbolisant l'image d'un élément x, et les valeurs que peut prendre 1/x.

* 4 élèves expriment une confusion domaine/ensemble de départ due au fait que l'élément 0 soit inclus dans l'intervalle donné.

* 7 élèves donnent des justifications qui traduisent une restriction sur le concept de fonction :

- 4 élèves rejettent l'expression algébrique de fraction en tant qu'expression possible pour une fonction : "*ce n'est pas une fonction à cause de la fraction*", (élève n°32) ce qui traduit une restriction sur la nature de la loi fonctionnelle.
- 2 élèves reconnaissent une fonction mais se justifient par le fait que la relation est donnée par une équation. Ce qui traduit également une restriction sur la nature de la loi fonctionnelle.
- 1 élève accepte la fonction parce que les ensembles en jeu sont des ensembles de nombres et présente donc une restriction sur la nature des ensembles en jeu.

* 5 élèves pensent que la situation n'est pas une fonction et leurs justifications indiquent des difficultés d'ordre fonctionnel : Ils estiment que la condition d'unicité de l'image n'est pas vérifiée "*1 a pour image 1 et -1*" (élève n°21). Cette erreur liée à l'incompréhension de l'expression algébrique nous semble cacher des difficultés d'ordre fonctionnel sérieuses notamment des difficultés à substituer une valeur à une variable afin d'en calculer l'image.

* 4 élèves pensent avoir une fonction mais donnent des justifications incorrectes qui traduisent des difficultés avec l'expression algébrique de la fonction :

- 1 élève justifie sa réponse par le fait qu'il reconnaît là une fonction affine. Sa justification par référence à une fonction familière est justement possible du fait de l'erreur commise sur l'expression algébrique de la fonction. Rappelons que la fonction inverse n'est pas une fonction enseignée en cours. (élève n°23)
- 3 élèves interprètent mal l'expression algébrique. Ainsi, un des élèves explique : "*fonction car chaque élément x du domaine a une image et pas plus d'une dans le but même si plusieurs x peuvent être liés au même 1/x*".

* 4 élèves se justifient en reprenant uniquement la définition générale de fonction. Malgré le recours à la définition générale, ces réponses ne sont pas suffisamment précises dans le cas de cette situation afin que nous puissions les analyser correctement.

* Enfin, 23 élèves reconnaissent une fonction et donnent des justifications que nous avons acceptées quoiqu'elles soient souvent imprécises :

  - 3 élèves ne justifient pas verbalement leur réponse mais représentent la fonction par un diagramme sagittal ou un tableau de valeurs.
  - 20 élèves estiment avoir affaire à une fonction en se référant explicitement à la définition générale de fonction. L'expression algébrique de la fonction n'est cependant précisée que dans de rares cas (5 fois) ; de plus elle ne suffit pas comme justification : "*oui, f(x) = 1/x est une fonction car chaque élément du domaine a bien une image dans le but parce que ...*" (des calculs de valeurs suivent toujours montrant probablement que chaque élément n'a bien qu'une seule image) (élève n°23). L'unicité de l'image est cependant toujours prise en compte, et ceci soit par le rappel de la définition d'une fonction ou par le calcul de quelques valeurs présenté à l'aide d'un tableau ou sous la forme d'une autre représentation. Ce calcul est présent sur 16 de ces 20 copies sous la forme de diagramme sagittal (10 fois), liste de valeurs (4 fois) ou ensemble de couples ordonnés (2 fois). Seuls 5 élèves réussissent à être plus précis sur la question de l'unicité de l'image "*à un x il ne peut correspondre qu'un seul 1/x*" ou "*un x ne peut pas avoir deux images 1/x différentes car pour que les 1/x soit différents il faut que les x le soient d'abord*" (élève n°24). Par ailleurs, ces représentations montrent que les élèves ont, le plus souvent, conscience de la restriction de la fonction à l'intervalle [-1; 1] car les valeurs choisies se situent entre 1 et -1. Il est également en général précisé que l'élément 0 n'a pas d'image.

De façon générale, la stratégie de résolution, basée sur la définition générale, adoptée par les élèves palestiniens et leurs difficultés avec l'expression algébrique non familière de cette fonction avaient été prévues dans notre analyse. Leur manque de rigueur, en particulier, pour justifier de l'unicité de l'image, tient au fait que cette technique n'a pas été travaillée dans le registre algébrique.

* Sur les 23 élèves qui ont reconnu en cette situation une fonction et y ont apporté des justifications correctes, 19 d'entre eux proposent une autre représentation : Celle-ci détient une importance capitale, elle apparaît servir de preuve à la vérification de l'unicité de l'image ; or il ne s'agit pas de preuve mais d'une intuition que déduisent les élèves à partir du cas d'un nombre très réduit de valeurs 5 ou 6, rarement plus.

Ainsi, 15% des élèves ne répondent pas et 11% ne justifient pas leur réponse, alors que 11% montrent une restriction sur la nature de la loi ou des ensembles et que 12% expriment des difficultés d'ordre algébrique ou fonctionnel. 7% expriment une confusion domaine/ensemble de départ. 5% reconnaissent une fonction et se justifient par changement de représentation. 33% des élèves réussissent à cette question par référence à la définition générale de fonction.

Réussite par la définition générale	33%	Difficulté d'ordre algébrique	4%
Réussite par changement de registre	5%	Confusion domaine/ensemble de départ	13%
Restriction sur la loi ou les ensembles	11%	Réponse non justifiée	11%
Erreur due au registre	5%	Non réponse	15%
Erreur d'ordre fonctionnel	8%	Autre	7%

c) Comparaison des réponses des élèves français et palestiniens

Le taux de réussite relativement très élevé des élèves français (74%) s'explique bien sûr par leur grande familiarité avec la fonction inverse et les fonctions définies sur un intervalle. La réussite du côté palestinien est par contre faible puisque seuls 38% des élèves réussissent. Elle s'explique par leur moins grande familiarité avec la fonction inverse, ainsi probablement que par leurs difficultés à tester la condition de l'unicité de l'image dans ce registre : les justifications des élèves qui ont réussi montrent l'insuffisance de leur stratégie de résolution basée sur la mobilisation de la définition générale. Ce résultat était prévu, nous avons souligné que les élèves palestiniens ne maîtrisaient pas la technique de résolution relative à la tâche de reconnaissance d'une fonction dans le registre algébrique. Leur réponse ne peut se baser que sur une intuition appuyée d'une illustration relevant du cadre numérique. Leurs difficultés générales avec le registre algébrique sont confirmées également par le taux élevé des erreurs d'ordre fonctionnel et algébrique (30%), alors que de telles erreurs ne sont pas relevées du côté français.

- **S4 : L'ensemble des couples de nombres réels (x, y) tels que $x = y^2$.**

Cette situation s'exprime sous la forme d'un registre mixte, couples ordonnés-algébrique, l'équation de la relation étant implicite. Les difficultés liées à ce registre proviendraient, outre la présence des couples ordonnés, du lien à faire entre l'équation et les couples ordonnés. Ce lien permet en particulier de préciser la position des variables x et y dans l'équation, respectivement comme variable indépendante et variable dépendante, comme cela est le cas dans le contrat classique relatif au registre algébrique. Nous pensons que beaucoup d'élèves cependant auront tendance à ne tenir compte que de l'équation algébrique : en effet, si ce registre n'est probablement pas connu des élèves français, il n'est que peu familier pour les élèves palestiniens.

La solution de cette situation S4 consiste à présenter deux couples, (4; 2) et (4; -2) par exemple, montrant que la condition d'unicité de l'image n'est pas vérifiée. Mais certains élèves pourraient ne pas reconnaître en cette situation une fonction non pas à cause de la non vérification de la condition de l'unicité de l'image mais pour des raisons erronées et nous distinguons trois erreurs principales :

1ère erreur. Difficulté générale liée au registre de représentation : l'élève est gêné par exemple par la présence des couples ordonnés, l'élève exprime des difficultés à lier les deux registres. Précisons que cette gêne pourrait également se traduire chez certains élèves par des non réponses.

2ème erreur. Cette erreur correspond à celle que nous avons identifiée dans notre analyse générale comme due à des difficultés liées au statut des variables x et y. Elle va se manifester dans cette situation plus particulièrement par la confusion entre l'équation donnée "$x = y^2$" et l'équation de la fonction carré "$y = x^2$". Elle indique aussi que l'élève s'est focalisé sur un seul des deux registres exprimant la situation.

3ème erreur. Une autre erreur serait de reconnaître en cette situation une fonction en traduisant la relation donnée par la loi "y = x". Ici, l'erreur se situe davantage à un niveau algébrique puisque "$x = y^2$" est équivalent à "y = x ou - x", mais elle indique aussi que l'élève ne fait pas le lien entre les deux sous-registres de ce registre mixte. Cette erreur nous apparaît de moindre gravité, relativement aux deux précédentes, pour autant que le concept de fonction soit impliqué, car on peut penser que l'élève y a tout de même résolu le problème de l'unicité de l'image, si on interprète sa réponse comme une restriction aux valeurs positives de y.

a) Analyse des réponses des élèves français

* 7 élèves ne répondent pas.
* 2 élèves répondent "non" sans donner de justifications. Cette réponse ne peut cependant être acceptée comme une réponse juste, les élèves peuvent très bien avoir rejeté cette situation à cause du registre peu familier.
* 1 seul élève rejette cette situation pour des difficultés liées au registre ("... *car dans les fonctions on ne parle pas de couples*").
* 1 élève exprime une restriction sur la loi fonctionnelle :
  Il reconnaît une fonction en se référant uniquement à la présence d'une expression algébrique : "*on a $f(x) = y^2$ donc on a une fonction*" (élève n° 28). Certes l'image de x par cette relation est bien y^2, mais le seul fait que le lien entre x et y s'exprime par une équation ne suffit pas pour décider qu'il s'agit d'une fonction.
* 5 élèves pensent avoir affaire à la fonction carré. Il s'agit d'une erreur due au statut des variables x et y :
  Les justifications données par deux de ces élèves confirment les difficultés liées à cette erreur que nous avons soulevée dans notre analyse à priori : "*oui, c'est la fonction carré car à tout y on associe y^2. $y \to y^2$. y^2 étant l'image de y appelée x ($x = y^2$)*" (élève n°27) et "*oui, on retrouve une fonction du type $y = x^2$*" (élève n° 10). Les autres se contentent de remarquer

qu'il s'agit de la fonction carré. Soulignons enfin la justification de ces réponses sur la base d'un critère de familiarité.

* 10 élèves pensent avoir affaire à la fonction racine :
Le critère de familiarité avec la fonction racine suffit d'ailleurs le plus souvent pour justifier les réponses "*c'est la fonction racine y = x*" (élève n°8). Tous ces élèves ont donné la représentation algébrique de la fonction racine. Seuls trois élèves ajoutent "qu'à tout x de R+, on associe une image ... " dont un seul précise qu'elle est unique. Nous avons précisé, dans l'analyse de la question, que cette erreur était plutôt d'ordre algébrique.

* 4 élèves nous semblent avoir correctement interprété la situation, même si leurs justifications ne sont pas totalement satisfaisantes car ces élèves nous semblent n'avoir qu'implicitement pris en compte le fait que la condition de l'unicité de l'image n'est pas vérifiée :

- un élève explique "*Pour que cela soit une fonction, il faudrait transformer l'écriture en y = x ou y = - x car le couple de réel (x, y) peut être déterminé par une fonction si pour tout élément x de son ensemble de définition on associe le réel y = f(x) et non x = f(y)*". Soulignons qu'il apparaît comme le seul à avoir clairement fait le lien entre le couple (x, y) et l'équation $x = y^2$. Cependant par sa remarque sur la transformation de l'écriture de l'équation, il nous semble davantage se référer aux expressions algébriques de fonctions connues pour se décider.
- un autre se justifie relativement à l'expression algébrique de la fonction carré, donc par rapprochement avec une fonction familière : "*Non, car c'est $y = x^2$ dans ce cas on ne peut pas parler de fonction pas dans le cas $x = y^2$*" : le fait que l'élève précise bien la différence entre cette équation et celle de la fonction carré nous semble indiquer implicitement la non vérification de la condition d'unicité de l'image. De plus il n'y reconnaît pas la fonction "racine".
- 2 élèves ne considèrent pas avoir une fonction du fait de la présence d'une équation en y plutôt que d'une équation en x : "*il ne s'agit pas d'une fonction car on n'exprime pas x en fonction de son image mais on lui donne un équivalent qui est y^2*"(élève n°1). Nous acceptons cette réponse quoiqu'elle soit moins satisfaisante à notre avis que les deux précédentes. L'équation de la relation proposée ne peut être rejetée uniquement sur la base de sa non conformité avec les équation habituelles en x. Pour décider si cette équation donnée sous la forme x = expression en y représente ou non une fonction, il faudrait que soit vérifiée l'unicité de l'image. Mais il est vrai que les élèves français sont peu familiers avec cette tâche. Cette réponse nous semble indiquer la difficulté de l'élève de se départir des exemples de fonctions algébriques fréquentées : s'il ne se justifie pas par rapport à une équation de fonction précise, il se justifie néanmoins par rapport à la forme que doit respecter l'équation d'une fonction en général.

* Sur les 15 élèves qui pensent avoir reconnu la fonction carré ou la fonction racine, 13 en ont précisé la représentation algébrique : Cette représentation algébrique, n'est pas tant donnée, nous semble t-il, pour répondre à la deuxième partie de la tâche demandée et qui consiste à représenter autrement la fonction, que pour se ramener à la fonction familière supposée représenter la situation. C'est peut-être en ce sens qu'aucun élève ne tente une représentation graphique. Ainsi les élèves qui pensent reconnaître une fonction, carré ou racine, ne se justifient pas relativement à la définition générale d'une fonction mais se basent sur le rapprochement avec la fonction familière supposée. Même les élèves qui ont réussi en référence à la définition générale ne font qu'une référence implicite à la condition de l'unicité de l'image

Ainsi, 24% ne donnent pas de réponse et 20% seulement des élèves réussissent. 33% confondent cette situation avec la fonction racine et 17% la confondent avec la fonction carré. Enfin 6% expriment des difficultés liées au registre de couples ou une restriction sur la loi fonctionnelle.

Réussite (par référence à la définition)	13%	Confusion avec la fonction racine	33%
Erreur due au registre	3%	Confusion avec la fonction carré	17%
Restriction sur la loi	3%	Réponse non justifiée	7%
		Non réponse	23%

b) Analyse des réponses des élèves palestiniens

* 1 élève ne répond pas.
* 5 élèves répondent "oui" sans donner de justification.
* 3 élèves font une erreur d'ordre fonctionnel sur la loi : ils pensent avoir une fonction pour la seule raison de l'existence d'une loi : c'est donc une fonction car "*car x est lié à y*" (élève n°42).
* 1 élève ne reconnaît pas une fonction mais donne une justification erronée : "*pour avoir une fonction, il faudrait que x appartienne à R+*" (élève n°36). Nous avons eu du mal à interpréter sa réponse, il est possible qu'il s'agisse d'une difficulté à distinguer domaine et but car pour avoir une fonction il faudrait que y et non x appartienne à R+, ou bien c'est le fait que la fonction n'est pas partout définie qui le gêne puisque pour un couple (x, y) tel que $x = y^2$ on a bien x appartient à R+.
* 1 élève exprime très clairement des difficultés liées au registre "*x a pour image y dans la relation et dans la fonction l'image est y^2 et cela ne va pas ensemble*" (élève n°18). Il est incapable d'établir le lien entre le symbolisme de couple et le symbolisme de l'équation algébrique.

* 9 élèves montrent des difficultés dues au statut des variables x et y :
  - 3 élèves rejettent l'expression de l'équation en y : "*x a pour image y^2 au lieu de y*" (élève n°32).
  - 6 élèves pensent avoir une fonction et se justifient uniquement en se référant à la définition générale. Il est possible que leur réponse ait été donnée au hasard comme il est possible que l'élève ait reconnu dans cette situation la fonction carré, cette confusion étant très fréquente parmi les élèves palestiniens.

* 29 élèves reconnaissent explicitement la fonction carré, ce qui traduit également, nous l'avions précisé dans notre analyse a priori des difficultés à interpréter le statut des variables x et y :
  - 5 élèves se justifient uniquement à partir d'un changement de représentation (liste de valeurs ou diagramme sagittal).
  - 4 élèves se contentent de préciser que c'est la fonction $y = x^2$.
  - 17 élèves se justifient à partir de la définition générale et d'une illustration sous la forme d'un diagramme sagittal, d'une liste de valeurs ou de couples ordonnés. C'est l'illustration qui dans la grande majorité des cas montre la confusion avec la fonction carré : seuls 7 élèves ont ajouté des précisions en ce sens comme : "*chaque élément a une seule image même si 2 éléments ont toujours la même image*".
  - 3 élèves refusent d'y voir une fonction parce que "*2 éléments peuvent avoir une même image*" (élève n°17). Il nous semble que ces élèves ont non seulement confondu cette situation avec la fonction carré (cette confusion est très claire car ces 2 élèves joignent une illustration par diagramme sagittal) mais qu'ils expriment, de plus, une confusion fonction/injection.

* 2 élèves considèrent avoir affaire à la fonction racine carrée (ce qui traduit davantage rappelons-le des difficultés d'ordre algébrique) et l'indiquent également en s'appuyant sur la définition générale et sur le calcul de quelques valeurs.
* 10 élèves pensent que cette situation ne correspond pas à une fonction et donnent une justification correcte même si elle manque souvent de précision :
  - 6 élèves justifient simplement leur réponse par le fait que "certains éléments peuvent avoir 2 images".
  - 3 élèves présentent un contre-exemple sous la forme de couples ordonnés ou à l'aide de calculs montrant que la relation n'est pas une fonction;
  - 1 élève explique : "*non, car un nombre positif et négatif ont le même antécédent*" (élève n°16).

D'après leurs justifications, ils nous semblent avoir été capables de faire le lien entre les deux registres de ce registre mixte.

* Sur les 28 élèves qui pensent reconnaître la fonction carré ou la fonction racine carré, 22 donnent une autre représentation. Comme pour la situation précédente le registre de représentation choisi n'est pas approprié pour ces cas supposés de fonctions continues. Soulignons que la stratégie de résolution est majoritairement basée sur la définition générale de la fonction (19 sur les 28 élèves qui reconnaissent la fonction carré ou racine ainsi que tous les élèves qui ont réussi).

4% des élèves ne répondent pas ou donnent une réponse fausse non justifiée, 47% des élèves confondent cette situation avec la fonction carré et 15% expriment d'autres erreurs dues au statut des variables x et y. Au total, 82% des élèves échouent à cette situation et 16% seulement des élèves réussissent à cette situation.

Réussite (par référence à la définition)	16%	Erreur due au registre	2%
Erreur d'ordre fonctionnel sur la loi	5%	Autres erreurs dues au statut des variables x et y	15%
Confusion fonction racine carré	3%	Réponse fausse non justifiée	8%
Confusion fonction carré	47%	Non réponse	2%
		Autre réponse fausse	2%

c) Comparaison des réponses des élèves français et palestiniens

Les taux de réussite sont très faibles des deux côtés. Les élèves ont en général, comme cela était attendu puisque cette situation est inhabituelle des deux côtés, été incapables de faire le lien entre les deux registres composant le registre mixte qui représente cette situation. Ils se sont, pour la grande majorité, limités au seul registre algébrique : or dans les deux pays, le registre algébrique est plutôt lié à une expression de la forme "y = ...". Dans ces conditions les élèves des deux pays se raccrochent au contrat didactique en vigueur : les élèves français pensent à la racine carrée qui est dans leur bagage alors que les élèves palestiniens pensent reconnaître la fonction carré, confondant les deux variables par envie de reconnaître quelque chose de connu. Mais au delà de l'effet du contrat didactique qu'il est possible de relever ici, la confusion avec la fonction carré très fréquente parmi les élèves palestiniens ainsi que les autres types d'erreurs, comme celles dues au statut des variables x et y, font ressortir les difficultés des élèves palestiniens avec le registre algébrique. Ces erreurs se retrouvent dans des proportions beaucoup moins grandes du côté français, ceci confirme leur capacité à mieux évaluer les expressions algébriques de fonction aussi loin que le concept de fonction soit impliqué, comme nous l'avons expliqué dans l'analyse de la question.

La capacité de se référer plus facilement à la définition générale de la fonction explique cependant la réussite quelque peu meilleure du côté palestinien alors que le taux de réponse par rapprochement avec la fonction racine carrée met encore une fois l'accent sur la stratégie de résolution adoptée de préférence par les élèves français, et qui consiste à rapprocher la situation à évaluer à une fonction connue . Ces résultats sont, en général, cohérents avec ceux obtenus à la situation précédente et font ressortir les aptitudes des élèves français dans le registre algébrique comparativement aux difficultés des élèves palestiniens dans ce même registre.

- **S5 : L'ensemble des couples (1; 3); (5;3); (15; 3).**

  Cette situation présente, comme la situation précédente, des difficultés dues au registre de représentation, surtout pour les élèves français qui ne manipulent pas forcément les couples. Mais ici, et parce que le registre de représentation est uniquement un registre de couples ordonnés, il est possible que les élèves français puissent interpréter correctement la situation par analogie avec les couples dans le registre graphique. Cette fonction présente par ailleurs des difficultés spécifiques à la fonction elle-même : la fonction est discrète et le but est un singleton. L'élève acceptera t-il comme fonction le cas où le nombre d'éléments de l'ensemble de départ, et surtout d'arrivée, est si réduit ? Si oui, distinguera t-il de façon suffisamment explicite cette fonction de la fonction constante f(x) = 3 définie sur R, ou aura t-il tendance à faire l'amalgame entre les deux ? Ce dernier cas soulignera l'assujettissement de l'élève aux exemples de fonctions fréquentés en cours. Rappelons que les fonctions constantes sont enseignées dans les deux systèmes d'enseignement.

Cette question apparaît dans le test de Even (Even, 1993).

a) Analyse des réponses des élèves français

* 12 élèves ne répondent pas.
* 3 élèves répondent non sans donner de justification.
* 2 élèves n'y voient pas une fonction à cause du registre de représentation "*ce n'est pas une fonction, il n'y a que des couples*" (élève n°25).
* 2 élèves présentent une restriction sur la nature des ensembles. Ils ne reconnaissent pas en cette situation une fonction pour une raison que nous avons interprétée comme étant liée au nombre réduit des éléments en relation "*... ce sont juste 3 cas isolés qui ne nous permettent pas de décrire une fonction*" élève n°7).
* 11 élèves reconnaissent bien une fonction mais leurs justifications ne sont que partielles :
  - 6 d'entre eux y voient une fonction parce qu'ils y reconnaissent une fonction constante, les justifications varient du simple "*c'est une fonction constante*" à "*c'est une fonction constante du type f(x) = 3*". Le critère de familiarité est donc très présent dans la

justification ; ces élèves ne distinguent pas, du moins pas explicitement, le cas de fonction constante définie sur un intervalle et ce cas de fonction discrète. Ce manque de précision apparaît cependant normal dans la mesure où il n'y a pas de distinction domaine/ensemble de départ dans l'enseignement français. Par ailleurs, les élèves français ne sont pas familiers de ce genre de représentation de fonction définies, de plus, sur un nombre très réduit d'éléments.

- 3 élèves y voient une fonction et se justifient en réalisant une conversion du registre des couples vers le registre graphique (par exemple : "*on a bien une fonction. Les points formeront une droite parallèle à l'axe des abscisses. La fonction sera du type y = 3*"). Nous repérons ici, la stratégie de résolution qui consiste pour l'élève à réaliser ce type de conversion quand il doit traiter avec le registre des couples, que nous avions soulignée dans notre analyse a priori. Il n'est d'ailleurs pas exclu que parmi les autres élèves certains aient adopté le même type de démarche même si elle n'apparaît pas dans leur réponse. L'un de ces élèves a également représenté la droite d'équation y=3 ; Il y a donc pour cet élève également, un amalgame (normal) entre cette fonction et la fonction constante.
- 2 élèves seulement reconnaissent une fonction par application de la définition générale contextualisée et précisent donc que "*... pour tout réel de l'ensemble de définition de f, il existe un seul et unique réel f(x) = 3*". Cependant chez ces deux élèves comme pour les autres qui ont reconnu une fonction, si le but est bien identifié, le domaine de définition de cette fonction qui souligne sa particularité relativement aux fonctions constantes rencontrées en classe, ne l'est pas.

* Sur les 11 élèves qui pensent avoir reconnu une fonction, 7 donnent une représentation algébrique qui fait partie de la stratégie de résolution et souligne la confusion entre cette situation et la fonction constante f(x) = 3 définie sur R. Dans le même sens, un élève a proposé une autre représentation, graphique, sous la forme d'une droite d'équation y = 3.

Ainsi, 40% des élèves ne répondent pas, et 10% donnent une réponse fausse non justifiée. 7% expriment une difficulté liée au registre de représentation et 7% une difficulté due au nombre limité d'éléments du domaine. 37% donnent une réponse correcte mais seulement 7 % apportent une justification sur la base de la définition générale alors que 30 % ont rapproché la situation de la fonction constante.

Réussite (par référence à la définition)	7%	Erreur liée au registre	7%
Réussite par changement de registre	10%	Réponse fausse non justifiée	10%
Réussite par rapprochement	20%	Non réponse	40%
Restriction sur les ensembles	7%		

b) Analyse des réponses des élèves palestiniens

* 2 élèves donnent une réponse correcte non justifiée. Il est peu probable que ces réponses aient été données au hasard, du fait de la familiarité des élèves palestiniens avec le registre des couples. Elles doivent probablement signifier un cas d'évidence pour les élèves. Nous les acceptons comme une réussite.

* 15 élèves présentent des erreurs d'ordre divers :

- 7 élèves montrent une confusion fonction/injection. Ils ne reconnaissent pas de fonction "*parce que des nombres différents ont la même image*" (élève n°16).
- 1 élève montre une confusion domaine/but : "*non, car un élément ne peut pas avoir plusieurs images dans le but*". Il s'agit de l'élève n°1 déjà cité pour ce même type d'erreur.
- 5 élèves présentent une restriction sur la nature des ensembles ; ils apparaissent gênés par le fait que le but soit un singleton : "*non, parce que le but n'a qu'un seul élément*" (élève n°47).
- 2 élèves présentent une restriction sur la nature de la loi. Il y a fonction parce que *la loi fonctionnelle s'exprime par une équation algébrique.*

* 44 élèves ont réussi :

- 5 élèves reconnaissent une fonction mais se contentent d'en rappeler la définition générale. Nous acceptons cette réponse et sa justification comme une réussite.
- 4 élèves se justifient par référence à la fonction constante "f(x) = 3", donc relativement à une fonction connue. 3 d'entre eux proposent une autre représentation : un diagramme sagittal. Ici, malgré la référence à la fonction constante, la représentation donnée par trois des élèves laisse à penser que ceux-ci ont bien interprété la situation. En particulier, il n'y a pas confusion entre cette situation et la fonction constante. La référence à la fonction nous semble davantage être une façon d'exprimer que les élèves ont reconnu la loi fonctionnelle.
- 6 élèves justifient leur réponse sur la base d'un changement de représentation : ils ont représenté un diagramme sagittal qui montre que la situation a été correctement interprétée.
- 29 élèves font référence à la définition générale. Il y a toujours précision du domaine de définition et du but de la fonction qui apparaissent soit par la contextualisation (12 cas) de la définition : "*fonction car les nombres 1, 5, 15 ont une image unique*" ou "*Il n'y a pas deux couples avec le même premier terme, ce qui signifie qu'aucun élément du domaine n'a deux images*" (élève n°9), soit par la présence d'une autre représentation de la fonction (20 cas: 14 diagrammes sagittaux, 2 ensembles de couples et 4 points alignés).

11% présentent une restriction sur la loi fonctionnelle ou la nature des ensembles et 13% font preuve d'une confusion fonction/injection ou domaine/but. 75% des élèves ont réussi à cette question, 56% en faisant référence à la définition générale contre 7% qui ont rapproché la situation de la fonction constante définie sur R.

Réussite (par référence à la définition)	56%	Réussite sans justification	2%
Réussite par changement de registre	10%	Confusion fonction/injection ou domaine/but	13%
Réussite par rapprochement	7%	Restriction sur les ensembles ou la loi	11%

c) Comparaison des réponses des élèves français et palestiniens

Les résultats confirment le peu de familiarité des élèves français avec le registre des couples ordonnes opposé à la grande familiarité de ce type de situation pour les élèves palestiniens. N'oublions pas que les fonctions sont introduites à partir du cadre numérique et sur la base de fonctions discrètes. Le taux très élevé de non réponse des élèves français montre que le registre graphique ne permet pas d'aborder, sans enseignement spécifique, le registre des couples ordonnés : même si certains élèves sont capables de faire explicitement ce lien. Les stratégies de résolution adoptées de part et d'autre confirment que les élèves français opèrent par un rapprochement avec la fonction constante définie sur R, alors que les élèves palestiniens se basent plus facilement sur la définition générale. Par ailleurs, il apparaît de façon très claire que les élèves français ne différencient pas cette situation de la fonction constante sur R ou un intervalle de R, du moins pas de façon explicite. Il est vrai que l'enseignement français ne s'attarde à aucun moment sur les ensembles composant une fonction, mais ceci peut s'expliquer également par l'assujettissement des élèves français aux exemples de fonctions enseignées que pointe d'ailleurs la stratégie de résolution qui veut qu'une situation soit une fonction seulement si elle est conforme avec une des fonctions connues : les élèves recherchent alors les points de ressemblance et ne s'attardent pas sur les points de différence.

- **S6 : x et y sont des entiers naturels. Si x est un nombre pair alors y = x/2 ; Si x est un nombre impair alors y = -x + 1.**

  Cette situation est inhabituelle non pas par le fait qu'une seule équation algébrique ne suffit pas à exprimer la loi fonctionnelle car les élèves des deux côtés palestinien et français ont déjà rencontré des fonctions ne s'exprimant pas à l'aide d'une seule équation algébrique sur tout leur domaine, comme par exemple, les fonctions par intervalles. La difficulté vient précisément du fait que l'ensemble de départ est ici un ensemble discret et qu'aucune des équations n'est valable sur un intervalle continu du domaine. Les élèves sont-ils capables d'étendre le cas des fonctions par intervalles à celui des fonctions discrètes également définies à l'aide de plus d'une équation algébrique ? Ce type d'erreur est souligné entre autres par Vinner (voir notre chapitre I) comme une des erreurs récurrentes des élèves dans la maîtrise du concept de fonction. La question, telle que nous l'avons formulée, a été inspirée par une des questions du test de Sfard (Sfard, 1992). Nous n'attendons pas vraiment de démonstration du fait qu'on a affaire à une fonction mais des justifications par des exemples ou d'autres représentations. Une démonstration demanderait de dire qu'un nombre entier est soit pair soit impair et qu'on a un mode de calcul dans chaque cas ; il ne peut être à la fois pair et impair donc l'image est parfaitement déterminée : s'il est pair, en le divisant par 2 on obtient un autre nombre entier déterminé de manière unique, s'il est impair on peut prendre son opposé et ajouter 1, là encore on obtient une image unique. D'ailleurs on montre en même temps que cette fonction est définie sur tout N et qu'elle prend ses valeurs dans N, ce qui était affirmé dans l'énoncé.

a) Analyse des réponses des élèves français

* 15 élèves ne répondent pas.
* 2 élèves répondent non et ne donnent pas de justification.
* 2 élèves répondent oui et ne donnent pas de justification. La difficulté relative de la situation fait que nous ne pouvons accepter une réponse juste si elle n'est pas justifiée.
* 8 élèves présentent une restriction sur la nature de la loi : Ils refusent d'y voir une fonction du fait de la présence de deux expressions algébriques. Leurs justifications varient entre ceux qui estiment avoir deux fonctions, l'une linéaire et l'autre affine, ceux qui pensent qu'une fonction ne peut avoir qu'une seule équation, et ceux qui semblent moins gênés par la présence de deux équations que par la condition posée pour utiliser l'une ou l'autre des équations "*ce n'est pas une fonction car son expression change suivant la nature de l'antécédent*" (élève n°5). Ces trois types de justifications ont été prévus par l'analyse a priori.
* Seuls 3 élèves estiment que cette situation est bien une fonction. Cependant, si 2 d'entre eux se réfèrent à la définition générale "*on peut parler de fonction car y est exprimé en fonction de x sur un ensemble de définition précis*" (élève n°8), l'autre se justifie par la présence d'une équation : "*c'est une fonction car on associe le réel y au réel x par une équation*" (élève 27). Ainsi, s'il n'est pas gêné par la présence de deux équations pour exprimer cette fonction, il se focalise sur l'existence d'une équation, ce qui pourrait indiquer une restriction sur la nature de la loi fonctionnelle.
* Aucun élève n'a proposé une autre représentation de la fonction.

Ainsi, 50% des élèves ne répondent pas et 33% donnent une réponse fausse dont 27% rejettent clairement les fonctions numériques discrètes définies par plus d'une équation. Enfin, seuls 10% des élèves donnent une réponse correcte.

Réussite (par référence à la définition)	10%	Réponse (oui) non justifiée	6,5%
Rejet des deux équations	27%	Non réponse	50%
Réponse (non) non justifiée	6,5%		

b) Analyse des réponses des élèves palestiniens

* 6 élèves ne répondent pas ou donnent une réponse non justifiée.
* 2 élèves répondent non.
* 2 élèves répondent oui. Comme pour les élèves français, nous ne comptabiliserons pas ces réponses parmi les réponses justes.
* 24 élèves présentent une restriction sur la loi fonctionnelle, ils rejettent les deux équations :

  - les justifications de 21 d'entre eux varient entre ceux qui estiment qu'*il y a en fait 2 fonctions* (13 cas) et ceux qui *pensent qu'une fonction ne peut être définie que par une seule équation* (8 cas).
  - 1 élève pense "*qu'il n'y a pas de relation*" (élève n°51).
  - 1 élève pense qu'il n'y a pas de fonction "*car pour que ce soit possible avec deux équations, il faut que chaque équation soit valable sur un intervalle précis et pas pour plusieurs valeurs comme ici*" (élève n°22). Il lie probablement l'expression d'une fonction à l'aide de plus d'une équation, au modèle des fonctions par intervalles.

* 3 élèves expriment une autre restriction sur la loi : Ils ne sont donc pas gênés par la présence de deux équations, mais semblent n'accepter comme fonction que celles dont la relation est définie à l'aide d'expression(s) algébrique(s).
* 5 élèves se basent uniquement sur la définition générale de fonction. Le doute persiste, avec ce type de justifications à ce cas particulier de situation, que certaines de ces réponses aient été données au hasard. Nous n'accepterons pas non plus cette réponse comme juste pour cette situation..
* Les 20 autres réponses sont considérées comme une réussite :
  - 3 élèves justifient leur réponse uniquement à l'aide d'une illustration par diagramme sagittal.
  - 17 élèves se basent sur la définition générale et donnent tous une autre représentation de la fonction (12 diagrammes sagittaux et 4 ensembles de couples ordonnés, 2 listes de valeurs et 2 tableaux de valeurs).

La définition est rarement contextualisée et quand cela est le cas, la contextualisation se limite à préciser le domaine de définition. Il n'y pas de preuve pour montrer que l'image d'un entier donné est bien unique, à l'exception d'un élève qui tente une explication à ce propos. Les autres se contentent de préciser que "*chaque élément n'a qu'une image unique ou qu'aucun élément ne peut avoir deux images*". Ici, également il semble que la représentation donnée par l'élève tienne lieu de preuve quant à l'unicité de l'image. Comme nous l'avions remarqué dans l'analyse a priori, il était difficile d'attendre une preuve complète. Les élèves qui ont réussi se sont donc référés le plus souvent à la définition générale de fonction.

Ainsi, alors que 39 % des élèves rejettent les fonctions numériques exprimées à l'aide de plus d'une équation. 33% des élèves réussissent à cette question, 28 % en se référant à la définition générale.

Réussite (par référence à la définition)	28%	Réponse (oui) non justifiée	3,5%
Réussite par changement de registre	5%	Réponse (non) non justifiée	3,5%
Rejet des deux équations	39%	Non réponse	10%
Autre restriction sur la loi	5%	Autre	8%

c) Comparaison des réponses des élèves français et palestiniens

Les taux de réussite quoique faibles des deux côtés indiquent une avance importante du côté des élèves palestiniens (33% de réussite contre 10%). La capacité de mobiliser la définition générale de la fonction explique certainement en grande partie ces résultats.

Cependant les élèves palestiniens ont plus de réponses erronées alors que les élèves français s'abstiennent de répondre pour la moitié d'entre eux. De façon générale, il semble que le cas des fonctions par intervalles ne peut s'étendre facilement au cas des fonctions discrètes définies par plus d'une équation. Ce qui pourrait traduire une conception de la fonction comme devant présenter une certaine continuité. Cette situation est inspirée d'une question posée par Sfard (Sfard, 1992) à ses étudiants où 73% ne répondent pas ou n'y reconnaissent pas une fonction du fait de la présence de 2 équations. Les résultats obtenus par Sfard avec des étudiants plus avancés confirment la difficulté de ce type de situation en général

- **S7 : Soit l'inéquation $x^2 - y > 0$. A tout couple (x, y) de nombres entiers on fait correspondre la valeur "Vrai" si l'inéquation est vérifiée ou "Faux" si l'inéquation n'est pas vérifiée.**

  Cette question est probablement la plus difficile à traiter. Nous sommes consciente de la difficulté que cela représente pour les élèves de repérer l'ensemble de départ comme étant l'ensemble des couples d'entiers (x, y) ainsi que l'ensemble d'arrivée comme l'ensemble constitué des deux valeurs booléennes vrai et faux. La difficulté se trouve renforcée nous semble-t-il par le choix des symboles x et y pour exprimer les termes du couple élément de l'ensemble de départ, alors que les élèves ont tendance à voir dans les symboles x et y respectivement la variable indépendante et la variable dépendante. Pour toutes ces raisons, cette situation sera considérée de façon quelque peu à part, car nous nous attendons à ce que la majorité des élèves des deux pays échoue à déterminer la bonne réponse, mais nous estimons qu'une réussite pour un élève donné serait, a priori, significative d'une excellente avancée dans la maîtrise du concept de fonction. Cette question apparaît dans le test de Dubinski (Dubinski, 1992) qui s'adresse à des étudiants de l'enseignement supérieur. Pour les élèves français, une manière de répondre à la question pourrait être de faire une résolution graphique de l'inéquation et un régionnement du plan et de voir que la valeur "vrai" correspond à une partie du plan et "faux" à son complémentaire. Cependant, les élèves sont plus habitués à traiter des inéquations d'une variable et le régionnement du plan se limite souvent à un régionnement par des droites. Les élèves palestiniens pourraient se référer à la définition générale de fonction et traiter couple par couple ou voir peut-être une composition de deux fonctions, l'une qui associe à tout couple un nombre entier, l'autre qui associe "vrai" aux entiers strictement positifs et "faux" aux autres.

a) Analyse des réponses des élèves français

* 21 élèves ne répondent pas.
* 2 élèves répondent non. Cette réponse est clairement un échec.
* 1 élève répond oui. Nous ne pouvons pas accepter cette réponse non justifiée comme une réponse juste.
* 6 élèves ne reconnaissent pas une fonction :
  - 4 élèves expriment des difficultés profondes d'ordre fonctionnel. Leurs justifications montrent qu'ils ont eu du mal à cerner jusqu'aux éléments de base permettant de construire une fonction ; ils se centrent sur l'inéquation et sont incapables de déterminer les éléments des ensembles de départ et d'arrivée ainsi que la relation en jeu, d'où des justifications comme "*ce n'est pas une fonction mais une résolution d'équation*" (élève 29) ou "*on étudie la valeur de x^2-y en fonction de zéro, c'est une comparaison*" (élève 28).
  - 2 élèves présentent une restriction sur la nature des ensembles. La situation n'est pas une fonction car elle n'est pas numérique. "*... car ce n'est pas une application qui a tout réel x associe un seul et unique réel y = f(x)*" (élève 30). Mais même dans ces deux cas, les justifications ne sont pas assez précises pour permettre de décider si oui ou non ces élèves ont réussi à déterminer les éléments de base impliqués dans cette relation.

Aucun élève ne donne une réponse correcte à cette situation. 70% ne donnent aucune réponse, 7 % des élèves expriment une restriction liée à la nature des ensembles, et 13 % expriment des difficultés profondes allant jusqu'à une incapacité à déterminer les ensembles en jeu ainsi que le type de relation entre les éléments. Nous avions prévu de grandes difficultés à cette question, les élèves testés apparaissent tous en difficulté devant une situation franchement atypique comme cette situation S7.

Réussite (par référence à la définition)	0%	Autre échec	6 %
Erreur d'ordre fonctionnel	13%	Réponse oui non justifiée	3%
Restriction sur les ensembles	7%	Non réponse	70%

b) Analyse des réponses des élèves palestiniens

* 12 ne répondent pas.
* 4 élèves répondent non. Ils ont donc échoué.
* 8 élèves répondent oui. Nous ne pouvons pas accepter cette réponse non justifiée comme une réponse juste.
* 10 élèves montrent des difficultés sérieuses d'ordre fonctionnel (difficultés à déterminer les ensembles ainsi que la relation en jeu) :
  - 7 d'entre eux n'ont pas du tout compris la situation. Ils ne s'attachent qu'à traiter l'inéquation sans aucune compréhension des ensembles impliqués dans la relation et de la relation en jeu.
  - 2 élèves expriment des difficultés liées au symbole x et y choisi comme terme du couple-élément du domaine : "*non, car x et y ont la même image dans le but*" (élève n° 46). Cette difficulté est soulignée dans l'analyse a priori de cette question.
  - 1 élève explique "*qu'il n'y a pas de domaine et de but à relier*" (élève n° 58).

* 21 élèves donnent des réponses fausses mais qui montrent que l'élève n'est pas complètement démuni devant une telle situation car il a été néanmoins capable de déterminer les ensembles et/ou la relation en jeu :
  - 10 élèves pensent qu'il n'y a pas de fonction parce que la condition de l'unicité de l'image n'est pas vérifiée : "*il y a des couples ordonnés qui auront pour images vrai et faux à la fois, ce qui contredit la définition de la fonction*" (élève n°26). Ces élèves semblent avoir correctement déterminé les ensembles ainsi que la relation en jeu. Leur difficulté serait plutôt d'origine algébrique : difficulté à prouver l'unicité de l'image.
  - 7 présentent une restriction sur la nature de la loi fonctionnelle. Ils estiment qu'*il y a deux fonctions* ; 3 d'entre eux joignent une illustration qui montre qu'ils ont effectivement correctement interprété les ensembles en jeu ainsi que la relation.
  - 3 élèves présentent une restriction sur la nature des ensembles. L'un d'entre eux, en effet, ne reconnaît pas une fonction "*parce que les éléments du domaine ne peuvent être liés à un mot*"(élève n° 42). Les 2 autres se trompent sur l'ensemble de départ et associent au

résultat de l'équation "x^2+y" l'image vrai ou faux, selon le signe de ce résultat, d'après l'illustration sous forme de couples ordonnés qu'ils réalisent. Ils ont saisi la relation en jeu et correctement déterminé le but ; leur réponse pourrait indiquer donc une restriction sur la nature des ensembles qui les poussent à considérer l'ensemble N comme ensemble de départ plutôt que l'ensemble des couples d'entiers (x, y).

* 1 élève présente une confusion domaine/ensemble de départ. Pour lui, certains couples n'auront pas d'image "*par exemple (0, 0) et (1, 1)*" (élève n°20). Il a donc correctement interprété les ensembles impliqués et la relation en jeu.
* Les 6 autres réponses sont considérées comme une réussite :
  - 1 élève justifie sa réponse uniquement à l'aide d'une illustration (couples auxquels sont rattachés la valeur "vrai" ou "faux", selon le cas) (élève n°21).
  - 5 élèves révèlent une bonne compréhension de la situation et se justifient en se référant à la définition générale qu'ils contextualisent en précisant les éléments en jeu dans la relation et la raison pour laquelle l'unicité de l'image est vérifiée par la relation : "*les couples ne peuvent pas à la fois vérifier ou ne pas vérifier l'inéquation*", ou "*un couple sera lié à Vrai ou faux mais pas aux deux à la fois*". Leurs justifications sont également appuyées d'illustrations correctes.

La tendance à donner une autre représentation, davantage sous la forme d'une illustration se retrouve même dans cette situation, puisque plus de la moitié de ceux qui pensent avoir affaire à une fonction, que leurs justifications soient correctes ou erronées, joignent une illustration.

Réussite (par référence à la définition)	8%	Difficulté d'origine algébrique (prouver l'unicité de l'image)	16%
Réussite par changement de registre	2%	Confusion domaine/ens de départ	2%
Difficultés sérieuses d'ordre fonctionnel	16%	Réponse (oui et non) non justifiée	20%
Restriction sur la loi ou les ensembles	16%	Non réponse	20%

c) Comparaison des réponses des élèves français et palestiniens

Comme nous l'avons prévu, les élèves aussi bien français que palestiniens, montrent de grandes difficultés à évaluer cette situation : les taux de non réponse et de réponse non justifiée sont les plus élevés relativement aux autres situations, de même que les taux de réussite y sont les plus bas. Cependant, quoique les élèves palestiniens enregistrent un taux de réussite très faible (10%), 44% d'entre eux réussissent néanmoins à déterminer correctement les ensembles et/ou la relation impliqués dans cette fonction, ce que le peu d'élèves français à avoir répondu à la question ne réussit pas. Cette situation de fonction non numérique ne doit pas avoir de sens, comme la situation S1, pour une grande majorité d'élèves français. Pour cette question encore, il y a aussi plus d'erreurs du côté palestinien en raison du très grand nombre de non réponse du côté français.

- **S8 : Associer à chaque élément de N un entier choisi arbitrairement par un lancer de dé.** Cette situation également très inhabituelle devrait être cependant plus à la portée des élèves que la situation précédente. Il s'agit d'une fonction numérique définie sur un ensemble discret. La détermination des domaines de définition, but et loi fonctionnelle, est a priori évidente. La difficulté vient essentiellement de la loi fonctionnelle présentée comme arbitraire ; deux types d'erreurs sont possibles :

  1ère erreur : Les élèves peuvent ne pas y reconnaître une fonction du fait de la nature arbitraire de la loi.

  2ème erreur : les élèves peuvent rejeter la situation en tant que fonction pensant à tort que la condition d'unicité de l'image n'est pas vérifiée. Il est en effet possible que ces élèves interprètent mal cette situation et pensent qu'un même entier peut avoir plusieurs images obtenues par plusieurs lancers de dés. Il nous semble que cette erreur est moindre que la précédente en termes d'appropriation du concept de fonction car l'élève n'exprime pas de restriction sur la nature de la loi fonctionnelle. Nous considérons alors ce type d'erreur comme une réussite partielle puisque la nature arbitraire de la loi fonctionnelle est acceptée de même que la condition d'unicité de l'image est prise en compte.

Ajoutons que l'élève ne peut justifier sa réponse que par référence à la définition générale de fonction. Cette question a été proposée par Sfard (Sfard, 1992).

a) **Analyse des réponses des élèves français**

* 10 élèves ne répondent pas.
* 2 répondent oui sans donner de justification. Nous acceptons cette réponse non justifiée comme une réussite, car du côté des élèves français, la seule raison de dire oui est que les élèves ont effectivement reconnu une situation exprimant une fonction.
* 13 élèves expriment une restriction sur la nature de la loi fonctionnelle. Ils refusent d'y voir une fonction parce qu'ils n'acceptent pas le lancer de dé comme une loi fonctionnelle. Leurs justifications indiquent qu'une loi arbitraire n'est pas une formule suffisamment précise pour être acceptée comme loi fonctionnelle : "*ce n'est pas une fonction car comme l'entier est choisi au hasard on ne peut pas écrire une équation précise qui associe x à y*" (élève 7), "*non, car là c'est de la probabilité, il n'y a pas de formule précise pour déterminer la fonction*" (élève 2), et "*une fonction n'associe jamais arbitrairement 1 chiffre à 1 autre, elle les associe toujours selon une formule précise*" (élève 4). Cette erreur a été répertoriée dans notre analyse a priori.
* 1 élève ne reconnaît pas une fonction estimant que la condition de l'unicité de l'image n'est pas vérifiée : "*Ce n'est pas une fonction car un antécédent pourrait avoir deux images par*

cette fonction alors que sa représentation graphique n'est pas une parabole" (élève 13). Il est difficile d'interpréter cette réponse.

* 4 élèves estiment que la situation est bien une fonction et justifient leur réponse en s'appuyant sur la définition générale "*oui, car tout élément x de N aura une image unique f(x) selon le lancer de dé*" (élève 9). Ajoutons que cependant seuls 2 de ces 4 élèves précisent que le domaine de définition est N, alors qu'aucun d'entre eux ne précise que les valeurs de la variable y se limitent aux entiers de 1 à 6. Cette imprécision est renforcée par le fait qu'aucun élève ne tente d'illustrer cette fonction à l'aide d'un autre registre. Ces imprécisions nous semblent néanmoins acceptables pour les élèves français aussi nous considérons leur réponse comme une réussite.
* Aucun élève n'a proposé une autre représentation de la fonction.

Ainsi, 40% des élèves sont déstabilisés par ce type de situation, 43% des élèves n'acceptent pas les lois arbitraires comme loi fonctionnelle, et 17 % semblent avoir accepté la condition d'arbitraire sur la loi fonctionnelle tout au moins dans le cas des fonctions numériques. 13% des élèves français réussissent à cette situation.

Réussite (par référence à la définition)	13%	Autre	3%
Réussite sans justification	7%	Non réponse	33%
Rejet d'une loi arbitraire	43%		

b) Analyse des réponses des élèves palestiniens

* 7 élèves ne répondent pas.
* 3 élèves répondent non.
* 5 élèves répondent oui. Nous n'accepterons pas cette réponse non justifiée du côté des élèves palestiniens puisque certains élèves pensent avoir une fonction sur la base d'une restriction d'ordre fonctionnel (voir ci-dessous).
* 5 élèves montrent une restriction sur la loi fonctionnelle et rejettent la loi fonctionnelle arbitraire : "*ce sont des probabilités*" (élève n°22) ou "*il n'y a aucune relation entre les entiers et les nombres qui apparaissent sur le dé*" (élève n°35).
* 2 élèves expriment une erreur d'ordre fonctionnel : la loi est acceptée cependant l'unique critère sur lequel ils se basent pour reconnaître une fonction est justement qu'il existe une loi "*fonction, les entiers ont bien une relation avec les nombres sur le dé*" (élève n°45). Ces élèves sont incapables d'évaluer correctement la loi de cette situation ; ils ne testent pas notamment la condition de l'unicité de l'image.
* 17 élèves interprètent mal la loi fonctionnelle de cette situation : ils estiment que *les éléments de l'ensemble de départ auront plusieurs images par le lancer de dé.* 6 d'entre eux appuient d'ailleurs leur justification d'une illustration. La comparaison de leur réponse à la situation de

fonction constante à laquelle ils ont correctement répondu, confirme que ces élèves construisent mal la fonction et donnent au même nombre plusieurs images par différents lancers de dé. C'est donc la condition d'unicité de l'image qui leur semble non vérifiée comme nous l'avons dit dans l'analyse a priori, ces réponses sont pour nous des réussites partielles.

* 22 élèves donnent une réponse que nous avons considérée comme une réussite :

- 1 élève justifie sa réponse uniquement à l'aide d'un diagramme sagittal.
- 4 élèves se justifient sur la base de la définition générale. Nous acceptons cette justification à cette situation, car l'élève semble avoir vérifié la condition de l'unicité de l'image.
- les 17 autres justifient leur réponse en se basant sur la définition générale qu'ils contextualisent en précisant le domaine de définition et/ou le but, et surtout en explicitant la loi fonctionnelle et la condition d'unicité de l'image : "*car chaque nombre entier n'a qu'une image après le lancer de dé une fois pour chaque nombre*"(élève n°12). Leur réponse est, de plus, 11 fois sur 17 appuyée par une illustration à l'aide d'un diagramme sagittal.

Sur les 22 élèves qui ont correctement répondu, 12 ont donné une autre représentation sous la forme d'un diagramme sagittal.

Réussite (par référence à la définition)	34%	Rejet d'une loi arbitraire	8%
Réussite par changement de registre	2%	Autre erreur d'ordre fonctionnel	3%
Réussite partielle	28%	Réponse non justifiée (oui et non)	13%
		Non réponse	11%

c) Comparaison des réponses des élèves français et palestiniens

Le taux de non réponse des élèves français (33%) à cette situation S8, nettement moins élevé que leur taux de non réponse à la situation S6 nous laisse penser que les difficultés des élèves français sur ces deux situations ne proviennent pas du fait que la fonction soit discrète, voire même du fait que le nombre d'éléments soit réduit dans le domaine ou dans le but (d'ailleurs les élèves français réussissent beaucoup mieux à cette situation qu'à la précédente) : il nous semble que la nature de la loi est plus directement en cause. L'organisation de l'enseignement français très centré autour des fonctions enseignées ainsi que le peu de référence à la définition générale de la fonction expliquent les plus grandes difficultés (13% de réussite et 43% d'échec) relativement au élèves palestiniens (36% de réussite et 16% d'échec) à accepter des fonctions non habituelles. Les deux groupes d'élèves acceptent plus facilement une fonction décrite par une loi arbitraire, qu'une fonction exprimée à l'aide de deux équations.

- **S9 : Les graphiques**

  Cette situation est constituée de trois représentations graphiques dont aucune ne correspond à une courbe connue. Les deux premières visent à vérifier que l'élève accepte, comme représentations de fonctions, des courbes non continues, que le domaine de définition soit composé d'un seul intervalle (cas S9.1) ou d'intervalles disjoints (cas S9.2). Les accepter comme telles signifie que l'élève n'est pas gêné par les courbes discontinues, ce qui représente une erreur largement répertoriée dans les différentes recherches consacrées à la notion de fonction. Le troisième cas (cas S9.3), qui n'est pas une fonction, vise à s'assurer que l'élève est capable de vérifier la propriété de l'unicité de l'image dans le registre graphique, et n'est pas aveuglé par la constatation de la continuité de la courbe. Une erreur ou une non réponse en particulier au troisième cas confirme, nous semble-t-il, des difficultés sérieuses dans le registre graphique. Le registre graphique est largement utilisé dans la représentation de fonctions du côté français ; du côté palestinien même si son statut est très marginalisé relativement au registre algébrique, il reste le deuxième registre le plus présent dès l'abord de l'étude des fonctions numériques. Par ailleurs, nous avons vu que la reconnaissance d'une fonction dans le registre graphique était une tâche pratiquée dans le manuel palestinien de 10ème d'où l'existence de la technique du test de la droite verticale. Sans être familière, cette tâche est également connue des élèves français : la tâche de reconnaissance d'une fonction ne se pose, d'ailleurs, que dans le cas de situation s'inscrivant dans le registre graphique. Cette question apparaît parmi les exercices du manuel de 1ère S que nous avons retenu (exercice 1 p 112).

a) Analyse des réponses des élèves français

* 2 élèves ne donnent aucune réponse.
* 2 élèves présentent des difficultés sérieuses avec le registre graphique : bien que leurs réponses soient correctes, les justifications sont erronées et montrent qu'il ne distinguent pas les variables x et y. L'élève n°6, par exemple, justifie ainsi ses réponses aux situations S9.1 et S9.2 : "*oui, pour chaque réel y de l'ensemble de définition il n'y a qu'un réel x qui est associé*". Par ailleurs, les justifications au cas S9.3 sont absentes ou erronées : "*non, car il ne peut y avoir plusieurs solutions de l'équation $x = y$*" (élève n°28).
* 10 élèves sont gênés par l'une ou l'autre forme de discontinuité :
  - 2 élèves ne répondent pas à l'un des deux cas S9.1 et S9.2 mais répondent correctement aux deux autres cas. Quoique les réponses données ne soient pas justifiées, il nous semble pouvoir les accepter. Nous considérons que ces élèves sont gênés par certaines formes de discontinuité de courbes.
  - 2 élèves répondent correctement aux cas S9.1 et S9.3 mais ont des difficultés avec le cas S9.2 : l'un ne répond pas et l'autre n'y reconnaît pas une fonction parce que "*les réels de*

l'intervalle [-1, 1] n'ont pas d'antécédent (élève n°29)". La discontinuité de la fonction due à un ensemble de départ fait d'intervalles disjoints leur pose clairement problème.

- 4 élèves répondent correctement aux cas S9.2 et S9.3 en se justifiant sur la base de la définition générale. Les réponses inexistantes ou fausses mais non justifiées au cas S9.1 laissent penser que ces élèves sont gênés par ce cas de discontinuité de courbe.
- 2 élèves ne répondent pas aux cas S9.1 et S9.2 mais répondent correctement, en se justifiant sur la base de la définition générale au cas S9.3. L'un d'entre eux contextualise sa réponse en expliquant que x=0 a deux ordonnées. Ces élèves semblent donc clairement déstabilisés par les courbes discontinues.

* 5 élèves donnent des réponses correctes sans justifications ou avec des justifications que nous avons eu du mal à interpréter :

- 1 élève donne trois réponses justes sans aucune justification.
- 4 élèves pensent que les graphiques S9.1 et S9.2 sont bien des fonctions mais au lieu de justifier leurs réponses, font remarquer que la fonction est paire, ce qui est d'ailleurs correct pour autant qu'on puisse se fier au graphique ! Par ailleurs, seuls 2 de ces élèves justifient correctement leur réponse, sur la base de la définition générale, au cas S9.3. Les deux autres ne donnent pas de justifications.

Cependant les réponses à chacune des trois situations étant justes, il est difficile d'envisager qu'elles aient été données au hasard. Nous pensons en définitive que ces constatations traduisent une difficulté à mobiliser la définition générale dans le registre graphique, au moins dans les cas qui correspondent effectivement à des fonctions : leur sentiment d'avoir une fonction est plutôt intuitif. Pour montrer néanmoins qu'ils savent traiter les fonctions dans le registre graphique, certains effectuent des tâches qui leur sont habituellement demandées alors que cette tâche de reconnaissance de fonction ne l'est que très rarement. Dans ce sens nous accepterons cette réponse comme une réussite partielle.

* 11 élèves donnent des réponses que nous considérons comme correctes :

- 9 élèves donnent trois bonnes réponses, toutes justifiées sur la base de la définition générale. 3 de ces élèves tentent de contextualiser leur réponse (allusion au test de la droite verticale, exemple de valeur de x ayant plus d'une image au cas S9.3, ...).
- 2 élèves répondent correctement aux cas S9.2 et S9.3 mais ne reconnaissent pas en S9.1 une fonction en pensant que *certains points ont plus d'une image : ces points sont spécifiés pour être les deux points de discontinuité de la courbe.* Il s'agit probablement d'une mauvaise interprétation du symbolisme graphique, nous considérons donc leur réponse comme correcte.

Ainsi, 7 % des élèves ne répondent pas. 7 % montrent des difficultés sérieuses avec le registre graphique. Le cas de non fonction est reconnu par 87 % des élèves et correctement justifié par 70% des élèves, alors que 53% des élèves réussissent mais seuls 37% se justifient de façon acceptable. De façon générale, nous constatons une certaine difficulté à mobiliser la définition générale de la fonction dans ce registre.

Réussite (par référence à la définition)	37%	Difficultés avec la discontinuité dans le registre graphique	33%
Réussite mais manque de justifications	13%	Difficultés sérieuses avec le registre graphique	7%
Réussite sans justification	3%	Non réponse	7%

b) Analyse des réponses des élèves palestiniens

* 5 élèves ne donnent aucune réponse.

* 13 élèves donnent des réponses dont les justifications ne laissent aucun doute sur leurs difficultés sérieuses avec le registre graphique :

- 2 élèves ne donnent aucune justification mais leur erreur au cas S9.3 ne laisse aucun doute sur leurs difficultés dans le registre graphique.
- Chez les 11 autres, les critères permettant de reconnaître une fonction à partir d'une courbe varient fortement d'un élève à l'autre. La continuité est cependant le critère qui revient le plus souvent. Ainsi 4 élèves estiment que le cas S9.2 n'est pas une fonction alors que le cas S9.3 l'est parce que *la courbe est ou n'est pas continue*. Un élève voit dans le cas S9.2 deux fonctions "*une fonction et son symétrique*" (élève n°35), d'autres se justifient sur la base de *l'intersection/la non intersection par la courbe de l'axe des y ou des x* (élève n° 52) ; Un élève considère que *les premier et quatrième quadrants du repère indiquent le domaine alors que les deuxième et troisième indiquent le but* (élève n°36), etc.

* 17 élèves sont gênés par l'une ou l'autre forme de discontinuité :

- 1 élève donne trois réponses non justifiées, seule celle du cas S9.3 est juste.
- 6 élèves donnent 3 réponses non justifiées. La réponse fausse à un des deux cas S9.1 ou S9.2 indique des difficultés avec l'une des deux formes de discontinuité.
- 10 élèves ne répondent pas ou donnent au moins une réponse fausse et non justifiée à l'un des deux cas S9.1 ou S9.2. Le cas S9.1 est cependant plus facilement reconnu puisque 4 de ces 10 élèves y reconnaissent une fonction et se justifient sur la base de la définition générale, alors que deux seulement reconnaissent une fonction au cas S9.2 et se justifient correctement. La réponse de ces 10 élèves au cas S9.3 est par ailleurs toujours correcte. Les justifications données le sont toujours sur la base de la définition générale et ne sont que rarement contextualisées (chez trois élèves).

* 4 élèves donnent trois réponses justes non justifiées : Etant donné la familiarité des élèves palestiniens avec cette tâche du registre graphique, ainsi que le fait que les trois réponses justes ont difficilement pu être l'effet d'un hasard, nous considérons ce cas de réponse comme une réussite.
* 22 élèves donnent des réponses que nous considérons comme correctes :
  - 12 élèves donnent 3 bonnes réponses, toutes justifiées sur la base de la définition générale. 6 d'entre eux ont également tracé des droites verticales ou ont contextualisé leurs réponses à l'aide de valeurs lues sur les différents graphiques.
  - 7 élèves répondent correctement aux deux derniers cas et donnent une mauvaise réponse au cas S9.1. mais il s'agit d'un problème de symbolisme graphique puisqu'ils se justifient sur ce dernier cas en expliquant que certains éléments ont deux images. Cette erreur est acceptable comme une bonne réponse. Les autres justifications sont données sur la base de la définition générale appuyée de tracés de droites verticales.
  - 3 élèves se justifient uniquement par le test de la droite verticale dont un qui commet l'erreur, que nous acceptons comme une bonne réponse, au cas S9.1.

    Il faut souligner que la majorité des élèves se justifient sur la base de la définition générale et que la référence au test de la droite verticale n'est qu'implicite.

Ainsi, 8% des élèves ne répondent pas et 21% montrent des difficultés sérieuses avec le registre graphique. Le cas de non fonction est reconnu par 70% des élèves (52 % avec justification) alors que 28% des élèves sont gênés par les discontinuités des courbes. 43% des élèves réussissent (36% avec justification).

Réussite avec justifications basées sur la définition	31%	Difficultés avec la discontinuité dans le registre graphique	28%
Réussite sur la base du test de la droite verticale	5%	Difficultés sérieuses avec le registre graphique (dont erreur au cas S9.3)	21%
Réussite sans justification	7%	Non réponse	8%

c) Comparaison des réponses des élèves français et palestiniens

Nous comparons d'une part les réponses globales : correctes sur les trois fonctions, justifiées ou non, non réponse totale, échec à au moins une ; d'autre part les réponses pour S9.3 : réponse justifiée, non réponse, réponse fausse (i.e. oui).

		Réussite	Non réponse	Echec
S9 : Les 3 (correct justifié ou non)	F	53%	7%	40%
	P	43%	8%	49%
S9.3 seulement: (correct justifié ou non)	F	70%	7%	0%
	P	52%	8%	33%

L'avance des élèves français sur cette situation était attendue du fait de la familiarité relative de cette tâche ainsi que de l'importance du recours au registre graphique dans l'enseignement français. Cependant cette avance reste modeste relativement aux résultats des élèves palestiniens, mais il est vrai que, si nous leur supposons moins d'aptitude en général dans le registre graphique, cette tâche leur est particulièrement familière. En fait, l'avance des élèves français relativement aux élèves palestiniens dans le registre graphique est davantage marquée par le taux de difficultés sérieuses nettement moins élevé du côté français (7% contre 21%), ainsi que notamment l'échec important du côté palestinien au cas S9.3 (33%) alors qu'il n'y en a pas du tout du côté français.

II.3. Conclusions de l'analyse de la première partie

Nous avons fait ci-dessous un tableau récapitulatif où les items réussis par les palestiniens et échoués par les français sont en gras, en italique le contraire et en normal ceux qui sont mal réussis des deux côtés. Pour S4, les réponses erronées sont subdivisées en 3 catégories : racine carrée, carré, autres erreurs. Les élèves français réussissent mieux la fonction 1/x et la reconnaissance de la fonction dans le registre graphique, ce qui correspond bien à ce qui est enseigné en France. Les élèves palestiniens réussissent mieux S1, S2, S5 et, dans une moindre mesure, S8 qui correspondent à des fonctions qui ne peuvent pas s'exprimer par une formule dans le cadre algébrique. Ces situations sont souvent rejetées par les élèves français ou produisent chez eux beaucoup de non réponse (par exemple pour S5 on a le même taux d'échec mais ce sont surtout les non réponse qui font la différence). Pour les situations qui sont mal réussies des deux côtés, on peut voir beaucoup de non réponse du côté français, surtout pour S6 et S7 alors que les élèves palestiniens produisent davantage de réponses erronées. Le cas S4 est intéressant puisque les réussites sont à peu près équivalentes et que les erreurs sont différentes.

		Réussite	Non réponse	Echec
S1	**F**	**17%**	**20%**	**43%**
	P	**64%**	**0%**	**28%**
S2	**F**	**34%**	**27%**	**38%**
	P	**71%**	**2%**	**25%**
S3	*F*	*74%*	*17%*	*10%*
	P	*38%*	*15%*	*41%*
S4	F	13%	23%	33% 17% 6%
	P	16%	2%	3% 47% 32%
S5	**F**	**37%**	**40%**	**24%**
	P	**73%**	**0%**	**24%**
S6	F	10%	50%	47%
	P	33%	10%	27%
S7	F	0%	70%	27%
	P	10%	20%	60%
S8	F	13%	33%	43%
	P	36%	11%	16%
S9 (les 3 correct	*F*	*53%*	*7%*	*40%*
justifié ou non)	*P*	*43%*	*8%*	*49%*
S9.3 seulement	*F*	*70%*	*7%*	*0%*
(justifié)	*P*	*52%*	*8%*	*33%*

II.3.1. Conclusion de l'analyse des réponses des élèves français

L'étude des productions des élèves français a confirmé leurs difficultés prévues face à la tâche de reconnaissance d'une fonction. Les taux de non réponse et de réponses non justifiées très élevés, reflètent de façon certaine le peu de familiarité de ces élèves avec cette tâche en général, que caricaturent certaines situations, tout particulièrement les situations non numériques, qui apparaissent ne pas avoir de sens pour eux, ou plus généralement les situations qui ne peuvent pas s'exprimer par une formule.

Les élèves français n'acceptent comme fonction que les fonctions numériques définies par une seule loi, ou à la rigueur sur des intervalles, dont les ensembles de départ et d'arrivée sont exprimés de façon explicite : ce que révèlent clairement, non seulement les taux de non réponse très élevés à des situations représentant pourtant des fonctions numériques (situations S5 et S6), mais aussi les grandes proportions d'élèves qui expriment une restriction sur la loi fonctionnelle ou la nature des ensembles. Cette constatation n'a probablement rien d'étrange puisque c'est ainsi que se présentent les fonctions dans l'enseignement mais cela nous semble apporter un éclairage supplémentaire sur le rapport des élèves français à la définition générale. Ceux -ci ne se justifient pas sur la base de la définition générale de la fonction mais sur la base d'un rapprochement avec une fonction, ou une loi de dépendance, connue. La référence quasi-unique des élèves devient donc la panoplie des fonctions institutionnalisées ; ce qui pourrait expliquer que les élèves français ont du mal à se dégager des exemples de fonctions fréquentées en classe.

II.3.2. Conclusion de l'analyse des réponses des élèves palestiniens

Les taux de non réponse et de réponse non justifiée relativement faibles, confirment la familiarité des élèves palestiniens avec la tâche demandée même s'ils sont loin d'être toujours capables d'établir les réponses correctes. Nous résumons ici les principales caractéristiques de cette population :

- Les élèves palestiniens ont plus de facilité à déterminer les éléments caractéristiques d'une fonction (domaine, but, loi fonctionnelle) et ceci est directement à mettre en relation avec le cadre général offert par la définition générale de la fonction.
- de façon cohérente avec cette première constatation, ces élèves se justifient de préférence sur la base de la définition générale, et ceci même quand la situation se réfère, ou semble se référer, à une fonction qu'ils connaissent (comme pour la situation S4).
- les erreurs de restriction du concept de fonction sont moins importantes dans l'ensemble, par rapport à la population française, ce qui est dû probablement également à une fréquentation de fonctions ne se limitant pas aux seules fonctions numériques définies sur un intervalle (en particulier des fonctions discrètes et définies sur un ensemble fini).

- des erreurs intrinsèques à la manipulation de la définition générale apparaissent chez les élèves palestiniens, alors qu'elles sont absentes chez les élèves français.
- Les élèves palestiniens accusent des difficultés spécifiques aux registres algébrique et graphique : celles dues au statut des variables x et y.
- les élèves palestiniens donnent, plus facilement, d'autres représentations pour les différentes situations, en particulier la représentation sagittale, inexistante du côté français.

II.3.3. Comparaison et interprétation

Une meilleure réussite en général chez les élèves palestiniens due à un cadre de référence plus large que permet le recours à la définition générale

La comparaison des taux de réussite mais aussi des taux de non réponse et de réponse non justifiée, des deux côtés pour chaque situation, montre et ceci n'a rien d'étonnant une meilleure réussite aux situations les plus familières par les élèves du système d'enseignement concerné. Ainsi, les élèves français réussissent mieux que les élèves palestiniens aux situations S3 et S9 faisant appel aux registres algébrique ou graphique, alors que les élèves palestiniens réussissent mieux que les élèves français aux situations S1 et S5. Cependant si nous comparons ces mêmes taux pour les situations qui sont soit aussi familières des deux côtés (situation S2), soit au contraire peu ou pas connues des deux côtés (situations S6, S7 et S8), nous constatons, en faveur des élèves palestiniens, à la fois un taux de réussite nettement plus élevé, et des taux de non réponse et de réponse non justifiée nettement moins élevés. En revanche, il y a aussi plus d'erreurs du côté palestinien pour S6 et surtout pour S7. Les élèves palestiniens ont clairement plus de facilité à déterminer les différents éléments caractérisant une fonction et à tester la condition de l'unicité de l'image. Cette facilité va de pair avec la tendance des élèves palestiniens à se justifier relativement à la définition générale : ceci se reflète même dans leurs réponses aux situations où un rapprochement avec une fonction familière est pourtant possible (situation S4 et S5). Les élèves français, par contre, ne se réfèrent pas ou rarement à la définition générale, et en particulier négligent la condition d'unicité de l'image ; ceci peut être constaté y compris sur la situation S9, où la justification sur la base de la définition générale fait pourtant partie du contrat didactique sur cette tâche considérée dans le registre graphique : si la majorité des élèves qui ont réussi se réfèrent effectivement à la définition générale, il reste néanmoins 13% d'élèves qui ont du mal à se justifier ou qui apportent des justifications autres et inadéquates, mettant en lumière le peu de poids accordé en général, par l'enseignement français, au rôle de la reconnaissance explicite de l'objet fonction dans la construction de ce concept chez les élèves. Cependant aucun élève français ne dit que l'exemple S9.3 est une fonction alors que c'est le cas de 33% des élèves palestiniens.

Les meilleurs résultats des élèves palestiniens à cette première partie du questionnaire, ne peuvent à notre avis s'expliquer que par l'organisation de l'enseignement palestinien, non structuré autour de fonctions de référence relevant du registre algébrique, et offrant dès le départ un cadre de référence suffisamment large à partir duquel va se construire le concept de fonction, celui offert par la manipulation de la définition générale.

Erreurs de restriction du concept de fonction plus fréquentes du côté français

La comparaison des taux d'erreurs des deux systèmes d'enseignement n'est pas significative tels qu'ils apparaissent dans les différents tableaux d'analyse des réponses pour chacun des deux systèmes d'enseignement, du fait du taux très élevé de non réponse ou de réponse non justifiée, notamment du côté français. Nous avons organisé alors la comparaison des taux d'erreurs relativement au nombre d'élèves ayant répondu à chaque question, et qui diffère bien sûr pour chacune d'elles.

	Elèves Français		Elèves palestiniens	
	Restriction sur la Nature de la loi	Restriction sur la nature des ensembles	Restriction sur la nature de la loi	Restriction sur la nature des ensembles
S1	22%	33%	4%	4%
S2	33%	……..	20%	….
S5	….	13%	3%	8%
S6	72%	….	47%	….
S7	….	33%	19%	12%
S8	65%	….	10%	….
S9	35% : restriction spécifique au registre graphique (rejet des discontinuités de courbes).		30%, 7% : restriction spécifique au registre graphique (rejet des discontinuités de courbes ou considérer le cas S9.3 comme une fonction parce que le tracé est continu)	

Il apparaît alors que les erreurs de restriction du concept de fonction (sur la nature de la loi ou sur la nature des ensembles), aux différentes situations, à l'exception des situations S3 et S4 , sur lesquelles nous reviendrons, apparaissent dans des proportions plus importantes, du côté français. Il nous semble cependant que ce type d'erreur n'est pas véritablement imputable à la stratégie de réponse utilisée pour reconnaître ou non une fonction. En effet, pour que ce type d'erreur apparaisse, il faut que les ensembles en jeu et la loi fonctionnelle aient déjà été déterminés. Il nous semble alors que ce type d'erreur est directement dû à la limitation des exemples de fonctions rencontrées ; or les élèves français ne rencontrent pratiquement que des fonctions algébriques ou des situations fonctionnelles traduisibles dans le registre algébrique. Le peu de fonctions discrètes et définies sur des ensembles finis, fréquentés par les élèves palestiniens en classe de 10ème, semble permettre d'élargir la conception des élèves relativement à la notion de fonction de façon significative.

Difficultés liées à la manipulation de la définition générale de fonction

Mais la construction d'un enseignement sur les fonctions organisé autour de la référence à la définition générale, comme celui de l'enseignement palestinien, présente des difficultés intrinsèques et fait apparaître des types d'erreur non répertoriés du côté français. Il s'agit en particulier des erreurs dues à la confusion entre les domaines et buts ou entre les fonctions et injections qui sont la conséquence d'une mauvaise interprétation de la condition de l'unicité de l'image, et qui soulignent la difficulté de la conceptualisation de cette caractéristique de la fonction et de la nécessité de la prendre en charge par un dispositif adéquat de tâches/techniques. L'absence de ces erreurs du côté français s'explique précisément par le fait que les notions de domaine, de but, de fonction relativement à la relation ou à l'injection, et dans leurs liens avec la condition de l'unicité de l'image n'existent pas dans les programmes français. C'est en ce sens que l'on peut interpréter l'existence de l'erreur de confusion domaine/ensemble de départ, et dans des proportions sensiblement identiques, aussi bien du côté palestinien que du côté français.

Une meilleure assurance dans le registre algébrique pour les élèves français

Ceci est incontestable à l'examen des résultats des élèves à la situation S3, et peut-être davantage à l'examen de leurs résultats à la situation S4. La première ayant l'inconvénient de représenter une fonction trop familière aux élèves français. Quoique les élèves palestiniens enregistrent à cette situation une réussite légèrement supérieure (16% contre 13%), les difficultés liées au statut des variables x et y qui concernent 69% des élèves palestiniens contre 38% des élèves français ayant répondu à la situation S4, font bien ressortir que la référence au concept général de fonction ne suffit pas pour une bonne maîtrise du registre algébrique. Un enseignement spécifique est nécessaire. L'enseignement français qui insiste fortement sur le registre algébrique est certainement bénéfique sur ce point particulier.

Une aisance, à relativiser, des élèves français dans le registre graphique

La comparaison des taux de réussite et de non-réponse ou de réponse non justifiée des deux côtés révèle un avantage du côté français, comme le montre le tableau récapitulatif ci-dessous.

Elèves français			Elèves palestiniens	
Réussite	Réussite partielle	Non réponse ou réponse non justifiée	Réussite	Non réponse ou réponse non justifiée
36%	13%	16%	36%	29%

Cet avantage des élèves français nous apparaît cependant relatif si l'on tient compte du fait que le registre graphique bénéficie d'un meilleur statut dans l'enseignement français. Du côté palestinien, en effet, le registre graphique est rarement impliqué dans d'autres tâches que dans celles de reconnaissance d'une fonction et de représentation graphique (des seules fonctions polynômes). Dans ce sens, il nous semble que viser explicitement la tâche de reconnaissance de fonction dans un registre donné est important pour la conceptualisation générale de la fonction.

Par contre, la comparaison des taux d'élèves présentant des difficultés sérieuses avec le registre graphique qui est, respectivement du côté français et du côté palestinien, de 6% et de 21%, avec une différence entre les deux encore plus marquée, si les taux sont donnés relativement au nombre d'élèves ayant répondu à la question (respectivement 7% et 23%), montre que la variété des tâches relevant du registre graphique proposées dans le système d'enseignement français, et ce alors que la tâche de reconnaissance de fonction y reste peu impliquée, contribue de façon incontestable à faire mieux saisir la position des variables dépendante et indépendante dans le registre graphique.

Cependant, les erreurs de restriction du concept de fonction liées à la continuité, spécifiques au registre graphique, sont plus fréquentes du côté français que du côté palestinien (respectivement de 33% et 28%, et de 36% et 30% si les taux sont calculés relativement au nombre d'élèves ayant répondu à la question) ce que nous expliquons par le fait que le recours plus appuyé au registre graphique à travers une panoplie de tâches et de tâches/techniques beaucoup plus variée dans l'organisation de l'enseignement français sur les fonctions, ne réussit pas à pallier les effets négatifs, à la fois, de la limitation des élèves à la fréquentation de bonnes courbes (courbes ne présentant pas de discontinuité monstrueuse) et, à la place trop réduite réservée à la tâche de reconnaissance de fonction dans ce registre.

concernant le test de la droite verticale

Les justifications apportées par les élèves palestiniens font ressortir que la mise en place de la technique spécifique du test de la droite verticale pour la résolution de cette tâche n'apparaît pas préférable au recours direct à la définition générale. D'ailleurs ces élèves utilisent le test de la droite verticale, principalement de façon implicite et semblent préférer se justifier par une référence directe à la définition générale de fonction.

Les conversions de registre - Difficulté des élèves palestiniens à sortir du cadre numérique

Nous avons remarqué dans les réponses données par les élèves palestiniens que la tendance à proposer une autre représentation de fonction était en général très marquée. Une deuxième représentation de la fonction apparaît dans les réponses des élèves, dans des proportions non négligeables mais surtout, donner une autre représentation semble faire partie de la stratégie de réponse des élèves notamment pour prouver l'unicité de l'image dans des registres, en particulier le registre algébrique, où ils ne peuvent apporter de preuve formelle. Il arrive assez souvent que les justifications des élèves palestiniens se résument à une conversion de registre (entre 3% et 5% des réponses à chaque situation). Toutes ces conversions de registres s'effectuent toujours vers des registres relevant du cadre numérique et davantage appropriés aux fonctions définies sur des ensembles finis (diagramme sagittal, tableau de valeurs, liste de valeurs) en conformité avec l'enseignement reçu au début de l'installation de la notion de fonction : c'est précisément dans ces registres du cadre numérique, nous l'avons vu dans notre chapitre IV, que les fonctions sont introduites et reconnues comme telles.

Cette tendance apparaît de premier abord beaucoup plus nuancée chez les élèves français. Nous ne repérons des conversions de registre que si les élèves français pensent avoir affaire à une fonction algébrique (ainsi avec la fonction inverse, la fonction carré/racine carrée, la fonction constante respectivement dans les situations S3, S4 et S5). Dans ces cas là, la stratégie de résolution sur la base d'un rapprochement avec une fonction familière se confond avec l'établissement de la fonction dans le registre algébrique. Mais cette façon de procéder, de la part des élèves français, est somme toute normale : montrer que la situation à évaluer est une fonction connue revient à l'exprimer dans le registre où on a l'habitude de la rencontrer. Le fait que les élèves français procèdent plus facilement alors à des conversions vers le registre algébrique que vers le registre graphique, concorde en général avec le statut privilégié du registre algébrique relativement au registre graphique. Les élèves ne procèdent qu'en second choix à une conversion vers le registre graphique : quand il ne peuvent se référer clairement au registre algébrique, ou quand le registre de départ leur semble naturellement plus proche du registre graphique (tableau de valeurs de la situation S2 ou couples ordonnées de la situation S5). Il faut souligner cependant que la conversion effective vers le registre graphique est rendue difficile parce que les fonctions à représenter sont en majorité des fonctions discrètes et que les élèves français n'ont pas l'habitude de représentations graphiques de fonctions faites de points isolés. Cette caractéristique de la majorité des fonctions dans cette partie du questionnaire explique également que les élèves français aient, en général, réalisé moins de conversions de registres que les élèves palestiniens.

Ces constatations font ressortir le lien, maintes fois souligné dans nos travaux, entre registres et techniques propres à un enseignement donné sur les fonctions. Ces registres et techniques relatifs à la tâche de reconnaissance d'une fonction diffèrent fondamentalement, nous l'avons vu, que l'on soit élève dans l'institution française ou élève dans l'institution palestinienne. Justement ces conversions de registres qui se situent toujours vers le cadre numérique dans l'institution palestinienne soulignent les difficultés des élèves palestiniens à sortir de ce cadre numérique et pourraient indiquer, ceci serait à vérifier, qu'ils sont mal préparés à passer au continu.

L'analyse comparative des réponses des élèves français et palestiniens à cette première partie du questionnaire confirme comme nous l'avons prévue, une meilleure réussite des élèves palestiniens. Ceci n'est peut-être pas grave, si la conception plus restreinte qu'ont les élèves français sur les fonctions leur permet tout de même d'aborder voire de mieux réussir, en général ainsi que relativement aux élèves palestiniens, sur les notions qui doivent être maîtrisées en fin de scolarité ; c'est précisément ce que nous évaluerons dans la deuxième partie de ce questionnaire. Cependant cette restriction du concept de fonction ne saurait être négligée dans l'organisation de l'enseignement supérieur en mathématiques. Si les programmes de 91, soulignaient déjà la nécessité de permettre aux élèves "de se former une idée assez large de la notion de fonction" en variant notamment les situations permettant d'obtenir des fonctions, il nous semble que les nouveaux programmes insistent plus clairement sur la nécessité de donner davantage de repères à l'élève quant à la question de reconnaître une fonction: "On étudiera des situations issues, entre autres, de la géométrie, de la physique, de l'actualité ou de problèmes historiques. On réfléchira sur les expressions *être fonction de* et *dépendre de* dans le langage courant et en mathématiques. On donnera des exemples de dépendance non fonctionnelle (poids et taille, note au bac et moyenne de l'année)". Jusqu'à la capacité "(d') Identifier la variable et son ensemble de définition pour une fonction définie par une courbe, un tableau de données ou une formule" que les nouveaux programmes souhaitent voir se développer chez l'élève en leur proposant de "voir quelques exemples de fonctions définies sur un ensemble fini ou même de fonctions à deux variables (...) afin que les seules fonctions abordées ne soient pas des "fonctions numériques d'une variable réelle pour lesquelles l'ensemble de définition est donné"" nous apparaissent viser précisément l'objectif d'offrir aux élèves un cadre de référence plus large vis-à-vis de la notion de fonction, même si ce cadre doit être envisagé sur la base d'une approche intuitive du concept. Il nous semble intéressant de vérifier, compte tenu des résultats obtenus à cette première partie du questionnaire, dans quelle mesure ces objectifs des nouveaux programmes sont effectivement atteints.

III. Analyse des réponses à la deuxième partie du questionnaire

III.1 Présentation de la grille utilisée

La grille d'analyse des réponses prévues pour cette deuxième partie du questionnaire est une grille dont les lignes sont les élèves testés et les colonnes correspondent chacune à un item de question. Nous avons prévu une colonne supplémentaire pour les commentaires éventuels. Les réponses sont codées, réussite, échec, non réponse, ainsi que réussite partielle, comme codage supplémentaire valable seulement pour certains items. Nous avons pris en compte les différents types d'erreurs pouvant apparaître à certaines questions (notamment aux questions Q1, Q2 et Q5) à l'aide de la colonne des commentaires.

III.2 Analyse question par question

Cette deuxième partie du questionnaire est composée de 7 questions principales. Chaque notion ou objet d'enseignement testé fait l'objet d'une question distincte à l'exception des questions Q1 et Q2 qui portent toutes deux sur la notion de composition. Ces deux premières questions ont été ainsi conçues dans le but de mettre particulièrement en relief la capacité des élèves à opérer des transferts de connaissances. Chacune de ces 7 questions n'est jamais subdivisée en plus de deux sous-questions ou items. Seule la dernière question, la situation fonctionnelle, fait l'objet d'une subdivision en six items dont l'un n'est qu'implicitement demandé. Les textes des questions sont rappelés en gras ; l'ensemble de cette deuxième partie du questionnaire figure également en annexe.

- **Q2 : Soient f et g, deux fonctions définies sur R telle que $f(x) = x^2$ et $g(x) = 3x+2$. Déterminer : 1) fog(1) = ; 2) gof(x) = .**

  Nous avons souhaité présenter la question Q2 avant la question Q1 pour éclairer d'autant l'analyse de cette dernière. La question Q2 est composée de deux parties. Elles correspondent chacune à deux tâches classiques de composition. La tâche Q2.1 consiste a déterminer l'image d'un réel par la composée des deux fonctions f et g, alors que la tâche Q2.2 consiste a déterminer l'expression algébrique de la composée de ces deux fonctions. Nous les avons envisagées dans cet ordre pour inciter l'élève à choisir, pour la partie Q2.1, une résolution relevant uniquement du cadre numérique, alors que l'élève peut très bien la résoudre en recherchant d'abord l'expression de la fonction composée. Notre objectif est de pouvoir comparer le choix de résolution que feront les élèves pour cette partie Q2.1, même si l'on peut s'attendre à ce que les élèves palestiniens choisissent plus facilement que les élèves français la résolution relevant du cadre numérique. Il n'a pas été nécessaire de distinguer, dans l'analyse des résultats des élèves, chacune des deux parties Q2.1 et Q2.2.

a) Analyse des réponses des élèves français

- 2 élèves ne répondent à aucune des deux questions.
- 1 élève a confondu l'opération de composition avec l'opération de multiplication de fonction (élève n°17) pour les deux parties de la question Q2. Nous verrons que sa réponse est cohérente avec celle donnée à Q1.1.
- 10 élèves ont répondu aux deux questions en confondant l'ordre de la composition ; Pour eux donc, gof(1) = f(g(1)) et fog (x) = g(f(x)) :
  - 2 élèves répondent à la question Q2.1 par la solution relevant du cadre numérique. Ils trouvent donc 5 pour solution du fait de la confusion avec f(g(1)).
  - 3 élèves répondent à la question Q2.1 en recherchant d'abord l'expression algébrique de la fonction composée.
  - 5 élèves répondent à la question Q2.1 en se contentant d'établir l'expression algébrique de la fonction composée; ils n'ont pas recherché la valeur de fog(1). Outre la confusion sur l'ordre de la composition, la réponse donnée est incomplète.

* 1 élève confond l'ordre de la composition à la question Q2.1 mais répond correctement à Q2.2 : Dans le doute nous ne comptabiliserons pas sa réponse.
* 6 élèves donnent une réponse correcte mais incomplète à la partie Q2.1 : Ils se contentent d'établir l'expression algébrique de fog(x), et ne recherchent pas la valeur de fog(1). Ces réponses seront comptabilisées comme des réussites partielles.
* 10 élèves donnent une réponse correcte aux deux questions. La réponse à la partie Q2.1 est donnée par la solution relevant du cadre numérique.

Le faible taux de non-réponse (7%) exprime la familiarité de cette question pour les élèves français. Les taux de réussite et de réussite partielle (réponse incomplète) n'atteignent respectivement cependant que 33% et 20%, du fait de la confusion des élèves sur l'ordre de la composition. Erreur qui, pour nous, traduit un manque d'aptitude sur la notion de composition dans les registres et cadres les plus classiques. Par ailleurs le taux élevé (46%) des élèves (à la fois parmi ceux qui ont réussi et ceux qui ont fait erreur sur l'ordre de la composition) à ne pas choisir la solution numérique à la partie Q2.1, voire à ne pas comprendre la question puisque trop d'élèves s'arrêtent avec l'établissement de l'expression algébrique (37%) de la fonction composée pourrait traduire des difficultés à envisager la notion de composition dans le cadre numérique. La comparaison avec les résultats des élèves palestiniens ainsi que la comparaison avec les résultats à la question Q1 nous éclairera sur ce point.

Réussite	33%	Echec (Confusion sur l'ordre de la composition)	33%
Réussite partielle (réponse incomplète à Q2.1)	20%	Difficultés à confirmer avec le cadre numérique	37%
		Non réponse	7%

b) Analyse des réponses des élèves palestiniens

* 1 élève ne répond pas.
* 7 élèves donnent une réponse fausse, car ils confondent l'opération de composition avec une autre opération sur les fonctions :
  - confusion avec la multiplication chez 2 élèves,
  - confusion avec la soustraction chez 1élève,
  - confusion avec la dérivée chez 1 élève,
  - autre : formule inspirée de la dérivée.
* 2 élèves réussissent partiellement aux deux questions : ils substituent correctement g(1) par sa valeur dans la partie Q2.1 ("f(g(1) = f(5)"), et f(x) par son expression dans gof(x) ("g(f(x) = g(x^2)"), mais ne poursuivent pas leurs calculs (élève n°16 ou 27). Ces deux élèves ayant de plus bien réussi à la question Q.1.1, nous considérons leurs réponses comme une réussite partielle.

* 2 élèves donnent des réponses justes mais sans détailler les calculs. Il est fort probable cependant que la solution à la partie 1 relève entièrement du cadre numérique, autrement ces élèves auraient précisé l'expression algébrique de la fonction composée avant de donner le résultat du calcul de valeur.
* 49 élèves répondent correctement :
  - 4 élèves ont réussi en choisissant pour la partie Q2.1 une résolution relevant d'abord du registre algébrique. Mais le calcul de l'image de 1 est ensuite correctement réalisé.
  - 45 élèves ont réussi en choisissant, pour la partie Q2.1, une résolution relevant entièrement du cadre numérique.

Les élèves palestiniens ne semblent pas rencontrer en général de difficultés avec cette question, pour laquelle nous enregistrons 84% de réussite contre 2% seulement de non réponse. Des difficultés existent cependant chez certains élèves (12%) qui confondent la composition avec une autre opération sur les fonctions. Il faut souligner, par ailleurs, la tendance très forte chez les élèves palestiniens à choisir de préférence comme solution à la question Q2.1 (77% contre 7% seulement pour la deuxième solution), celle relevant entièrement du cadre numérique, en conformité avec l'enseignement reçu en classe de 10ème sur la notion de composition.

Réussite	84%	Solution à Q2.1 relevant entièrement du cadre numérique	77%
Réussite partielle (réponse incomplète à Q2.1)	3%	Echec (Confusion composition/autre opération)	12%
		Non réponse	2%

c) **Comparaison des réponses des élèves français et palestiniens**

Les élèves palestiniens montrent plus de facilité que les élèves français sur la question de composition donnée dans des cadres et registres classiques. La présentation de la notion de composition selon son statut objet et le traitement de cette notion dans le cadre numérique avant de l'aborder dans le registre algébrique du cadre fonctionnel semblent avoir avantagé les élèves palestiniens. Enfin, les difficultés des élèves français dans le cadre numérique, ainsi que l'erreur d'un trop grand nombre d'entre eux sur l'ordre de la composition pourrait s'expliquer précisément par l'absence de fréquentation de la notion dans le cadre numérique.

- **Q1 : Dans chacune des 2 questions suivantes f, g et h sont des fonctions définies telles que h = fog.**

  Cette question est également composée de deux parties Q1.1 et Q1.2. La première vise à tester la maîtrise de la composition de fonctions, la deuxième vise à tester la maîtrise de la notion de réciproque au-delà de celle de composition. Cette question est présente dans le test de Breidenbach et al. qui s'adresse à des étudiants du début de l'enseignement supérieur.

- **Q1.1 : Avec les informations données dans le tableau suivant est-il possible de connaître h(0) ? si oui, déterminer cette valeur et si non expliquer pourquoi.**

Cette question est une tâche de composition classique dans le cadre numérique, il s'agit de déterminer h(0) sachant que h(x) = fog(x). Trois valeurs pour x, ainsi que les images correspondantes par f et par g, sont données dans un tableau de valeurs à double entrée. Ce registre pourrait se révéler déroutant pour les élèves des deux côtés. Si dans les manuels palestiniens, le cadre numérique est choisi comme cadre de départ pour installer la notion de composition, ce registre particulier n'est jamais rencontré. Du côté français, nous avons vu que le cadre numérique était négligé au profit du registre algébrique du cadre fonctionnel pour l'institutionnalisation de cette notion, et que les programmes français et surtout le manuel retenu, insistaient davantage, pour lui donner du sens, sur une utilisation selon son statut outil que sur une variété de cadres et de registres. La pratique de la composition dans le registre algébrique du cadre fonctionnel suffira t-elle aux élèves français pour aborder cette notion dans le cadre numérique ?

a) Analyse des réponses des élèves français à Q1.1

* 15 élèves ne répondent pas à la question Q1.1 :

3 d'entre eux, ont d'ailleurs converti ce tableau en une liste de valeurs :"*f(-1) = 2; g(-1) =-3, f(0) = -3, (...)*" (élève n°7) alors qu'un quatrième élève (élève n° 23) a écrit "*h(x) = fog(x) = f(g(x))*". Les tentatives de réponse de ces 4 élèves ainsi qu'une comparaison d'ensemble avec les réponses données aux deux parties de la question Q2, indiquent que le nombre élevé de non réponse à cette question Q2.1 est significatif, non pas d'une difficulté avec la notion de composition en général, mais bien d'une difficulté à envisager la notion de composition dans ce registre du cadre numérique.

* 7 élèves ne répondent pas à la question Q1.1 et se justifient par le fait que les expressions de f(x) et g(x) ne sont pas connues ; ainsi l'élève n° 5 "*non, car on connaît g(0) mais il faut connaître l'expression de f pour calculer f(g(0)) et non la valeur de f(x)*" et l'élève n°6 "*non, nous n'avons pas la formule des fonctions pour calculer fog*". Ils expriment clairement des difficultés à envisager la notion de composition dans le cadre numérique.

* 7 élèves confondent composition et multiplication, ainsi l'élève n° 17 : "*h(0) = f(0) x g(0) = (-1) x (-3) = 3*". Ils ont certes été capables d'exploiter correctement le tableau à double entrée pour déterminer les images de f(0) et g(0). Cependant, à l'exception d'un seul élève, nous l'avons vu, ces élèves ne persistent pas dans la confusion composition/multiplication à la question Q2. Nous sommes donc encline à penser que c'est la difficulté même à envisager la notion de composition dans ce registre du cadre numérique qui a poussé ces élèves à la considérer comme une multiplication : ils ont ainsi pu répondre à la question. Ce type de confusion confirme néanmoins un manque d'assurance avec la notion de composition.

* 1 seul élève réussit.

Les élèves français apparaissent déstabilisés devant cette question puisque 50% d'entre eux ne répondent pas (contre 7% seulement de non réponse à la question Q2), que 47% semblent exprimer de façon plus explicite des difficultés à envisager la notion de composition dans ce registre du cadre numérique alors que seuls 4% seulement des élèves ont réussi. Bloch qui teste également des élèves de 1ère sur la notion de composition dans le cadre numérique à partir d'une question du test de Funrighetti et Somaglia obtient un taux de réussite de 71% et conclut que "les élèves de ce niveau maîtrisent le sens de la composition des fonctions, et son traitement à l'aide d'ostensifs soit formels soit numériques" (Bloch, 2000, p.331). Nos résultats ne vont pas dans ce sens ; sans exclure l'éventualité d'un niveau général plus élevé chez les élèves testés par Bloch, nous pensons que le registre du cadre numérique qu'elle a utilisé, était plus suggestif pour les élèves de même que la question posée sous forme de choix multiples a probablement mieux aidé les élèves à déterminer la réponse correcte.

Réussite	4%		
Echec (difficultés avec la composition dans ce registre)	47%	Non réponse	50%

b) Analyse des réponses des élèves palestiniens à Q1.1

* 4 élèves ne répondent pas à cette question.
* 6 élèves pensent qu'il est impossible d'y répondre et leurs justifications indiquent qu'ils ont des difficultés à envisager la composition dans ce registre du cadre numérique : ainsi, l'élève n°1 qui explique que "*h(0) = f(g(0)), non car il n'y a pas g(0)*" ou l'élève n°7 qui progresse quelque peu dans la solution : " *(...), car h(x) = (...) = f(g(0)) = f(-1), non car f(-1) n'est pas dans le tableau*".
* 6 élèves donnent une réponse erronée car ils utilisent de mauvaises formules pour la composition :
  - 2 élèves confondent composition et multiplication.
  - 1 élève (élève n°33) confond composition et multiplication à la question Q1.1 et confond composition et soustraction à Q1.2 !
  - 2 élèves confondent composition et dérivée de fonctions composées; ainsi, l'élève n°23 : "*h(x) = f '(g(x)) x g '(x)*", en choisissant bien sûr *g' (x) = 0*. !!!
  - 1 élève confond composition et une formule qui semble être inspirée de la dérivée (élève n°53) :"*h(x) = f'(0) x g(0)*".
  - Ces élèves montrent une cohérence dans la confusion sur l'opération de composition d'après la comparaison de leurs réponses avec celles données à Q2.
* 45 élèves répondent correctement à la question Q1.1.

74% des élèves palestiniens réussissent à cette question, ce qui traduit une bonne maîtrise des élèves palestiniens de la composition dans le cadre numérique. 10% ont des difficultés à envisager la composition dans un autre registre du cadre numérique que ceux pratiqués en classe, et 11% des élèves confirment leur difficultés avec la composition. Seuls 5% des élèves n'ont pas répondu.

Réussite	74%	Echec (Confusion composition/ autre opération)	11%
Echec (difficultés avec la composition dans ce registre)	10%	Non réponse	5%

- **Q1.2 : Même question pour f(2).**

Pour résoudre la question Q1.2, l'élève doit certes être déjà familier avec la notion de composition aussi toutes les remarques faites à la partie Q1.1, quant aux registre et cadre choisis sont également valables pour la résolution de cette deuxième partie. Cependant s'ajoutent ici des difficultés supplémentaires qui peuvent provoquer 2 erreurs principales :

- 1ère erreur : étant donné que "h(x) = f(g(x))" et qu'il est demandé de déterminer la valeur de f(2). L'élève doit poser "h(x) = f(2)" et conclure que g(x) =2". 2 n'est donc pas ici la valeur à donner à x, mais à l'antécédent de x par g. Justement nous pouvons nous attendre à ce que certains élèves donnent à x la valeur 2, ce qui pourrait indiquer une difficulté à envisager la notion de composition ainsi qu'à distinguer les variable dépendante et indépendante dans des situations relativement complexes comme celle-ci.
- 2ème erreur : cette erreur ne met pas en cause la compréhension de la notion de composition dans ce registre, l'élève posera correctement que "g(x) = 2" mais ne saura pas déterminer la valeur de x. Cette erreur mettra plus précisément en cause sa maîtrise de la notion de réciproque dans le cadre numérique et le registre du tableau de valeurs. Les élèves palestiniens risquent également d'être avantagés par rapport aux élèves français sur cette question, car non seulement la notion de réciproque est abordée dans le cadre numérique, mais les deux notions de réciproque et de composition sont liées dans le manuel palestinien alors que la réciproque n'est essentiellement vue qu'en tant qu'outil de résolution pour les tâches d'existence de solutions d'équation en classe de première française.

a) Analyse des réponses des élèves français à Q1.2

Devant l'échec quasi général des élèves français à cette première partie de la question Q1.1, il est inutile d'analyser leurs réponses à la partie Q1.2. Une réussite à cette deuxième partie nécessite, comme nous l'avons précisé lors de l'analyse a priori, que l'élève ait su interpréter la composition relativement à ce registre. Il faut noter d'ailleurs, que le seul élève à avoir donné une réponse correcte à la partie Q1.1 échoue à cette deuxième partie. Cette question n'aura pas permis d'analyser la maîtrise des élèves français de la notion de réciproque, leurs difficultés se situant sur un niveau inférieur.

b) **Analyse des réponses des élèves palestiniens à Q1.2**

* 5 élèves ne répondent pas.
* 15 élèves font une erreur sur la variable :
  - 8 élèves font clairement cette erreur en posant "$h(2) = f(g(2))$".
  - 7 élèves pensent qu'il ne peut y avoir de réponse car *x n'a pas la valeur 2* dans le tableau, ce que nous avons également interprété comme une erreur sur la variable.
* 12 élèves présentent clairement des difficultés à passer à la réciproque :
  - 3 élèves ne donnent pas de réponse mais leur ébauche de solution indique qu'ils n'ont pas fait d'erreur sur la variable, ainsi l'élève n°13 : "$h(x) = f(g(x)) = f(2)$".
  - 9 élèves pensent qu'on ne peut pas répondre *car il manque la fonction f(x) dans le tableau.* Ils n'ont pas non plus fait d'erreur de variable, car ils ont également écrit "$h(x) = f(g(x)) = f(2)$", voire pour certains "$g(x) = 2$".
* 29 élèves répondent correctement.

47% des élèves palestiniens réussissent à cette question, alors que 8% ne répondent pas. 20% des élèves ont des difficultés à envisager la réciproque dans un registre du cadre numérique non habituel mais leur compréhension de la notion de composition et la distinction entres les variables dépendante et indépendante n'est pas en cause, alors que 31% expriment des difficultés se situant à ce niveau.

Réussite	47%	Difficulté avec la composition dans une situation complexe	31%
Difficulté avec la réciproque	20%	Non réponse	8%

c) **Comparaison des réponses des élèves français et palestiniens aux deux parties de la question Q1**

Dans les programmes et manuels français, les notions de composition et de réciproque, sont en grande partie visées selon leur statut outil dans le but d'en promouvoir l'acquisition du sens. Visées selon leur statut objet, elles le sont presque exclusivement dans le registre algébrique et jamais, ceci est surtout vrai dans le cas de la réciproque, dans le cadre numérique. Les élèves palestiniens qui ont l'habitude de faire fonctionner ces notions dans le cadre numérique auraient donc été avantagés même s'ils ne sont pas familiers de ce cas précis de registre. La fréquentation de ces notions à travers des tâches relevant du cadre numérique semble permettre cependant d'éviter certaines erreurs comme celle fréquente du côté français de confusion sur l'ordre de la composition. Enfin, ces résultats semblent indiquer, du moins pour ce qui concerne la composition, que l'implication de cette notion dans le registre algébrique ne permet pas de l'aborder dans le cadre numérique sans un enseignement préalable. Les élèves testés par Breidenbach et al. réussissent à Q1.1 et Q1.2 avec des taux respectivement de 84% et 83,5%, mais il ne faut pas oublier que ces élèves sont de niveau universitaire et ont de plus suivi un enseignement spécifique.

- **Q3 : Soient deux fonctions f et g définies sur R telles que : (...) Déterminer la fonction fg(x) (il s'agit d'une multiplication).**

  Il s'agit d'une tâche de multiplication de deux fonctions. Celles-ci sont exprimées dans le registre algébrique. Nous n'avons pas de doute que les élèves français et palestiniens puissent réaliser une multiplication de deux fonctions définies sur le même domaine. C'est dans l'objectif de vérifier si l'élève est capable de prendre en compte la dimension fonctionnelle de cette tâche, que nous l'avons envisagé pour deux fonctions définies par intervalles. En effet, le fait que la fonction ne soit pas définie identiquement sur tout son domaine de définition oblige l'élève à prendre en compte le lien entre la variable indépendante et la variable dépendante pour pouvoir établir sa réponse. Cette difficulté supplémentaire permet de confirmer, si elle ne déroute pas l'élève, sa maîtrise de la notion. Cette question a été inspirée d'une question également présente dans le test de Breidenbach et al. Nous avons cependant été attentive à nous référer à des expressions algébriques simples et à ne considérer que deux branches pour chaque fonction. Deux erreurs sont ici possibles:

  - 1ère erreur : l'élève réalise des multiplications en utilisant les différentes expressions algébriques sans tenir compte des intervalles. Cette erreur est significative de l'élève qui ne fait pas le lien entre variable dépendante et variable indépendante.
  - 2ème erreur : l'élève peut ne pas prévoir comme réponse une fonction définie sur trois intervalles mais rester cohérent cependant sur les intervalles, en proposant notamment une réponse distinguant deux cas $x < 1$ et $x > 0$. Dans ce sens, nous considérerons ce cas de réponse comme une réussite partielle.

Nous nous attendons cependant à des difficultés de part et d'autre, les fonctions par intervalles étant un sujet d'étude complexe comme le souligne d'ailleurs Breidenbach et al. (Breidenbach et al., p.248, 1992).

a) Analyse des réponses des élèves français

* 15 élèves ne répondent pas.
* 3 élèves échouent à cette question :

- 2 élèves multiplient bien les expressions des fonctions f et g entre elles mais pour des intervalles faux :"*x < 0 et x > 0*" (élève n°19), et "*0 < x< 1 et 0 > x > 1*" (élève n° 13).
- 1 élève se ramène à des inégalités; ainsi $g(x) = x^2$ *si x > 1* est interprété comme "$x^2 - 1 < 0$" (élève n°28).

  Ces réponses traduisent pour nous des difficultés sérieuses quant à la compréhension de la fonction en termes de variables dépendante et indépendante.

* 7 élèves réussissent partiellement à la question. Ils établissent une fonction fxg correctement définie pour x<0 et x>1, mais ils n'ont pas pris en compte l'intervalle 0<x<1. Un élève précise que la fonction résultante "*(n'est) pas définie sur]0, 1[*" (élève n°2).
* 5 élèves réussissent à cette question.

Les élèves français enregistrent respectivement 17% et 24% de réussite et de réussite partielle. Si le taux d'échec est peu élevé, le taux de non réponse atteint 50%.

Réussite	17%	échec	10%
Réussite partielle	24%	Non réponse	50%

b) Analyse des réponses des élèves palestiniens

* 8 élèves ne répondent pas.
* 25 élèves échouent à cette question :
  - 23 élèves réalisent des multiplications sans mention des intervalles ou avec des intervalles inadéquats.
  - 2 élèves pensent avoir affaire à des résolutions d'équations.

* 8 élèves réussissent partiellement : Ils ne considèrent que deux cas x < 0 et x > 1. L'un d'entre eux précise que la fonction résultante "*n'est pas définie entre 0 et 1*" (élève 36).
* 20 élèves ont réussi.

Ainsi, les taux de réussite et de réussite partielle des élèves palestiniens atteignent respectivement 33% et 13%. Si le taux de non réponse est peu élevé 13%, le taux d'échec atteint 41%.

Réussite	33%	échec	41%
Réussite partielle	13%	Non réponse	13%

c) Comparaison des réponses des élèves français et palestiniens

Comme nous l'avons prévu, les fonctions par intervalles posent problème aux élèves des deux côtés. Les taux de réussite montrent néanmoins une avance nette des élèves palestiniens alors que la somme des taux de réussite et de réussite partielle montre une avance certaine mais légère. Cette fois encore, les élèves français se manifestent surtout par des non réponse et moins de réponses erronées que les élèves palestiniens. Les élèves palestiniens ont dû être avantagés par une plus grande fréquentation des fonctions par intervalles ; nous avons souligné lors de l'analyse des manuels palestiniens que les fonctions par intervalles étaient souvent utilisées à titre de complexification des tâches/techniques à institutionnaliser. Cette fréquentation des fonctions par intervalles leur donne la capacité de mieux prendre en compte la dimension fonctionnelle de cette tâche. Le taux de réussite des élèves testés par Breidenbach et al. était de 87%. Rappelons qu'il s'agit d'étudiants ayant suivi un enseignement spécifique.

- **Q4 : Les fonctions f et g sont représentées dans le graphe ci-dessous. Représentez dans le même repère la fonction f+g.**

  La tâche visée par cette question est une tâche d'addition de fonctions. Comme pour la question précédente de multiplication de fonctions, nous ne doutons pas que les élèves soient capables d'additionner deux fonctions dans le registre algébrique. Aussi, pour ajouter à la difficulté de cette tâche, nous avons choisi le registre graphique comme registre de représentation des fonctions. Cette formulation de la question en fait une tâche non standard des deux côtés français et palestiniens. La question est inspirée d'une question similaire apparaissant dans les évaluations EVAPM de fin de seconde. Pour que le traitement dans le registre graphique soit de difficulté convenable, les fonctions sont choisies pour être affine et affine par intervalles et pour éviter une solution algébrique, les coefficients des fonctions ne sont pas des entiers. Les élèves français devraient, en général, être avantagés par cette question relevant du registre graphique. Par ailleurs, les fonctions affines sont bien connues des deux côtés, les élèves doivent savoir que la somme de deux fonctions affines est une fonction affine mais sauront-ils mobiliser cette propriété de la somme de deux fonctions affines pour établir la réponse ? Une autre solution est de réaliser *point par point* la somme des deux fonctions ; cette technique de résolution se base alors sur une conversion graphique/numérique. Il est possible alors, que le travail sur les opérations de fonctions réalisé par les élèves palestiniens dans le cadre numérique facilite leur réponse.

a) Analyse des réponses des élèves français

* 9 élèves ne répondent pas.
* 9 donnent une réponse fausse :
  - 1 élève trouve une fonction carré comme courbe résultante; il écrit également "$y=f+g = x^2$" (élève n°24).
  - 6 élèves à l'exception d'un seul, tracent bien une ou deux demi-branches, mais il ne s'agit pas des deux demi-branches de la fonction somme.
  - 2 élèves tentent un début de résolution algébrique mais, comme nous l'avons prévu, ne réussissent pas à aboutir.
* 12 élèves répondent correctement.

Réussite	40%	échec	30%
	13%	Non réponse	30%

b) Analyse des réponses des élèves palestiniens

* 22 élèves ne répondent pas.
* 19 élèves donnent une réponse fausse :
  - 4 élèves tentent un début de résolution algébrique mais ne réussissent pas à aboutir.
  - 15 élèves donnent une réponse graphique fausse (la majorité 5 sur 7 tracent 2 branches mais le choix des points de jonction est erroné et non justifié, 3 élèves ont tracé une demi-branche mais pas l'autre, ou n'ont représenté que les trois points critiques).
* 20 élèves donnent une réponse correcte.

Réussite	33%	échec	31%
		Non réponse	36%

c) Comparaison des réponses des élèves français et palestiniens

Comme nous nous y attendions, les élèves français enregistrent un taux de réussite plus élevé que celui des élèves palestiniens, et un taux de non réponse plus faible que celui des élèves palestiniens. Cependant les différents taux obtenus de part et d'autre sont comparables, et quoique cette question soit non standard comme nous l'avons souligné dans l'analyse a priori, nous nous attendions à une différence plus importante entre les taux de réussite français et palestinien. Il semble alors que pour la notion particulière de somme sur les fonctions dans le registre graphique, l'approche française ne se distingue pas franchement de l'approche palestinienne.

- **Q5 : La représentation graphique ci-dessous est celle d'une fonction f telle que $f(x) = x^3 + 3x^2 - 4x - 12$. D'après ce graphique est-il possible de dire au sujet de l'équation $f(x) = x^3 + 3x^2 - 4x - 12$, que :**

  a) on ne connaît pas ses solutions ; il faut trouver une méthode algébrique pour résoudre l'équation.
  b) -12 est solution, car quand $x = 0$, $y = -12$.
  c) -3, -2, 2 sont solutions. Entourer la bonne réponse et justifier.

Il s'agit d'une fonction exprimée dans les deux registres graphique et algébrique. Le but est de tester si l'élève accepte la solution graphique (réponse c) donc si l'outil fonctionnel est disponible pour les tâches de résolutions d'équations. Cette question apparaît dans le test de Furringhetti. La résolution graphique d'équation est une tâche très familière pour les élèves français depuis la classe de seconde, elle est cependant très rarement demandée aux élèves palestiniens et surtout, ne l'est jamais en classe de 12ème. Une réponse b) donnée à cette question, est significative des difficultés de l'élève à distinguer les variables x et y.

a) analyse des réponses des élèves français

* Tous les élèves répondent.
* 2 élèves rejettent la solution graphique, leur réponse est donc a) :
* 28 élèves considèrent que la bonne réponse est c) :
  - 3 élèves ne se justifient pas.
  - 5 d'entre eux se justifient par le fait que *f(x) = 0 pour ces 3 valeurs de x.*
  - Les 20 autres se justifient en exposant la méthode graphique pour obtenir les solutions d'une telle équation : "*car c'est sur l'axe des abscisses que sont lues les solutions de l'équation (...) qui sont obtenues par l'intersection de l'axe des abscisses avec la courbe* représentative de la fonction (élève n°3), ou "*on remarque que pour les points d'abscisse {-3, -2, 2} la fonction f prend pour ordonnée 0. Donc ces trois points sont solutions de f(x) = 0*" (élève n°10), ou encore "*-3, -2, 2 sont solutions car la courbe f(x) coupe l'axe des abscisses en ces points et que les solutions d'une équation sont lues sur l'axe des abscisses*".

Les justifications des élèves qui ont donné une réponse correcte montrent que la grande majorité de ces élèves (71% d'entre eux) se fient entièrement à la réponse graphique. Peu nombreux (17% d'entre eux) sont ceux qui rechercheront une justification numérique. Ces résultats sont conformes au contrat relatif aux résolutions graphiques d'équation : les exercices/problèmes de ce genre sont conçus, dans les manuels étudiés, de façon à ce que la solution puisse être facilement lue sur le graphique et la vérification algébrique n'est que rarement demandée.

Les élèves français réussissent, comme cela était prévu, avec un taux de réussite très élevé 94%. Tous les élèves répondent. 6% des élèves ne se satisfont pas d'une solution graphique mais aucun élève ne montre des difficultés à distinguer les variables x et y sur cette question.

Réussite	94 %	Echec (rejet des solutions graphique)	6 %
		Non réponse	0 %

b) Analyse des réponses des élèves palestiniens

* 1 élève ne répond pas .
* 11 élèves donnent une réponse fausse traduisant des difficultés sérieuses à distinguer les variables x et y : *la réponse b) (x = -12)*. 4 d'entre eux considèrent même qu'il y a deux bonnes réponses "*les réponses b) et c)*".
* 8 élèves rejettent les réponses graphiques : *la bonne réponse est a).*
* 41 élèves réussissent en donnant pour réponse la réponse c) :
  - 21 élèves ne se justifient pas.
  - Et sur les 20 autres qui se justifient,

- 16 se basent sur la résolution algébrique de recherche des racines.
- 4 seulement se basent sur la substitution des valeurs.

Même si peu d'élèves justifient leurs réponses, les justifications données sont significatives; 16 élèves sur les 20 qui se sont justifiés, recherchent une autre solution algébrique, alors que 4 seulement sur 20 se justifient par substitution des valeurs. Ceci est probablement à lier au manque de familiarité des élèves avec ce type de tâche.

67% des élèves palestiniens réussissent cette question facile pour un niveau de dernière année scolaire mais néanmoins inhabituelle. 13% des élèves ne se satisfont pas d'une solution graphique et 18% montrent des difficultés sérieuses à distinguer les variables x et y alors que 2% des élèves n'ont pas répondu.

Réussite	67 %	Echec (difficulté sérieuses avec les variables x et y)	18%
Echec (rejet des solutions graphique)	13 %	Non réponse	2%

c) Comparaison des réponses des élèves français et palestiniens

Le taux très élevé de réussite et le taux nul de non réponse des élèves français est incontestablement en accord avec la familiarité de cette tâche du côté français. Le taux de réussite du côté palestinien apparaît modeste pour une question que l'on jugerait facile de premier abord. Il est alors intéressant de considérer les performances des élèves italiens à cette question du test de Funrighetti et Somaglia. Ils enregistrent un taux de réussite de 64% à 17 ans, 61% à 18ans et 71% à 19 ans. Les élèves palestiniens de 12ème ont 18 ans. Funrighetti et Somaglia lient ces résultats à la maturité acquise avec l'âge en mathématique (et tout particulièrement en calculus), ainsi qu'à l'accent mis à travers l'enseignement sur le registre graphique : "we clearly see that the capacity of interpreting graphs is not inborn (...) and its development needs the teacher's guidance (...)" (Funrighetti et Somaglia, 1994, p.250). Nous n'avons pas idée du contenu des programmes italiens sur les fonctions, ni du statut réservé au registre graphique dans ces programmes, cependant comparativement aux résultats des élèves italiens, les résultats des élèves palestiniens apparaissent corrects compte tenu du fait que la question ne leur est que peu, voire pas du tout, familière et que le registre graphique ne bénéficie que d'un rôle très circonscrit particulièrement en classe de 12ème palestinienne. Un pourcentage non négligeable d'élèves palestiniens rejette les solutions graphiques. Mais ce qui marque encore plus la différence dans l'approche institutionnelle, ce sont probablement les justifications données aux réponses de chacun des deux côtés. Les élèves français sont pour leur grande majorité satisfaits par une réponse basée sur une lecture graphique, alors que les élèves palestiniens recherchent plutôt une confirmation dans les cadre et registre algébriques. Par ailleurs, les difficultés d'un pourcentage important d'élèves palestiniens à distinguer les variables x et y incombent sans doute à leur manque de pratique dans le registre graphique ainsi qu'aux tâches trop réduites dans le registre algébrique : ces difficultés ont déjà été repérées sur d'autres questions, en particulier les question S5 et S9 de la première partie du test.

- **Q6 : Compléter la représentation graphique de la fonction f suivante définie sur R, sachant que f admet pour période 5. Que vaut f(7) ? f(-3) ? f(1789) ?**
  Cette question est constituée de 2 parties. Il s'agit de tester les notions de période et périodicité, d'abord dans le registre graphique ensuite dans le cadre numérique pour une fonction périodique non standard exprimée uniquement dans le registre graphique. La comparaison des résultats des élèves aux parties Q6.1 et Q6.2 permet de mettre en lumière les capacités éventuelles des élèves à transposer leurs connaissances relatives à une notion (ici, la périodicité) d'un cadre/registre familier à un autre qui l'est moins. C'est dans cet objectif que nous analyserons conjointement les réponses des élèves aux deux parties. Cette question apparaît dans le manuel de seconde que nous avons retenu.

La partie Q6.1 vise à vérifier que l'élève est capable d'utiliser la période selon son statut outil pour compléter le graphique. Celle-ci est précisée dans l'énoncé. Cette utilisation de la période dans le registre graphique est familière des deux côtés français et palestinien : c'est ainsi que s'obtient la représentation graphique d'une fonction périodique sur l'ensemble de son domaine, une fois déterminée sa représentation sur une période. Si les fonctions périodiques rencontrées des deux côtés français et palestiniens, sont sensiblement identiques, et se limitent principalement aux fonctions de type y = cox (ax+b) et y= sin (ax+b), la pratique plus longue des élèves français avec les fonctions périodiques enseignées aussi bien en 2nde qu'en 1ère, ainsi que leur plus grande familiarité avec le registre graphique en général et les propriétés géométriques de fonctions en particulier, les avantagent relativement aux élèves palestiniens, pour qui la représentation graphique de fonction numérique se limite à la classe de 10ème.

La partie Q6.2 visait, au départ, à vérifier que l'élève était capable d'utiliser la période dans le cadre numérique. Cependant nous avions omis de demander la justification des réponses, et les réponses données se sont avérées rarement justifiées. Or les deux premières valeurs, f(7) et f(-3), peuvent également être établies par lecture graphique. Seule la détermination de la dernière valeur f(1789) exige un calcul numérique. Ainsi, pour décider de la capacité d'un élève à donner une réponse basée sur un calcul numérique, nous nous fierons principalement à celle donnée à f(1789). Soulignons que cette tâche risque de désavantager particulièrement les élèves palestiniens pour qui elle est très peu familière même si elle n'est pas familière non plus pour les élèves français. L'analyse des réponses aux deux premières valeurs à déterminer, nous donnera en définitive une idée de la capacité à réaliser la tâche de détermination d'image dans le registre graphique. Nous ne la considérerons cependant que du côté palestinien où elle n'est que peu familière alors qu'il s'agit d'une tâche/technique très classique du côté français. Par ailleurs, comme il nous a semblé repérer lors du dépouillement une tendance chez certains élèves à déterminer ces 3 images, soit en donnant une réponse choisie au hasard parmi les trois valeurs 0, 1 et -1, ou en reproduisant un résultat effectivement établi pour les images précédentes, l'analyse des réponses à Q6.2 nécessite la comparaison des 3 résultats.

a) Analyse des réponses des élèves français

* 3 élèves ne répondent pas à la question Q6.1 et 2 élèves ne tracent qu'une ébauche de courbe de chaque côté de la portion donnée : Quoique correcte, la réponse partielle de ces deux derniers élèves à la question Q6.1 est insuffisante pour décider de sa qualité. Ces 5 élèves réussissent à déterminer f(7) et f(-3). Un seul d'entre eux répond également correctement à f(1789) et nous estimons qu'il a réussi à la question Q6.2 en tant que relevant du cadre numérique. Les autres élèves n'y répondent pas (3 élèves) ou donnent une réponse fausse (1 élève). Aucun de ces élèves ne justifie ses réponses, nous pouvons estimer qu'elles ont été établies par un calcul numérique quoique l'éventualité de réponses données au hasard ne puisse être complètement écartée chez les 4 élèves qui n'ont déterminé que les deux premières valeurs. Même dans l'éventualité que nous avons admise, de réponses obtenues effectivement par un calcul numérique, l'incapacité de ces 4 élèves à déterminer la valeur de f(1789) montre que le cadre numérique sur la question de périodicité n'est que partiellement maîtrisé.
* 12 élèves échouent uniquement à f(1789), pour laquelle ils ne donnent pas de réponse (3 élèves) ou donnent une réponse fausse (8 élèves répondent "*1*", et 1 élève répond "*0*"). C'est notamment ici qu'il nous semble avoir repéré une tendance à répondre au hasard, en répétant la valeur "1", déterminée pour f(-3) et f(7). Quoique les réponses à f(-3) et f(-7) ne soient pas justifiées, nous pouvons cependant considérer qu'elles l'ont été à partir du graphique, ce qui fait partie du contrat français concernant la tâche de détermination d'image. Il n'est donc pas possible ici de décider de leur capacité à répondre, relativement au cadre numérique y compris sur les cas plus simples.
* 13 élèves répondent correctement à toutes les questions. Seuls 5 élèves ont justifié leur résultat à la question f(1789). Puisque les trois valeurs sont correctes, nous écartons l'éventualité de réponses données au hasard. Si les valeurs de f(-3) et f(7) peuvent avoir été déterminées graphiquement, celle de f(1789) permet d'estimer que ces élèves ont réussi à la question relevant du cadre numérique.

  83% au moins des élèves réussissent dans le registre graphique.

Réussite dans le registre graphique	Au moins 83%	Non réponse dans le registre graphique	10%

La réussite est moins marquée pour la question de la détermination de f(1789) relevant du cadre numérique pour laquelle on enregistre 33% de réponses fausses et 20% de non réponse. Cependant 47% enregistrent une réussite dans le cadre numérique (réponse correcte à f(1789)).

Réussite dans le cadre numérique (réponse correcte à f(1789))	47 %	Non réponse dans le cadre numérique (à f(1789))	20%
Echec dans le cadre numérique (réponse fausse à f(1789))	33 %		

b) Analyse des réponses des élèves palestiniens

* 5 élèves ne répondent pas à Q6.1. Un seul de ces 5 élèves répond à Q6.2 en donnant trois réponses identiques : "*1*". Il se justifie en estimant que "*les valeurs sont fixes*". Ce qui traduit chez lui de grandes difficultés avec la notion de périodicité.
* 29 élèves donnent une réponse fausse à Q6.1 : Beaucoup confondent périodicité et symétrie, surtout sur l'axe correspondant aux x négatifs, d'autres encore se sont basés sur une période autre que celle pourtant précisée par l'énoncé. De plus, les tracés présentent souvent des problèmes d'échelle. Par ailleurs, 12 de ces élèves n'ont tracé le graphe que d'un côté.
* Réponse de ces 29 élèves à f(-3) et f(7) :
  - 4 élèves ne répondent pas.
  - 3 élèves donnent des réponses fausses et non cohérentes avec le graphique.
  - 22 élèves donnent une réponse fausse mais cohérente avec le graphique. Nous pensons que la réponse a été donnée d'après une lecture graphique; Chez 10 de ces élèves cependant, le graphique n'est présent que d'un côté et les 2 réponses sont alors équivalentes.

* Réponse de ces 29 élèves à f(1789) :
  - 7 élèves ne répondent pas.
  - 19 élèves donnent une réponse fausse et non justifiée.
  - Ces élèves ont donc du mal à établir leur réponse sur la base d'un calcul numérique, à défaut de pouvoir déterminer graphiquement la valeur de f(1789), celle-ci est donnée au hasard.
* 22 élèves réussissent partiellement à la question Q6.1: la portion de la courbe correspondant aux x positifs est correcte, mais celle correspondant aux x négatifs est absente (5 élèves) ou fausse. C'est souvent soit le symétrique relativement à Oy qui a été tracé, soit des erreurs d'échelle qui ont été faites.
* Réponse de ces 22 élèves à f(-3) et f(7) :
  - 3 élèves ne répondent pas.
  - 5 élèves donnent au moins une réponse fausse, non justifiée et non cohérente avec le graphique.

- 13 élèves donnent deux réponses non justifiées mais cohérentes avec le graphique.
- 1 élève (n°44) donne deux réponses correctes non justifiées mais le graphique n'est pas complété sur la partie des x négatifs. Comme sa réponse à f(1789) est juste et correctement justifiée, nous estimons qu'il a réussi à Q6.2.

* Réponse de ces 22 élèves à f(1789) :
- 9 élèves ne répondent pas.
- 11 élèves donnent des réponses fausses et non justifiées.
- 2 élèves donnent des réponses correctes et justifiées (dont l'élève n°44).

* 5 élèves réalisent correctement le graphique :
- 4 d'entre eux réussissent entièrement à Q6.2. Ils n'ont pas de difficulté avec la périodicité dans le cadre numérique.
- 1 élève ne répond pas à f(1789) mais détermine correctement les deux premières images.

8% seulement des élèves réussissent à compléter correctement le graphique. Si seulement 8% de non réponse sont enregistrés à la question Q6.1, les 48% de réponses fausses et même les 36% de réussite partielle (la partie de la courbe correspondant aux x positifs est correcte), mettent l'accent sur les difficultés des élèves dans le registre graphique et tout particulièrement, leur manque d'aptitude avec les propriétés géométriques de la fonction (confusion période et symétrie, mauvaise interprétation de la période, problème d'échelle). Les élèves palestiniens sont cependant capables d'exploiter le registre graphique pour la détermination d'image (au moins 59% des élèves) alors que cette tâche n'est que peu pratiquée.

Réussite dans le registre graphique	8 %	Détermination d'image par lecture graphique	Au moins 59%
Echec dans le registre graphique	84 %	Non réponse	8%

Les élèves palestiniens ont de grandes difficultés à interpréter correctement la période dans le cadre numérique puisque seuls 10% réussissent à déterminer correctement l'image de f(1789), alors que respectivement 51% et 34% échouent et ne répondent pas à cette partie de la question Q6.2.

Réussite dans le cadre numérique (réponse correcte à f(1789))	10 %	Non réponse dans le cadre numérique (à f(1789))	51%
Echec dans le cadre numérique (réponse fausse à f(1789))	51 %		

c) Comparaison des réponses des élèves français et palestiniens

L'échec des élèves palestiniens à cette question Q6 était prévisible. Leur taux de non réponse relativement peu élevé à la question Q6.1 par rapport à celui de la question Q6.2 est dû au fait que la question leur parait familière. Mais leur manque de pratique du registre graphique, et des propriétés géométriques de fonctions explique leur échec ou leurs difficultés à des taux très élevés. La maîtrise du cadre numérique est encore moins assurée. Ceci est également valable du côté français où les élèves, qui atteignent pourtant un taux de réussite très élevé dans le registre graphique, sont très loin de réaliser des taux comparables dans le cadre numérique. Ceci met en lumière la difficulté pour les élèves à transposer leurs connaissances concernant une notion, ici la périodicité, d'un cadre/registre à un autre. Cette transposition des connaissances ne se fait pas de façon automatique et semble devoir être directement visée par un dispositif adéquat de tâches/techniques. Cette constatation est d'autant mise en lumière du côté français, par le fait que la tâche de périodicité dans le cadre numérique quoique moins familière comme nous avons pu le voir à travers l'étude des manuels, que la même tâche relevant de registre graphique, est cependant connue.

- **Q7 : Un propriétaire possède une parcelle de terrain rectangulaire. Il achète une parcelle carrée contiguë à la première parcelle et obtient un terrain dont la forme est montrée par la figure ci-dessous. On ne connaît ni la largeur de la parcelle du premier terrain, ni les dimensionsde la parcelle carrée, mais on sait que chacune des deux plus grandes longueurs du terrain total mesure 10m.**

  La situation fonctionnelle que nous avons proposée aux élèves pourrait être qualifiée de classique pour les élèves français du point de vue des différentes tâches demandées. Nous verrons dans l'analyse de chacune d'entre elles, dans quelle mesure certaines peuvent cependant leur apparaître quelque peu inhabituelles. Du côté palestinien, les problèmes de type situation fonctionnelle, se limitent à une seule tâche explicite, celle de la détermination d'un extremum (toujours relatif). Nous voyons donc que les élèves palestiniens risquent d'avoir des difficultés à résoudre les autres tâches demandées, en particulier, celles qui doivent l'être avant modélisation de la fonction.

- **Q7.1 : Quelle peut être l'aire maximum du terrain total ?**

  Cette question peut bien sûr être résolue après modélisation de la fonction puisqu'elle correspond à la détermination de son maximum absolu. Mais le contrat, sur lequel se base la résolution de cette question posée en tant que première tâche du problème, veut pour les élèves français qu'elle le soit avant. Ainsi formulée, cette tâche/technique n'est pas étrangère aux élèves français, mais elle l'est grandement pour les élèves palestiniens. Une situation fonctionnelle, du côté palestinien, ne comprend jamais une tâche de détermination d'un extremum absolu. Celle-ci, quand elle est proposée aux élèves, est toujours formulée de façon explicite, en tant que tâche unique : "déterminer le(s) maximum absolu(s) de la fonction ...". Nous pensons par conséquent, qu'il est peu probable que les élèves palestiniens réussissent à reconnaître ici, la tâche de détermination d'un maximum absolu. Nous nous attendons par contre à ce que certains élèves pensent avoir affaire à une tâche de détermination d'un maximum relatif.

a) analyse des réponses des élèves français

* 13 élèves ne répondent pas.
* 3 élèves donnent une réponse fausse :
  - 1 élève exprime des difficultés réelles.
  - 2 d'entre eux, montrent néanmoins un certain niveau d'interprétation correcte, leurs difficultés peuvent être dues à la difficulté de passer au continu : "*(l'aire est) largement inférieure à* $100m^2$" (élève n°19) et "*l'aire maximum sera l'aire pour x admettant le maximum de la fonction.* $y=91\ m^2$" (élève n°25)
* 14 élèves réussissent à établir le maximum, tous directement à partir de la situation fonctionnelle.

Réussite	47 %	échec	10 %
		Non réponse	43 %

b) analyse des réponses des élèves palestiniens

* 29 élèves ne répondent pas.
* 8 élèves tentent d'établir le maximum directement à partir de la situation fonctionnelle mais donnent une réponse fausse : "$x=5$" (élève n°2), "$x=9$" (élève n° 6).
* 20 élèves utilisent la technique de la dérivée afin d'établir un maximum relatif :
  - 1 élève (élève n°1) résout l'équation $f(x) = 0$ au lieu de passer par la dérivée, et établit à la fois un maximum et un minimum. Il s'agit probablement d'une mauvaise maîtrise de la technique de la dérivée, nous ne serions pas étonnée que cet élève ait confondu $f(x)= 0$ et $f'(x) = 0$!
  - 11 élèves établissent l'extremum relatif et concluent, sans vérification, qu'il s'agit du maximum recherché. Ils ont donc échoué à cette question.
  - 4 élèves établissent également l'extremum relatif mais prennent soin d'en vérifier la nature. Ils constatent alors qu'il s'agit d'un minimum et la question du maximum reste sans réponse.
  - 4 élèves établissent l'extremum relatif , constatent après vérification qu'il s'agit d'un minimum, et réussissent ensuite à établir l'extremum absolu sur la base de recherches numériques.
* 4 élèves réussissent à établir le maximum directement à partir de la situation fonctionnelle.

Ainsi, comme nous l'avions supposé, 19 élèves palestiniens ont cru, au moins dans un premier temps, avoir affaire à la tâche de détermination d'un maximum relatif alors qu'aucun n'a reconnu la tâche de détermination d'un maximum absolu. De ce fait, ils ont utilisé la technique de la dérivée.

Réussite	13 %	échec	33 %
		Non réponse	54 %

c) Comparaison des réponses des élèves français et palestiniens

Les résultats obtenus de part et d'autre sont conformes au degré de familiarité des élèves avec cette question. La différence entre les deux groupes d'élèves est peut-être encore davantage soulignée par la technique de résolution utilisée : alors que tous les élèves français qui ont répondu à la question s'appuient sur le cadre d'origine du problème, 60% des élèves palestiniens qui ont répondu à la question utilisent, au moins dans un premier temps, la technique de la dérivée première indiquant qu'ils ont cru avoir affaire à une autre tâche. Dans ce sens, cette question révèle la force du contrat didactique dans le fonctionnement des élèves de part et d'autre.

- **Q7.2 : Soit x la longueur du côté de la parcelle carrée. Etudier l'aire A du terrain en fonction de x : a) Quel est l'ensemble de définition de la fonction A ?**

  Il s'agit de déterminer le domaine de définition de la fonction directement à partir des données de la situation fonctionnelle. La modélisation de la fonction ne peut ici aider à répondre à cette question. C'est une tâche/technique classique dans les situations fonctionnelles pour les élèves français. Elle est implicitement liée à la question précédente, et fait partie des questions qui visent à se familiariser avec la situation fonctionnelle, et en particulier à bien distinguer les variables dépendante et indépendante entre elles, avant de passer à la modélisation de la situation (voir chapitre III - classe de 2nde française). Cependant la question n'étant pas posée en tant que retour à la situation initiale, certains élèves pourraient rechercher le domaine relativement à l'équation de la fonction et non relativement à la situation d'origine. Les élèves palestiniens n'ont jamais à s'interroger sur la question du domaine de définition dans le cadre d'une situation fonctionnelle, celle-ci consiste toujours, rappelons-le, à rechercher un extremum relatif et la détermination du domaine de définition n'est donc pas indispensable pour cette tâche. Ils devraient avoir des difficultés à cette question.

a) analyse des réponses des élèves français

* 7 élèves ne répondent pas.
* 10 élèves donnent une réponse fausse :
  - 5 élèves pensent que le domaine de définition est R+. Un seul s'est justifié en expliquant que "*elle est définie sur R+ mais dans la pratique on la définit sur R+ car on ne peut pas*

avoir de surface négative" (élève n°29). Cela signifie clairement que cet élève a du mal à distinguer variable dépendante et variable indépendante. Il n'est pas exclu que, parmi les autres à avoir donné la même réponse, certains aient commis la même erreur. Tous ont établi l'équation de la fonction avant de répondre à la question du domaine.

- 5 élèves pensent que le domaine est R, probablement en référence à la fonction du second degré modélisant la situation et établie au préalable par tous ces élèves. Deux élèves se sont d'ailleurs justifiés dans ce sens. Quoique la réponse ne soit pas totalement fausse, elle indiquerait à notre sens, des difficultés à interpréter correctement les données du problème.

* 13 élèves réussissent à cette question.

Réussite	43 %	échec	33 %
		Non réponse	23 %

b) analyse des réponses des élèves palestiniens

* 35 élèves ne répondent pas.

* 18 élèves échouent :

- 6 élèves pensent que le domaine est R+. Il est possible que, comme du côté français, cette erreur soit due, au moins pour certains, à une difficulté à distinguer variable dépendante et variable indépendante.
- 5 élèves pensent que le domaine est R. Il s'agit d'élèves qui, comme du côté français, se prononcent à partir de l'équation fonctionnelle.
- 5 élèves donnent une réponse basée sur des estimations numériques erronées. Deux ont tenté une résolution algébrique : ayant déterminé, un maximum (faux) à la question précédente, *ils posent l'équation $f(x) = 75$ et en déduisent que x est inférieur ou égal à 5.* Cette solution confirme d'une part, la difficulté des élèves à déterminer une réponse en dehors d'une certaine mathématisation de la situation, et d'autre part, la difficulté à interpréter la notion de variation dépendante.
- 2 élèves donnent une réponse fausse témoignant néanmoins d'un certain niveau d'interprétation correcte des données du problème. Ces réponses exprimeraient surtout les difficultés de certains élèves palestiniens à envisager le continu : "*{1, 2, ..., 8, 9 }*" (élève n°9) et " *les valeurs de x comprises entre 1 et 9*" (élèves n° 10).

* 8 élèves réussissent à cette question.

Réussite	13 %	échec	29,5 %
		Non réponse	57 %

c) **Comparaison des réponses des élèves français et palestiniens**

Il est notoire que du côté palestinien, les différents taux obtenus (de réussite, d'échec et de non réponse) aux questions Q1 et Q2.a sont comparables et reflètent donc, le peu de familiarité avec les questions à résoudre avant modélisation de la fonction. Les élèves français réussissent dans l'ensemble beaucoup mieux à cette question, mais les taux d'échec et de non réponse relativement élevés soulignent également la difficulté de ce type de tâche. Par ailleurs, l'échec des élèves palestiniens à cette question met en lumière la spécificité de la tâche de détermination du domaine d'une fonction dans le cadre d'une situation fonctionnelle relativement au cadre général apporté par la définition de la fonction.

- **Q7.2.b : Tracer son graphe.**

  L'étude d'une situation fonctionnelle à ce stade de la scolarité des élèves, aussi bien français que palestiniens, ne se conçoit pas sans la réalisation de la tâche de détermination de l'équation de la fonction. La tâche de représentation graphique d'une fonction est largement familière dans les situations fonctionnelles du côté français. Sa formulation pourrait cependant leur apparaître inhabituelle dans la mesure où la technique de résolution à utiliser, en l'occurrence la technique de la dérivée en fin de première, est toujours précisée de façon plus ou moins explicite. Du côté palestinien, elle n'est jamais demandée dans le cadre d'une situation fonctionnelle, mais fait l'objet d'un type de problèmes distincts dont elle est l'unique question. Cependant, nous pensons qu'une fois l'équation de la fonction déterminée, cette tâche de représentation graphique d'une fonction du second degré, devrait être à la portée des élèves des deux côtés. Les élèves palestiniens utiliseront probablement la technique de la dérivée conformément au contrat didactique en classe de 12ème; nous verrons si cette technique, alors qu'elle n'est pas précisée, fait partie des réflexes des élèves français de première. C'est principalement dans ce but que nous n'avons pas souhaité préciser la technique de résolution à utiliser. Nous discernerons alors dans l'analyse la tâche de détermination de l'équation de la fonction avant celle de représentation graphique.

- **Q7.2.b (éq) : Equation de la fonction**

a) **Analyse des réponses des élèves français**

* 3 élèves ne répondent pas.

* 3 élèves établissent une équation fausse.

* 24 élèves réussissent.

Réussite	80 %	échec	10 %
		Non réponse	10 %

b) Analyse des réponses des élèves palestiniens

* 7 élèves ne répondent pas.
* 19 élèves déterminent une équation fausse due notamment au facteur (x-10) choisi au lieu de (10-x), ainsi qu'à l'accumulation pour certains d'autres erreurs de calcul.
* 35 élèves réussissent.

Réussite	57 %	échec	10 %
		Non réponse	10 %

c) Comparaison des réponses des élèves français et palestiniens :

Le taux de non réponse comparable et relativement peu élevé, des deux côtés français et palestinien, traduit la familiarité de cette tâche/technique pour les élèves de part et d'autre. Le taux de réussite beaucoup plus élevé du côté français (80%) que du côté palestinien (57%) est à lier à la longue pratique algébrique acquise par les élèves français comparativement aux élèves palestiniens.

- **Q7.2.b (gr) Graphe de la fonction**

a) analyse des réponses des élèves français

* 17 élèves ne répondent pas à cette question.
* 4 élèves tracent des graphiques faux :
  - 2 élèves qui ont obtenu une équation correcte de la fonction utilisent la technique point par point et accumulent des erreurs de calculs. Quoique la courbe obtenue ne soit pas alors une parabole (voir élève n°29), ils ne cherchent pas à se corriger.
  - 2 élèves s'appuient sur une vague appartenance de classe de la fonction et tracent une parabole, non cohérente cependant avec l'équation obtenue.
* 1 élève réussit partiellement : le graphe est cohérent avec l'équation fausse de la fonction (élève n°28).
* 8 élèves tracent un graphe que nous acceptons comme une réponse juste. Nous constatons que ces graphes n'ont pas été obtenus suite à une étude des variations de la fonction (la question suivante confirme qu'aucun élève français ne la réalise), mais plutôt à partir de la technique numérique/algébrique relative aux fonctions du second degré et mise en place au début de la classe de 1ère, et dès la 2nde pour la mise sous forme canonique $(x-5)^2 + 75$. De plus, ces graphiques sont, chez 6 élèves sur 8, peu précis et/ou seulement partiellement représentés.

Réussite	27 %	échec	13 %
Réussite partielle	3 %	Non réponse	57 %

b) analyse des réponses des élèves palestiniens

* 37 élèves ne répondent pas.
* 12 élèves tracent des graphiques faux :
  - 3 élèves tracent le graphe à partir d'une équation juste de la fonction. La technique adoptée est clairement la technique point par point. Ils commettent de nombreuses erreurs de calcul qui ne les poussent pas à se corriger alors que la courbe obtenue n'a pas la forme d'une parabole (voir élève n°10 et n°15).
  - 8 élèves tracent des graphiques non cohérents avec l'équation de la fonction : les élèves 18, 23 et 34 qui ont obtenu une équation correcte de la fonction tracent respectivement la fonction carré, une fonction périodique et la fonction valeur absolue. Certains élèves font une certaine référence à la classe d'appartenance de la fonction; ainsi l'élève 58 dont l'équation de la fonction est de degré 3 représente la fonction cube.
  - 1 élève trace la représentation graphique de la dérivée de la fonction ! S'est-il trompé sur la fonction à représenter ?
* 2 élèves réussissent partiellement. Le graphe est faux mais cependant cohérent avec l'équation de la fonction. Ils ont utilisé la technique de la dérivée.
* 10 élèves tracent un graphique correct :
  - 6 élèves se sont basés sur la technique de la dérivée. Le graphique est souvent peu précis.
  - 4 élèves utilisent la technique point par point et la reconnaissance de la classe d'appartenance de la fonction. Deux d'entre eux semblent avoir également tenu compte de la dérivée pour le sommet de la parabole.

Ainsi, 8 élèves choisissent la technique de la dérivée et sont capables de l'utiliser correctement pour tracer le graphe d'une fonction, et 7 élèves préfèrent utiliser la technique point par point, même si la prise en compte du sommet de la parabole par la technique de la dérivée n'est pas forcément absente.

Réussite	16 %	échec	20 %
Réussite partielle	3 %	Non réponse	60 %

c) Comparaison des réponses des élèves français et palestiniens

Les taux très élevés de non réponse des deux côtés français et palestinien nous étonnent pour une tâche a priori aussi familière que celle de la représentation graphique d'une fonction du second degré. Bien sûr nous abordons avec cette question la fin du questionnaire et le tracé d'un graphique est toujours relativement long. D'un autre côté, la formulation quelque peu inhabituelle de cette question notamment parce qu'il n'y a pas de question intermédiaire, peut également expliquer ces résultats comme nous l'avons souligné dans l'analyse a priori. Cependant ces raisons ne nous semblent pas suffisantes à elles seules puisque 90% des élèves français et 88% des élèves palestiniens établissent une équation de la fonction même si elle n'est pas toujours correcte. Il est fort probable que les élèves aient rencontré des difficultés à représenter cette fonction en particulier du fait de ses coefficients trop élevés (difficulté notamment à déterminer une échelle convenable, ...). Selon toutes options cependant, cette question montre que la représentation graphique n'est pas acquise à ce stade de l'enseignement, et est loin d'être évidente. Les types d'erreurs des deux côtés nous semblent le confirmer : graphe tracé à partir d'une vague appartenance de classe, ou non adéquation entre le tracé graphique et les autres informations établies concernant la fonction. Il faut noter par ailleurs, chez les élèves qui ont répondu à la question, la différence entre la technique que choisissent élèves français et élèves palestiniens. Aucun élève français ne choisit la technique de la dérivée, alors que la majorité des élèves palestiniens la choisissent, conformément au contrat didactique de la classe de 12ème. Il semble donc que la technique de la dérivée relative à cette tâche ne fasse pas en fin de première partie des réflexes des élèves français malgré les efforts des programmes et du manuel étudié en ce sens. Mais ceci peut bien sûr, être un résultat des choix personnels de l'enseignant français. Cependant comme une partie non négligeable des élèves palestiniens utilisent également une technique antérieure à la technique de la dérivée, il n'est pas exclu que la tendance des élèves français ou palestiniens à éviter la technique de la dérivée quand elle n'est pas indispensable, s'explique par un manque de maîtrise de cette technique à ce stade de leur scolarité respective. Enfin, soulignons que si, comme cela était à prévoir, les élèves français réussissent mieux que les élèves palestiniens à cette tâche, l'écart entre les taux de réussite et de réussite partielle des deux côtés est moins important (10%) que celui auquel nous nous serions attendue.

- **Q7.2.c : Quelle est l'aire minimum du terrain total ?**

  La tâche de détermination du minimum en tant que tâche de retour à la situation initiale, est une question classique qui revient dans les situations fonctionnelles du côté français, de même qu'il s'agit toujours de l'unique question du côté palestinien. Les situations fonctionnelles que nous avons rencontrées dans le manuel de première retenu ne précisaient pas toujours la technique de résolution à utiliser, même si la technique des variations était le plus souvent demandée de façon plus ou moins explicite. Nous verrons qu'elles sont les techniques qui seront choisies par les élèves français, la technique de la dérivée étant celle attendue du côté palestinien conformément au contrat de la classe de 12ème sur cette question.

a) analyse des réponses des élèves français

* 20 élèves ne répondent pas.
* 2 élèves donnent une réponse fausse, basée sur des estimations numériques.

* 1 élève réussit partiellement (élève n°19) : sa réponse est fausse mais cohérente avec la représentation graphique de la fonction sur laquelle il se base pour déterminer le minimum.
* 7 élèves réussissent. Tous ont utilisé la technique algébrique du discriminant.

Réussite	23 %	échec	7 %
Réussite partielle	3 %	Non réponse	67 %

b) analyse des réponses des élèves palestiniens

* 32 élèves ne répondent pas.
* 10 élèves donnent des réponses fausses :
  - 1 élève estime que "c'est impossible" de déterminer le minimum. La technique de la dérivée ne lui est pas disponible.
  - 8 élèves donnent une réponse fausse basée sur des estimations numériques.
  - 1 élève se justifie sur la base de *la résolution de l'équation f(x) = 0 qui lui donne minimum et maximum*. Cet élève a voulu utiliser la technique de la dérivée mais ne la maîtrise pas (voir la réponse du même élève n°1 à la question Q7.1).

* 5 élèves réussissent partiellement :
  - 1 élève donne une réponse correctement obtenue à partir de son graphique néanmoins faux.
  - 1 élève établit le minimum par la technique de la dérivée à partir d'une équation fausse de la fonction.
  - 3 élèves donnent une réponse partielle. Ils ne maîtrisent pas complètement la technique de la dérivée : ils calculent la dérivée mais ne savent pas poursuivre.

* 17 élèves réussissent :
  - 1 élève donne une réponse basée sur le graphique.
  - 16 élèves répondent correctement en utilisant la technique de la dérivée, cependant 6 d'entre eux ont établi la même réponse à la question Q7.1 (détermination du maximum).

Réussite	28 %	échec	16 %
Réussite partielle	8 %	Non réponse	52 %

Il faut souligner que 21 élèves, soit 34% des élèves palestiniens, tentent de répondre à cette question par la technique de la dérivée, même si celle-ci n'est pas maîtrisée par l'ensemble de ces élèves. Par ailleurs, puisque 6 élèves établissent la même réponse à la question du maximum et du minimum, il nous semble pouvoir dire que cette tâche/technique est résolue de façon automatique chez ces élèves qui n'ont pas vraiment conscience de son sens. Cela relativise la réussite.

c) **Comparaison des réponses des élèves français et palestiniens**

Le taux de non réponse du côté français (67%), relativement au taux de non réponse (52%) du côté palestinien indique, comme nous l'avons prévu, que la question telle qu'elle est formulée est plus familière chez ces derniers. Il est probable que les élèves français auraient eu besoin d'être guidés sur la technique à utiliser, ce que pourrait confirmer la technique choisie pour répondre à cette question puisque aucun élève français n'utilise la technique de la dérivée, alors que celle-ci nous apparaît devoir assez facilement s'imposer pour la tâche d'extremum en fin de première. Cependant, si les élèves palestiniens réalisent un taux de réussite plus élevé à cette question que les élèves français, une analyse plus attentive montre que la technique de la dérivée pour déterminer un extremum relatif est utilisée de façon automatique chez certains qui ne différencient pas les deux notions de maximum et de minimum. A exclure alors les 6 élèves qui ont donné la même réponse aux deux questions de maximum et de minimum, la réussite du côté palestinien serait ramenée à 18% des élèves auquel cas une légère avance du côté français est tout de même enregistrée sur cette question. N'oublions pas enfin que cette question arrive en fin de questionnaire et que tracer un graphique est une tâche qui semble plus longue que faire un calcul ; cela peut contribuer à expliquer le fort taux de non réponse, surtout du côté français.

- **Q7.3 : Pour quelle(s) valeur(s) de x l'aire du terrain est-elle égale à 79m² ? Peut-on le savoir directement à partir du graphe de la fonction ?**

  Cette question vise à vérifier si la tâche de détermination d'un antécédent, posée en tant que tâche de type retour à la situation initiale dans une situation fonctionnelle, peut être correctement interprétée comme une résolution d'équation. Autrement dit, nous verrons dans quelle mesure les élèves sont capables de comprendre et de réaliser les conversions de cadres et registres nécessaires. Nous souhaitons voir également si les élèves choisissent de répondre dans le registre graphique ou s'aident du registre graphique pour confirmer ou conjecturer leurs résultats. Cette tâche relative aux situations fonctionnelles est familière pour les élèves français. Si elle n'apparaît jamais dans les situations fonctionnelles de la classe de 12ème palestinienne, elle n'est cependant pas totalement inexistante dans les exercices/problèmes des classes précédentes. Elle apparaît notamment en tant qu'unique tâche des situations fonctionnelles de 11ème, ainsi que posée dans d'autres registres du cadre numérique au début de la classe de 10ème.

a) **analyse des réponses des élèves français**

* 18 élèves ne répondent pas à cette question.
* 3 élèves réussissent partiellement :

- 2 élèves donnent une solution algébrique incomplète : L'équation est posée uniquement chez un élève. Le deuxième ne maîtrise pas la technique algébrique de résolution, il ne cherche pas à les comparer à celle du graphique pourtant correct.
- 1 élève donne une solution graphique incomplète : son graphe n'est que partiellement représenté.

* 9 élèves réussissent :
  - 4 élèves donnent une solution graphique.
  - 5 élèves donnent une solution algébrique. Ils pensent qu'une solution graphique est possible mais ne la réalisent pas.

Réussite	30 %		
Réussite partielle	10 %	Non réponse	60 %

b) analyse des réponses des élèves palestiniens

* 41 élèves ne répondent pas.
* 2 élèves donnent une réponse fausse. La question n'a pas été comprise.
* 9 élèves résolvent partiellement l'équation :
  - 3 élèves posent l'équation sans la résoudre. Ils pensent qu'une résolution graphique est possible mais ne la réalisent pas.
  - 4 élèves résolvent algébriquement correctement l'équation de façon cohérente avec leur équation de départ erronée. Ils pensent qu'une résolution graphique est possible mais ne la réalisent pas.
  - 1 élève résout algébriquement l'équation mais effectue des erreurs de calculs. Il pense qu'une résolution graphique est possible mais ne la réalise pas.
  - 1 élève (n°37) donne une résolution graphique partielle ($x = 3$), qu'il a établie en construisant le graphique.

  Ces 9 élèves ont donc tous réussi à interpréter correctement cette tâche comme une tâche de détermination d'un antécédent.
* 9 élèves résolvent correctement algébriquement l'équation. Ils ne se prononcent pas relativement à une résolution graphique.

Réussite	15 %	échec	2 %
Réussite partielle	15 %	Non réponse	67 %

c) Comparaison des réponses des élèves français et palestiniens

Comme nous l'avons constaté aux deux questions précédentes, l'avance des élèves français sur cette question, quoique certaine, nous apparaît modeste relativement à leur grande familiarité avec cette tâche. Par ailleurs, s'il n'est pas étonnant que les élèves palestiniens ne cherchent pas à établir graphiquement la solution, cela semble de premier abord, plus étonnant du côté français. Mais il est probable que la solution algébrique établie au préalable annule, aux yeux des élèves français, la nécessité d'une solution graphique qui, de plus, n'est pas exigée. Par ailleurs, une solution graphique serait difficile à établir puisque les élèves ont, en général, tracé un graphe plutôt imprécis de la fonction voire pas de graphe du tout. Cette constatation peut néanmoins constituer une indication sur le statut de la représentation graphique des fonctions pour les élèves français : Nous avons montré dans le chapitre III que si le registre graphique avait tendance à perdre son statut de registre de conjecture dans l'étude de fonction en classe de première, ce statut persistait éventuellement dans les situations fonctionnelles. Cependant ce rôle n'est le plus souvent qu'implicitement suggéré dans les énoncés. Cette question montrerait alors qu'il n'y a pas de dévolution de ce rôle du statut du graphique chez les élèves : ils ne semblent pas s'en remettre de façon naturelle au registre graphique. Cette constatation nous apparaît cohérente avec le peu de précision que nous avons souligné dans la majorité des représentations graphiques et explique le fait que les élèves ne cherchent pas à mettre en rapport les connaissances obtenues aux différentes questions du problème (par exemple : courbe obtenue et équation de la fonction, minimum déterminé par la technique des variations, et minimum du registre graphique). Ceci nous semble en général aller de pair avec le manque d'initiative des élèves en matière de résolution des tâches demandées : les élèves ont besoin d'être guidés sur la technique à utiliser pour une tâche donnée, de même qu'ils ont besoin d'être guidés sur la mobilisation du registre graphique en tant que registre de conjecture ainsi que sur la mise en rapport des connaissances susceptibles d'être mises en jeu autour d'une même tâche. Cependant nous n'avons que les résultats d'une seule classe côté français, nous ne savons pas dans quel ordre le programme a été traité, ni si les élèves ont eu assez de temps pour répondre à ce questionnaire.

- **Conclusion de la comparaison des élèves français et palestiniens sur la situation fonctionnelle -**

  Les tâches à résoudre avant modélisation de la fonction sont nettement mieux réussies du côté français que du côté palestinien (respectivement 47% et 43% de réussite, contre 13%). Mais cette différence était à prévoir compte tenu du fait qu'elles sont franchement inhabituelles pour les élèves palestiniens.

Cette différence, diminue nettement sur les tâches à résoudre après modélisation de la fonction : la réussite française (somme des réussites et réussites partielles) varie de 26% à 40% contre 19% à 30% du côté palestinien, l'écart entre les résultats des élèves français et palestiniens à une même tâche ne dépasse jamais les 10%. Des résultats qui nous étonnent quelque peu compte tenu de la longue fréquentation de ces tâches par les élèves français, de la place centrale des situations fonctionnelles, et de l'organisation intuitive et progressive de l'enseignement français autour de ces différentes tâches et des notions qui leur sont relatives. Ce d'autant plus que cette différence s'explique en partie par le manque d'entraînement des élèves palestiniens à ce type de tâche : ils n'ont pas beaucoup eu l'occasion de représenter des fonctions du second degré depuis la classe de 9ème, la notion de minimum et la technique associée sont de nouveaux objets d'enseignement en 12ème, or comme le questionnaire a été passé juste après l'enseignement sur l'application de la dérivée, les élèves n'ont peut-être pas eu le temps d'assimiler correctement toutes ces nouvelles notions. En conséquence, l'organisation de l'enseignement palestinien, plus découpé, avec un contrat très directif sur les techniques à utiliser, n'a relativement pas davantage défavorisé les élèves palestiniens. Les résultats des élèves français à cette question Q7 font ressortir en général le manque d'initiative des élèves quant aux techniques de résolution à enclencher, le rôle circonscrit du registre graphique qui n'est pas mobilisé sans que cela ne soit explicitement demandé. Enfin, la technique de la dérivée pour les tâches de représentation graphique et d'extremum n'est pas entièrement assimilée en fin de première française et de 12ème palestinienne.

III.3. Conclusion de l'analyse de la deuxième partie du questionnaire

Nous faisons ci-dessous un tableau récapitulatif.

		Réussite	Non réponse	Echec
Q1.1	**F**			
	P	**47%**	**8%**	**44%**
Q1.2	**F**	**3%**	**50%**	**47%**
	P	**74%**	**5%**	**21%**
Q2	***F***	***53%***	*7%*	*37%*
	P	***87%***	*2%*	***12%***
Q3	F	17% (31%)	50%	10%
	P	33% (46%)	13%	41%
Q4	F	40%	30%	30%
	P	33%	36%	31%
Q5	***F***	***94%***	***0%***	***6%***
	P	***67%***	***2%***	***31%***
Q6(graphique)	*F*	*83%*	*10%*	*0%*
	P	*8%*	*8%*	*48%*
Q6(numérique)	*F*	*47%*	*20%*	*33%*
	P	*10%*	*34%*	*51%*
Q7.1	*F*	*47%*	*43%*	*10%*
	P	*13%*	*54%*	*33%*
Q7.2a	*F*	*43%*	*23%*	*33%*
	P	*13%*	*57%*	*29,5%*
Q7.2b(eq)	***F***	***80%***	***10%***	***10%***
	P	***57%***	***10%***	***32%***
Q7.2b(gr)	F	30%	57%	10%

		Réussite	Non réponse	Echec
	P	19%	60%	20%
Q7.2c	F	26%	67%	7%
	P	36%	52%	16%
Q7.3	F	30%	60%	0%
	P	21%	67%	3%

D'après ce tableau, nous constatons que :
Trois questions (gras italique) sont réussies par la majorité des élèves des deux pays : l'une Q2 composition dans les cadres algébrique et numérique avec un avantage pour les élèves palestiniens, les deux autres Q5 résolution d'équation du second degré, et Q7.2b (éq) écrire l'équation d'une fonction traduisant une situation fonctionnelle, avec un avantage pour les élèves français.

Deux questions (gras) sont réussies à peu près correctement par les élèves palestiniens et non les élèves français : Q1.1 et Q1.2 : composée et réciproque dans un cadre purement numérique.

Quatre questions (italique) sont réussies par les élèves français et non par les élèves palestiniens : Q6g, Q6n, fonction périodique registre graphique et numérique, Q7.1, Q7.2a : fixer les bornes des variables de la fonction modèle.

Cinq questions sont mal réussies des deux côtés : Q3 fonction produit (léger avantage pour les élèves palestiniens), Q4, fonction somme dans le registre graphique (léger avantage pour les élèves français, Q7.2b (gr) : tracer le graphe d'une fonction, Q7.2c, trouver un minimum, Q7.3, poser et résoudre une équation du second degré.

Les trois dernières questions rencontrent un fort taux de non réponse des deux côtés, on peut se demander si le temps a été suffisant : sans avoir tracé une bonne représentation graphique, les élèves ne pouvaient résoudre les deux dernières questions qu'avec une bonne maîtrise du cadre algébrique.

III.3.1. Conclusion de l'analyse des réponses des élèves français

Des taux de non réponse très variables liés à une forte dépendance du contrat usuel de la classe
Les taux de non réponse varient fortement en liaison avec la familiarité supposée de la tâche à résoudre. Ainsi, les élèves enregistrent un taux de non réponse de 7% à la question Q2 de composition classique, alors que ce taux s'élève à 50% à la question Q1.1 où la même notion est visée dans le cadre numérique. A la question Q5 de résolution graphique d'équation, très classique dans le curriculum français, les élèves enregistrent un taux de non réponse nul. Ce taux s'élève cependant à 50% à la question Q3 de multiplication de fonctions par intervalles, car si les élèves français connaissent la multiplication de fonctions, ils ont du mal à traiter les fonctions par intervalles. Cette réticence à

répondre aux questions qui ne correspondent pas précisément aux critères connus traduit en général, à notre sens, les difficultés des élèves à réaliser des transferts de connaissances : ils ne s'engagent pas, par exemple, dans la recherche d'une technique de résolution si la tâche est donnée dans un cadre autre que le cadre habituel ou si l'expression de la fonction concernée par la tâche ne leur est pas suffisamment familière. La technique du discriminant utilisée dans les questions de représentation graphique et du minimum au lieu de la technique de la dérivée ne doit pas faire penser le contraire.

C'est ce que révèlent les résultats aux différentes questions composant la situation fonctionnelle, et notamment aux questions nécessitant une résolution après modélisation. Les taux de non réponse aux trois questions de représentation graphique (Q2.b), de minimum (Q2.c) et de résolution d'équation (Q3), respectivement de 57%, 67% et de 60% sont les plus élevés de tous les items de cette deuxième partie du questionnaire (à l'exception de l'item Q1.2). Certes, ce sont les dernières questions du questionnaire, mais cela ne suffit pas à justifier des taux de non réponse aussi élevés compte tenu de la familiarité a priori de ces tâches, et du type emblématique de ces problèmes de situation fonctionnelle en fin de première. Si le fait que les techniques de résolution n'aient pas été précisées a pu influencer négativement leurs résultats, cela semble indiquer, une fois de plus, que l'élève français ne réussit pas si on lui laisse l'initiative de la technique à choisir.

Une aisance dans le registre graphique à relativiser

Les questions Q5, et surtout Q6.1 (car la fonction concernée dans le registre graphique n'est pas une fonction standard) montrent clairement, comme cela était prévisible, que les élèves français ont de la facilité à traiter avec le registre graphique. Cependant, cette aisance ne se retrouve plus si les tâches à résoudre imposent des conversions de cadres/registres. Ainsi, la question Q4 (somme de fonctions dans le registre graphique) que l'on peut considérer comme nécessitant une conversion graphique/numérique et la question Q7.2.b de représentation graphique d'une fonction du second degré montrent que les conversions vers le registre graphique, tout au moins les conversions numérique/graphique et algébrique/graphique ne sont pas maîtrisées par les élèves français.

Des difficultés avec le cadre numérique

La comparaison des résultats des élèves français aux items Q1.1 et Q2.1 le révèle de façon flagrante. Mais également, les résultats à la question Q6.2 de périodicité dans le cadre numérique surtout si ceux-ci sont comparés aux résultats à la question Q6.1 mettant en jeu la périodicité dans le registre graphique. Ces constatations laissent supposer que le cadre numérique est loin d'être aussi évident. Nos résultats rejoignent sur ce point ceux établis par Bloch lors de l'analyse des résultats de son questionnaire. Il nous apparaît que l'accent mis par les programmes français sur le registre graphique, dans la mesure où la mobilisation du cadre numérique est essentiellement laissée à la charge de l'élève à travers la pratique du registre graphique, ne suffit pas à assurer une bonne réussite dans ce cadre.

Les notions d'opérations de fonctions ne sont pas maîtrisées

Ceci nous est révélé par les résultats des élèves aux différents items des 4 premières questions mettant en jeu la composition dans le cadre numérique, la multiplication envisagée sur les fonctions par intervalles, et la somme de fonctions dans le registre graphique. D'après notre travail précédent, la capacité de reconnaître et de traiter une notion dans un autre cadre/registre que celui auquel l'élève est habitué est à relier à sa maîtrise de la notion. Or les élèves français enregistrent des taux de réussite très modestes, voire très bas, à certains de ces items. Cette constatation spécifique aux différentes notions d'opérations de fonctions est en général à mettre en relation avec leur dépendance constatée au contrat usuel de la classe.

III.3.2. Conclusion de l'analyse des réponses des élèves palestiniens

Un taux de non réponse trompeur car souvent moins élevé du côté palestinien

Les taux de non réponse obtenus aux différents items des six premières questions varient de façon certaine en fonction de la familiarité supposée de la tâche à résoudre : Ainsi les taux de non réponse les plus élevés sont atteints, et cela était prévisible, pour les deux questions de somme de fonctions dans le registre graphique (Q4) et de périodicité dans le cadre numérique (Q6.2) (respectivement 36% et 34%) alors que le taux de non réponse à la question Q2 de composition classique n'est que de 2%. Cependant, l'écart entre ces taux de non réponse n'atteint pas les proportions relevées du côté français. Cela pourrait s'expliquer par le fait que ces tâches apparaissent en définitive moins étrangères pour l'ensemble des élèves palestiniens que pour les élèves français et ne signifie pas forcément que les élèves palestiniens s'engagent plus facilement dans la recherche de solution pour des tâches non habituelles. Il n'est pas exclu que, malgré toutes nos précautions lors de l'élaboration de ce questionnaire à concevoir des questions qui n'avantageraient pas trop les élèves d'un côté par rapport à l'autre, l'obligation dans laquelle nous nous sommes trouvée d'insister sur un nombre trop réduit d'objets d'enseignement ait favorisé de fait les élèves palestiniens. Les taux de non réponse, qui s'élèvent brusquement aux items de la question Q7 de situation fonctionnelle puisqu'ils varient de 52% à 67%, si l'on exclut les résultats à l'item correspondant à l'établissement de l'équation fonctionnelle, nous apparaissent conforter ces conclusions. Remarquons aussi que l'ordre des questions a pu de fait avantager les élèves palestiniens.

La pratique du cadre numérique favorise la réussite des élèves palestiniens sur certaines notions

La pratique du cadre numérique nous apparaît pouvoir expliquer les résultats nettement meilleurs (relativement aux résultats des élèves français) des élèves palestiniens sur la notion de composition de fonction ; les élèves reconnaissent à un pourcentage élevé la notion de composition dans un registre du cadre numérique qui ne leur est pas familier. Si la capacité de transférer une connaissance d'un registre familier à un autre qui ne l'est pas, est significative du degré d'assimilation de cette connaissance, il est alors possible de conclure que les élèves palestiniens ont acquis une bonne maîtrise de la composition. De même pour la tâche de résolution graphique d'équation (question Q5) ou de lecture graphique d'image (question Q6.2), où les taux de réussite quoique modestes (respectivement 67% et au moins 59%), indiquent que l'élève palestinien est capable d'aborder des tâches certes simples mais qui ne lui sont néanmoins pas familières. Ces tâches ont été traitées par l'enseignement palestinien dans d'autres registres du cadre numérique aussi pensons-nous que cette pratique du cadre numérique a influencé favorablement les résultats des élèves palestiniens relativement à certaines notions.

Des difficultés importantes avec le registre graphique

Il est possible de repérer ces difficultés non seulement par une moins bonne réussite aux tâches relatives au registre graphique, même quand elles sont jugés familières pour les élèves (Q6.1) mais surtout par la difficulté, constatée chez un pourcentage non négligeable d'élèves (18%) à distinguer les variables x et y (question Q5). Ceci, bien sûr, sans doute dû à un trop grand confinement du registre graphique était prévisible et nous l'avions déjà constaté lors de l'analyse de la première partie du questionnaire.

II.3.3 Comparaison et interprétation

De meilleurs résultats en général du côté des élèves français, mais une avance modeste

L'ensemble des résultats obtenus à cette deuxième partie du questionnaire, nous permet, comme nous l'avions prévu, de conclure à une avance des élèves français. Mais cette avance nous apparaît modeste si l'on tient compte des résultats des élèves français relativement aux résultats des élèves palestiniens, de l'organisation de l'enseignement français (pratique longue et progressive d'une majorité de notions afin de favoriser l'acquisition du sens chez les élèves, accent plus important mis sur la variété des cadres et registres et sur le statut non seulement objet mais également outil des notions), ainsi que, nous ne pouvons malheureusement l'ignorer, des conditions politiques catastrophiques que vivent les territoires palestiniens depuis octobre 2000, et qui sont loin de créer un climat favorable à l'éducation. D'un autre côté, nous ne pouvons négliger le fait que nous n'avons qu'une classe du côté français dont, de plus, nous ne connaissons pas le niveau. Les résultats doivent donc être considérés avec prudence, ils mettent néanmoins en lumière quelques faits concernant le rapport entre enseignement classique et enseignement plus moderne qui mériteraient d'être plus attentivement étudiés.

Compartimentation des connaissances, assujettissement aux cadres/registres et techniques connus

Les résultats obtenus par l'ensemble des élèves à ce questionnaire attestent de leurs grandes difficultés, en général, à se dégager des techniques institutionnalisées et des cadres et registres fréquentés. Les élèves ont du mal, en général, à opérer des transferts de connaissances et font preuve d'un manque d'initiative face aux techniques à utiliser. Ces résultats ne nous étonnent pas venant du côté palestinien, mais montrent que l'organisation d'un enseignement, tel l'enseignement français, autour de tâches/techniques plus variées associée à une plus grande diversité de cadres et de registres ne donne pas forcément aux élèves une plus grande facilité d'adaptation aux problèmes nouveaux. Ceci peut s'expliquer par le fait qu'un tel enseignement, mettant forcément en jeu l'apprentissage d'un plus grand nombre de notions nécessite un temps d'assimilation plus long. Remarquons d'ailleurs que les élèves français sont en 1ère, il leur manque donc 6 mois de scolarité par rapport aux élèves palestiniens. Mais il est également possible que ceci soit dû, du moins en partie, à la spécificité française d'un découpage relativement important des problèmes en tâches/techniques souvent explicites qui ne contribue pas à encourager l'initiative chez l'élève.

Un cadre numérique et des notions à viser selon leur statut objet à ne pas négliger

Si l'on constate, des deux côtés français et palestinien, une dépendance du contrat usuel de la classe, il semble que le traitement de certaines notions, comme les opérations sur les fonctions, dans le cadre numérique conjointement avec leur implication selon leur statut objet, ait des effets positifs sur leur acquisition. Ces constatations ne signifient pas que le statut outil de ces notions soit à négliger dans un enseignement donné mais peut-être qu'il faut être attentif à ce que les deux aspects outil et objet d'une même notion soient également envisagés, ceci permettant par ailleurs que s'installe une véritable dialectique outil/objet au sens de Douady.

Le registre graphique, tel qu'il est impliqué dans l'enseignement français, ne semble pas plus porteur de sens qu'un autre cadre ou registre

La place accordée au registre graphique dans l'enseignement français ne réussit pas à en faire un registre particulièrement porteur de sens ; ceci apparaît être le cas au moins pour les notions qui ont été testées à travers ce questionnaire comme celles d'opération sur les fonctions ou de minimum. Cette constatation est plus particulièrement à lier aux difficultés des élèves français à résoudre des tâches qui nécessitent des conversions de registres vers ou à partir du registre graphique puisque pour envisager de nouvelles techniques, l'élève doit pouvoir transférer une technique relative à un cadre ou registre connu, vers un autre cadre ou registre. L'enseignement français axé sur le registre graphique souffrirait peut-être du fait qu'il ne prend pas suffisamment à sa charge les questions de conversions impliquant le registre graphique. Bien sûr, il faut se rappeler que nos résultats se limitent à une seule classe du côté français et que dans notre étude de la transposition didactique du concept de fonction, nous n'avons pas pu intégrer des observations de classes, mais la place primordiale dont jouit le registre graphique dans l'enseignement français, au moins relativement à l'enseignement palestinien, mérite qu'une attention particulière soit accordée à l'impact du registre graphique dans l'organisation de cet enseignement.

Les résultats obtenus à cette deuxième partie du questionnaire révèlent que les élèves français ne se distinguent pas particulièrement des élèves palestiniens quant à la maîtrise des différentes notions visées par ce test. Ils réussissent, certes mieux, que les élèves palestiniens mais ceci semble être davantage la conséquence d'un enseignement plus vaste, en termes de notions abordées et des tâches qui leur sont associées, que d'une véritable capacité des élèves français à mobiliser leurs connaissances pour la résolution de tâches ne correspondant pas précisément aux critères habituels. Ces constatations mettent sans doute le doigt sur la difficulté de concevoir un enseignement moderne (comme l'enseignement français relativement à l'enseignement palestinien) se souciant de l'aspect intuitif des notions à institutionnaliser et du sens à leur donner.

Conclusion

Nous avons réalisé ce travail de recherche dans l'objectif de caractériser l'objet fonction dans chacun des deux systèmes d'enseignement que sont les classes de Seconde et Première en France, et tout le cycle du secondaire supérieur en Palestine afin de mieux faire ressortir les difficultés d'apprentissage de la notion de fonction spécifiques à chacun des deux systèmes d'enseignement. Ce travail consiste plus généralement à étudier la transposition didactique d'une notion particulière, celle de fonction. L'idée était pour nous d'approfondir sur la base d'une approche plus pratique, cette notion de transposition didactique en l'inscrivant dans le cadre plus général de la théorie de l'anthropologie didactique qui l'englobe et surtout qui propose quelques outils nouveaux pour l'étudier. Notre recherche vise alors également l'objectif de mettre en œuvre et de préciser ces outils sur l'étude d'un objet particulier.

En inscrivant, notre étude dans le cadre de la théorie de l'anthropologie didactique, nous avons adopté un point de vue institutionnel, par opposition à une approche essentiellement cognitive, par lequel les difficultés d'apprentissage d'une notion sont rattachées à l'organisation institutionnelle de l'enseignement de cette notion. Par conséquent notre but est davantage devenu celui d'éclairer l'écart entre les choix de transposition faits dans chacun de ces deux systèmes d'enseignement afin de faire ressortir l'impact de ces choix différents sur les connaissances qui vont être acquises par les élèves, que de caractériser de façon fidèle l'un ou l'autre des enseignements. Enfin, même si notre étude s'est intéressée en priorité à l'organisation des contenus, nous n'avons pas complètement négligé de prendre en compte les grandes intentions didactiques et les principales méthodes pédagogiques.

Ceci nous a conduite à organiser notre travail en trois étapes principales. La **première** a été de préciser notre cadre théorique afin de clarifier notre problématique et de développer notre méthodologie. Mais il n'aurait pas été possible de le préciser sans rappeler quelques repères historiques concernant le développement du concept de fonction. Cette rapide étude historique a fait ressortir la difficulté d'une conceptualisation générale de la notion de fonction, et a mis en lumière deux des aspects conceptuels principaux que renferme cette notion, l'aspect loi de variation et l'aspect loi ensembliste. Nous devons la caractérisation du troisième aspect, soit la fonction en tant que processus, à l'étude de travaux antérieurs portant sur la notion de fonction que nous avons également considéré dans cette première étape de notre travail.

Cette étude historique nous a également permis de mettre le doigt sur certains des différents éléments permettant de caractériser et de faire la spécificité de l'organisation d'un enseignement donné de la fonction. Elle a montré en particulier le rôle primordial des différentes représentations possible de la fonction et de l'unification de celles-ci dans les différents stades de conceptualisation de la notion, ainsi que l'importance des différents problèmes mettant en jeu la notion de fonction du point de vue du sens qu'ils permettent de donner à la notion mais aussi la nécessité d'une décontextualisation du concept relativement à ces problèmes pour en permettre une appréhension sous une forme plus générale. Nous avons par la suite décidé d'inscrire ces problèmes dans une vision plus générale, celle de cadre permettant de faire fonctionner tout concept mathématique. Notre étude historique a montré ainsi combien ces divers éléments étaient imbriqués et liés de façon dialectique, formant ce que nous avons appelé un *tout équilibré*, et a révélé la nécessité de l'adoption d'un cadre théorique permettant de les intégrer et d'une méthodologie permettant de les prendre en compte.

Nous avons alors articulé plusieurs cadres théoriques :

- Le cadre de la théorie de l'anthropologie didactique, bien sûr, où nous avons adopté une problématique écologique. Ce cadre théorique permet d'étudier le savoir fonction et son évolution dans chacun des deux systèmes d'enseignement qui nous intéresse, en le décomposant sur la base des différents objets d'enseignement qui le constitue, puis en intégrant ces différents objets en organisations praxéologiques constituées de tâches, de techniques pour les résoudre et de technologies pour justifier les techniques. Il est alors possible d'étudier finement le rapport institutionnel à l'objet fonction soit la traduction caractéristique dans chacune des deux institutions du savoir fonction en termes de praxéologies, ces praxéologies permettant de caractériser les activités mathématiques concernant les fonctions.
- Le cadre théorique des registres de représentation de Duval. Notre étude théorique a révélé le rôle central des registres de représentation dans l'organisation de tout enseignement sur le concept de fonction, puisque les registres de représentation déterminent dans une grande mesure les techniques de résolution des tâches composant les activités des élèves sur les fonctions, et a montré à quel point sont liés modes d'appréhension de l'objet fonction et modes de représentation utilisées pour travailler cet objet.
- Celui relatif à la notion de cadre développé par Douady. Nous avons choisi de considérer les registres apparaissant dans un enseignement donné relativement au cadre auquel les objets représentés appartiennent. La notion de cadre concerne le fonctionnement global du concept dans ses relations avec d'autres concepts du même cadre ou avec des cadres différents. La prise en compte des interrelations entre registres et cadres doit nous permettre de mieux prendre en compte les modes d'appréhension de la notion à enseigner et les rapports fondamentaux à cette notion que l'on veut installer.
- Celui relatif à la distinction entre statut outil ou objet d'une notion mathématique toujours chez Douady, pour ce que ce cadre théorique associé aux notions de cadres et registres révèle sur les tendances du point de vue pédagogique d'un enseignement donné.

Notre méthodologie qui se fonde sur l'articulation de ces différents cadres théoriques s'appuie sur les différents volets d'analyse qu'ils impliquent. Ils ont été précisés dans le chapitre II de notre thèse et ont servi à l'élaboration de notre grille d'analyse.

La deuxième étape a concerné l'étude du rapport institutionnel à l'objet fonction. Nous avons étudié séparément chacun des deux systèmes d'enseignement afin de faire ressortir leur cohérence d'ensemble, puis mis en rapport les principaux résultats obtenus. Cette analyse institutionnelle a confirmé les différences radicales entre les deux transpositions didactiques dont nous supposions l'existence. Nous résumons de façon très succincte par ces quelques points, ces différences sensibles tant du point de vue de l'organisation des contenus mathématiques relatifs à l'objet fonction que des méthodes pédagogiques et intentions didactiques adoptées par chacun des deux systèmes d'enseignement :

- L'approche française se caractérise par une position centrale du concept de variation qui fait que l'évolution du rapport à l'objet fonction est en grande partie déterminée par l'évolution de l'appropriation de la notion de variation d'un point de vue intuitif vers un point de vue progressivement plus formel. L'enseignement palestinien démarre, lui, par une présentation directe de la fonction d'après la définition ensembliste. Cependant le faible niveau de connaissance de l'élève relativement à la fonction à ce stade de leur scolarité fait que ce mode d'appréhension plus général a du mal à se traduire au niveau de l'organisation praxéologique caractéristique des classes de 10ème et 11ème palestiniennes. Le cadre fonctionnel a du mal à se dégager étant données les tâches qui en sont constitutives et qui relèvent essentiellement des cadres numérique et algébrique. Elles sont plus proches pour certaines d'une appréhension de la fonction comme processus, et le passage des tâches relevant du cade numérique concernant des fonctions définies sur un domaine fini aux tâches relevant du cadre algébrique et concernant des fonctions définies sur un domaine infini, qui mettent pourtant en avant la notion de variable, témoigne tout particulièrement de la difficulté que présente cet enseignement à promouvoir l'idée de dépendance fonctionnelle. Du côté français au contraire, la position de la notion de variation permet au cadre fonctionnel de se dégager de façon plus nette.

- Cette position centrale de la variation, propre à l'enseignement français, fait que le mode d'appréhension de la fonction comme loi de variation est le mode principal tout au long de ces deux premières années de lycée. La fonction, en tant que processus, quoiqu'elle soit directement visée par la définition du manuel de Seconde retenu, reste en marge par rapport à l'appréhension comme loi de variation. Cet aspect se reflète relativement peu dans l'organisation praxéologique décrivant l'enseignement de la fonction dans l'institution française et est assez rapidement laissé à la charge de l'élève. La prise en compte de la fonction selon un mode d'appréhension plus général se dégage également à l'aide d'un ensemble de tâches, et d'une double implication de la notion de fonction selon son statut objet et outil. Cependant cette appréhension plus générale de la fonction ne s'inscrit pas dans le contexte de la définition générale ensembliste de la fonction. L'évolution du concept de fonction en classe de 12ème palestinienne s'inscrit en totale rupture avec ce qui caractérisait la fonction jusque-là. La fonction y est présentée selon son mode loi de variation, le cadre fonctionnel peut donc se dégager à ce stade mais uniquement en tant que sous-cadre du cadre de l'analyse.

- De façon générale, l'organisation praxéologique décrivant le système français se traduit par une variété de tâches et de techniques beaucoup plus importante que celle décrivant le système palestinien. Celle-ci apparaît pauvre en tâches et techniques, surtout pendant les deux premières années de 10ème et de 11ème, et en conséquence il se base peu sur la diversité des cadres et registres et ne prend que peu en compte l'implication des notions enseignées selon leur double statut outil et objet. L'appréhension de la fonction comme loi de variation semble susceptible d'offrir aux élèves un ensemble plus riche en activités de façon à favoriser une meilleure appropriation de la notion alors que la limitation au mode d'appréhension comme loi ensembliste, mais aussi peut-être comme processus, dans la mesure où à un tel stade de la scolarité, les tâches relatives aux deux modes d'appréhension tendent à se recouper, ne met à disposition des élèves qu'un ensemble d'activités beaucoup plus pauvre, limitant d'autant leurs possibilités d'approfondir leur maîtrise du concept.

- Du point de vue des méthodes pédagogiques, la comparaison des deux enseignements laisse à penser que l'enseignement français doit a priori permettre à l'élève de développer une plus grande flexibilité à mettre en rapport les connaissances et à en envisager de nouvelles, mais avec l'avancement de la formalisation des notions, la progression de l'enseignement vers un enseignement plus classique, mettant de plus en plus l'accent sur l'apprentissage de techniques de résolution, laisse déceler que le succès d'un tel enseignement dépend dans une grande mesure de l'application qui en sera faite par le professeur compte tenu probablement des diverses contraintes institutionnelles, dont le niveau de la classe n'en est pas le moindre.

Nous en venons maintenant à la **dernière étape** correspondant à la partie expérimentale de notre travail :

Cette dernière étape de notre travail visait l'étude du rapport personnel à l'objet fonction développé par les élèves de chacune des deux institutions. Ce rapport personnel ne peut être analysé que sur la base du rapport institutionnel à l'objet fonction que nous avons étudié justement dans l'étape précédente de notre travail. Rappelons-nous que d'après la théorie de l'anthropologie didactique tout rapport personnel à un objet dépend d'une façon ou d'une autre du rapport qui existe entre cet objet et l'institution à laquelle se réfère la personne. Pour analyser ce rapport personnel nous avons élaboré un questionnaire en deux parties que nous avons adressé aux élèves de chacun de deux systèmes d'enseignement en fin de cycle d'étude sur la fonction : La première partie de ce questionnaire visait particulièrement à tester les capacités des élèves à reconnaître une fonction dans des situations variées, la seconde à évaluer leurs capacités à résoudre certaines tâches. Devant les difficultés d'élaboration d'un questionnaire commun dues aux divergences profondes entre les deux enseignements, nous avons décidé de proposer des questions formulées essentiellement de façon atypique et faisant éventuellement appel à des techniques de résolution pas ou peu familières en faisant attention toutefois à n'impliquer que des notions censées connues des élèves. Le questionnaire conçu a pu permettre alors d'évaluer la capacité des élèves à mobiliser leurs connaissances dans la résolution de tâches plutôt inhabituelles.

Nous nous attendions à une meilleure réussite des élèves palestiniens à la première partie du test et à une meilleure réussite des élèves français à la deuxième partie. Les résultats ont certes été conformes à nos attentes, notamment sur la première partie du questionnaire qui a dévoilé à quel point cela pouvait être handicapant d'occulter complètement les différents aspects de la définition générale ensembliste dans un enseignement consacré à l'objet fonction du point de vue du savoir visé. Concernant la deuxième partie du questionnaire, il nous faut bien sûr insister sur le fait que dans l'utilisation d'une méthode d'analyse basée sur la passation de tests, il est difficile de maîtriser toutes les variables pouvant interférer aux niveaux de l'obtention des résultats. Par exemple, concernant notre questionnaire il est fort probable que les élèves français aient été fortement découragés par sa longueur alors même que les questions qui leur étaient les plus familières arrivaient à la fin. La passation du test en fin d'année scolaire pour les élèves français peut également avoir été la cause d'un manque de motivation du côté français relativement aux élèves palestiniens qui étaient (doublement) motivés par leur présence en classe de 12ème, donc en classe d'examen , et par l'idée (pour certains) de se mesurer à des élèves de pays "plus développés". Mais, d'un autre côté, il est vrai que les conditions générales dues à la situation politique en territoires palestiniens n'étaient pas non plus les plus favorables à l'évaluation d'une entreprise éducative.

Néanmoins malgré l'existence de ces variables non maîtrisées, le faible écart enregistré entre les résultats des élèves français et palestiniens à la deuxième partie du test soulève quelques réflexions :

L'approche française caractérisée par une évolution progressive des notions, inscrite dans la continuité, le fait que ces notions soient présentées aux élèves beaucoup plus tôt au cours de la scolarité, doit a priori leur laisser plus de temps pour une meilleure appropriation des notions et ne peut constituer qu'un des points forts de l'enseignement français. Il nous semble que les difficultés des élèves pourraient davantage s'expliquer par ce qui constitue paradoxalement un autre point fort de l'enseignement français soit son organisation praxéologique caractéristique autour d'un ensemble varié de tâches et de techniques qui s'équilibre écologiquement avec une plus grande diversité de cadres et de registres et une double implication, souvent, des objets d'enseignement selon leur statut outil et objet. Notre analyse du système d'enseignement français a en effet permis de souligner que ce point fort de l'enseignement français relevait d'un potentiel que le professeur avait en charge de traduire, or pour diverses contraintes institutionnelles que notre étude n'a pas permis de cerner, celui-ci n'est pas assuré de réussir !

Il nous semble que ces résultats ouvrent des perspectives de recherches quant au rôle du professeur et aux possibilités d'assurer effectivement un tel enseignement : dans la pratique, l'enseignement français ne se révélerait-il pas tout aussi directif qu'un enseignement plus classique ? la question qui se pose est bien celle de la nature d'un enseignement moderne, relativement à un enseignement plus classique, favorisant les mises en rapport des connaissances et la mobilisation des connaissances anciennes pour en envisager de nouvelles. Certes, ce type de recherche ne pourrait pas aller sans une méthodologie fondée sur des observations de classe permettant de prendre en compte les contraintes institutionnelles dues en particulier à la gestion de la classe, mais il nous semble aussi que la méthode en trois volets d'analyse, que nous avons adoptée, est intéressante, et devrait lui être conjointe, parce qu'elle permet d'analyser le savoir à transmettre par ces différentes composantes et d'étudier le jeu dialectique qui s'installe entre elles, de même qu'elle permet de saisir certains des aspects pédagogiques d'un enseignement dans leurs liaisons avec l'organisation mathématique de cet enseignement.

Enfin, du point de vue plus exclusif de l'organisation des contenus, nous retenons de notre étude l'intérêt de maintenir, dans un enseignement relatif au concept de fonction, la position centrale de la notion de variation, car elle permet une organisation de l'enseignement plus riche en activités et plus porteuse de sens. Cependant il nous semble que cet enseignement ne doit pas négliger d'insister sur les activités numériques, mettant davantage en jeu la fonction en tant que processus, même si cela doit se réaliser aux dépends de certaines activités visant plus particulièrement la notion de variation. En effet, les activités numériques se révèlent également porteuses de sens relativement à certaines notions et notre étude montre que les élèves ne peuvent acquérir de capacités réelles dans ce domaine sans que suffisamment de tâches relevant de ce cadre, même parmi celles que l'on pourraient considérer comme simples, ne leur soient proposées. Enfin, la sensibilisation à une appréhension plus générale de la fonction faisant intervenir la condition de l'unicité de l'image n'est pas à écarter même si cela ne passe pas forcément par la définition générale ensembliste, il y va effectivement de la nature du savoir visé et de l'organisation plus générale, chez l'élève, des différents savoirs mathématiques entre eux. Une autre perspective de recherches s'ouvre alors, celle visant la conception de situations d'enseignement qui réussiraient à agencer ces différents aspects. Elle pourrait se révéler très à propos du côté palestinien où une réorganisation générale de l'enseignement est en cours.

Bibliographie

Ouvrages et articles de didactique des mathématiques auquel il est fait référence dans notre travail

Alves Dias M.(1998), *Les problèmes d'articulations entre points de vue cartésien et paramétriques dans l'enseignement de l'algèbre linéaire*, Thèse de doctorat, Université de Paris 7.

Amra N. (1994), *Contribution à l'étude différentielle des pratiques des élèves en classe : Comparaison entre élèves d'une classe forte et d'une classe faible.* Mémoire de D.E.A soutenu à l'Université de Paris 7, IREM de Paris 7.

EVAPM Seconde (1991), *Evaluation du programme de mathématiques, fin de Seconde*, Une étude de l'APMEP, publication n°88, Paris.

Artaud M. (1998), Introduction à l'approche écologique du didactique : L'écologie des organisations mathématiques et didactiques, *Actes de la IXème Ecole d'Eté de didactique des mathématiques de Houlgate*, 101 - 139.

Artigue M. (1998), L'évolution des problématiques en didactique de l'analyse, *Actes de la IXème Ecole d'Eté de didactique des mathématiques de Houlgate*, 229-242).

Assude T. (1998), Approche écologique et disparition de noms. Exercice d'application, *Actes de la IXème Ecole d'Eté de didactique des mathématiques de Houlgate*, 140 - 145.

Breidenbach D., Dubinski E., et all. (1992), Development of the process conception of function, *educational studies in mathematics* n°23, 247 - 285.

Bloch I. (2000), *L'enseignement de l'analyse à la charnière lycée / université. Savoirs, connaissances et conditions relatives à la validation*, Thèse de Doctorat, Université de Bordeaux I.

Bosch M., Chevallard Y. (1999), La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs - Objets d'étude et problématique, *Recherches en didactiques des mathématiques,* vol 19 n°1, 77-124.

Chevallard Y. (1991), *La transposition didactique*, 2ème éd., La Pensée Sauvage, Grenoble.

Chevallard Y. (1992), Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique, *Recherches en didactiques des mathématiques* vol 12 n°1, 73-112.

Chevallard Y. (1995), La fonction professorale : esquisse d'un modèle didactique, *Actes de la VIIIème école d'été de didactique des mathématiques de Saint Sauves d'Auvergne,* 83-121.

Chevallard Y. (1995-1996), Les outils sémiotiques du travail mathématiques, *Petit x* n°42, 33-57.

Chevallard Y. (1999), Analyse des pratiques des enseignants et didactique des mathématiques : l'approche anthropologique, Actes de l'université d'été de La Rochelle, 91 - 120.

Conne F. (1981), *La transposition didactique à travers l'enseignement des mathématiques en première et deuxième année de l'école primaire,* Thèse de doctorat, faculté de psychologie et des sciences de l'éducation, Université de Genève.

Dabeet L., Deeb W. (1996*), Taqqyeem manhaj al riyadiyat fil daffa al gharbiyya wa qitta' ghaza* (évaluation des programmes de mathématiques de la Cisjordanie et de la Bade de gaza), in Jarbawi A. et all., *A comprehensive plan for the development of the First Palestinian Curriculum for General education,* Palestinian Curriculum Development Centrer (PCDC), Rammalah, Palestine.

Dabeet L., Deeb W. (1996), *Manhaj al riyadiyat al muktarah lil madaress al falestiniya fil daffa al gharbiyya wa qitta' ghaza* (proposition de programmes de mathématique pour les écoles palestiniennes de la Cisjordanie et de la Bade de Gaza), in Jarbawi A. et all., *A comprehensive plan for the development of the First Palestinian Curriculum for General education,* Palestinian curriculum development centrer (PCDC), Rammalah, Palestine.

Dahan-Delmedico A., Peiffer J.(1986), *Une histoire des mathématiques. Routes et dédales*, Le Seuil, Paris.

Douady R. (1986), Jeux de cadres et dialectique outil/objet, *Recherches en Didactique des mathématiques* vol 7 n°2, 5-32.

Dubinski E. and Harel G. (1992), The nature of the process conception of function, *Mathematical Association of America (MAA)* vol 25, pp. 85-106,

Duval R. (1993), Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée, *Annales de Didactiques des Sciences Cognitives* n°5, 37-65.

Duval R. (1995), *Sémiosis et pensée humaine*, Peter Lang, Paris.

Duval R. et coll. (1998), Conversion et articulation entre représentations analogiques, *Séminaire, éd. Duval R, I.U.F.M. Nord-Pas de Calais.*

Even R. (1994), Subject-matter knowledge and pedagogical content knowledge : Prospective secondary teachers and the function concept, *Journal for research in mathematics education* vol 25 n°4, 95-115.

Funrighetti F., Somaglia A. (1994), Functions in algebraic and graphical environments, *Actes de la 46ème rencontre CIEAEM*, Toulouse, 298 - 255.

Guzman-Retamal I. (1989), Registres mis en jeu par la notion de fonctions, *Annales de didactique et de sciences cognitives* vol 2, 230 - 260.

Noguès M. (1993), *Le concept de fonction*, Mémoire de DEA soutenu à l'Université des Sciences et Techniques du Languedoc, Montpellier II.

Perrin-Glorian M.J. (1999b), Problèmes d'articulation de cadres théoriques : l'exemple du concept de milieu, *Recherches en didactique des mathématiques* vol 19 n°3, 279 - 321

Pihoué D. (1996), *L'entrée dans le mode de pensée fonctionnel en classe de seconde*, Mémoire de D.E.A soutenu à l'Université Paris 7, IREM de Paris 7.

René de Cotret S. (1988), Une étude sur les représentations graphiques du mouvement comme moyen d'accéder au concept de fonction ou de variable indépendante, *Petit x* n°17, 5-27.

Sierpinska A. (1992), On understanding the notion of function, *Mathematical Association of America (MAA)* vol 25, 25 - 58.

Sfard A. (1992), Operational origins of mathematical objects and the quandary of reification - The case of function, *Mathematical Association of America (MAA)* vol 25, 59 - 84.

Sfard A. (2000a), Symbolysing mathematical reality into being or how mathematical discourse and mathematical objects create each other, In P. Cobbs, E. Yackel, Kay McCclain (éd.), *Symbolising and commuticating : Perspectives on mathematical discourse, tools, and instructionnal design,* London : Erlbaum.

Tavignot P. (1993), Analyse du processus de la transposition didactique. Application à la symétrie orthogonale en sixième lors de la réforme de 1985, *Recherches en didactique des mathématiques* vol 13 n°3, 257-294.

Tavignot P. (1996), Macro-système de protocole dans le cadre théorique de la transposition didactique, *Actes des premières journées didactiques de La Fouly*, 77 - 96.

Thompson P. (1994), *Students, fonctions, and the undergraduate curriculum,* CBMS issues in mathematics education, volume 4, 21 - 43.

Vinner S. (1992), The function concept as a prototype for problems in mathematics learning, *Mathematical Association of America (MAA)* volume 25, 195 - 213.

Wilson M. R. (1994), One preservice secondary teacher's understanding of function : The impact of a course integrating mathematical content and pedagogy, *Journal for research in mathematics education*, vol 25 n°4, 347-369.

Youschkevitch A.P. (1976), The concept of function up to the middle of the 19th century, *Archive for history of exact sciences*, tome 16, 36 - 85, traduction française de Bellemin J-M (1981), *Fragments d'histoire des mathématiques*, Brochure A.P.M.E.P n°41, 7 - 68.

Manuels et programmes scolaires de mathématiques

Antibi A. et Barra R. (1993), *Math 1ère S*, collection Transmath, éd. Nathan, Paris

Coxford A., Payne J. (1990), *HBJ Algebra 2 with Trigonometry*, éd. Harcourt Brace Jovanovitch, Orlando, Florida.

Nakatani N. et al. (1994), *Dimathème 2e*, Les éditions Didier, Paris.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (1989), *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*, éd. NCTM, Reston.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (2000), Principles and standards for school mathematics, éd. NCTM, Reston.

Programme de mathématiques - Classe de Seconde. B.O n°20 - 17 mai 1990.

Programme de mathématiques des classes de Premières S, E et Terminales C, D, E. B.O spécial n° 2 - 2 mai 1991.

Programmes des lycées - Programmes de la classe de Seconde générale et technologique. B.O n°6 hors-série - 12 août 1999.

Programmes des lycées - Vol 5 : Classe de Première. B.O n°7 hors-série - 31 Août 2000.

Al 'izz H., Shawakef N., et all. (1996), *Al riyadiyat lil saf al 'asher* (Les mathématiques - classe de 10ème), Ministère de l'Education et de l'Enseignement pour la direction générale du livre et des publications éducatives, Rammalah, Palestine.

Al 'izz H., Shawakef N., et all. (1996), *Al riyadiyat lil saf al 'asher. Dalil al mu'alem* (Les mathématiques - classe de 10ème. Guide du maître), Ministère de l'Education et de l'Enseignement pour la direction générale du livre et des publications éducatives, Rammalah, Palestine.

Hadib H., 'Azzam M., et all. (1996), *Al riyadiyat lil saf al hadi 'ashar* (Les mathématiques - classe de 11ème), Ministère de l'Education et de l'Enseignement - Direction générale des programmes, Rammalah, Palestine.

Hadib H., 'Azzam M., et all. (1996), *Al riyadiyat lil saf al hadi 'ashar. Dalil al mu'allem* (Les mathématiques - classe de 11ème. Guide du maître), Ministère de l'Education et de l'Enseignement - Direction générale des programmes, Rammalah, Palestine.

Hadib H., 'Azzam M., et all. (1996), *Al riyadiyat lil saf al thani 'ashar* (Les mathématiques - classe de 12ème), Ministère de l'Education et de l'Enseignement - Direction générale des programmes, Rammalah, Palestine.

Hadib H., 'Azzam M., et all. (1996), *Al riyadiyat lil saf al hadi 'ashar. Dalil al mu'allem* (Les mathématiques - classe de 12ème. Guide du maître), Ministère de l'Education et de l'Enseignement - Direction générale des programmes, Rammalah, Palestine.

Samara 'A. (1997), *Al Jadid fil riyadiyat - Al tawjihi al 'ilmi* (le nouveau en mathématiques - l'examen de fin d'enseignement scolaire scientifique), questions et solutions de 1982 à 1997, éd. Al Nour-al-haditha, Jérusalem.

Bibliographie complémentaire

Artigue M. (1992), Functions from an algebraic and graphic point of view : cognitive difficulties and teaching practices, *Mathematical Association of America (MAA)* vol 25, 109 - 131.

Artigue M. (1993), Enseignement de l'analyse et fonctions de référence, *Repères-IREM*, vol n°11, 115 - 139.

Artigue M., Gontran E., (éd) (1992), *Proceedings of working group 3 on students difficulties in calculus*, ICME-7 Seventh international congress on mathematical education, Université Laval, Québec.

Boudiaf Rahal C. (1996), *Registres et changements de registres à propos de la notion de fonction en classe de seconde*, Mémoire de DEA soutenu à l'Université Paris 7, IREM de Paris 7.

Bourdieu P., Passeron J-C. (1987), *La reproduction. Eléments pour une théorie du système d'enseignement*, Ed. de Minuit, Paris.

Davis P., Hersh R. (1981), *The mathematical experience*, London: Penguin Books.

Douady R. (1994), Ingénierie didactique et évolution du rapport au savoir, *Repères-IREM*, n°15, 37 - 61.

Duroux A. (1983), La valeur absolue. Difficultés majeure pour une notion mineure, *Petit x* n°3, 43 - 67.

Foucault M. (1987), *Les mots et les choses. Une archéologie des sciences humaines*, 2ème éd., Ed. Gallimard, Paris.

Heid K. (1996), A technology-intensive functional approach to the emergence of algebraic thinking, in Bednarz N., Kieran C., et all. (éd.), *Approaches to algebra : perspectives for research and teaching, 239 - 255, Kluwer academic publishers.*

Huntley M-A., Rasmussen C., and all. (2000), Effects of standards based mathematics education : a study of the core-plus mathematics project algebra and function strand, *Journal for research in mathematics education*, vol 31 n°3, 328 - 361.

Janvier C. (1996), Modeling and the initiation into algebra, in Bednarz N., Kieran C., et all. (éd.), *Approaches to algebra : perspectives for research and teaching, 225 - 235, Kluwer academic publishers.*

Kleiner I. (1989), Evolution of the concept of function : A brief survey, *The college mathematics journal*, vol 20/4, 282 - 300.

Lê Thi H.C, (1997), *Etude didactique et épistémologique sur l'enseignement du vecteur dans deux institutions : la classe de dixième au Viêt-nam et la classe de seconde en France*, Thèse de doctorat, Université Joseph Fournier, Grenoble.

Perrin-Glorian M-J. (1993), Questions didactiques soulevées à partir de l'enseignement des mathématiques dans des classes "faibles", *Recherches en didactiques des mathématiques*, vol13/1.2, 5 - 118.

Pressiat A., (1999), *Aspects épistémologiques et didactiques de la liaison "points-vecteurs"*, Thèse de doctorat, Université de Paris 7.

Robert A. (1998), Quelques outils d'analyse épistémologique et didactique de connaissance mathématique à enseigner au lycée et à l'université, *Actes de la IXème Ecole d'Eté de didactique des mathématiques de Houlgate*, 192 - 212.

Sfard A. (2000b), Steering (dis)course between methaphors and rigor : using focal analysis to investigate an emergence of mathematical objetcs, *Journal for research in mathematics education,* vol. 31 n°3, 296 - 327.

Von Glaserfeld E. (1995), Radical constructivism: A way of knowing and learning, *Studies in mathematics education*, series : 6, London : Falmer Press,129 -145.

Von Glaserfeld E. (1991), Radical constructivism in mathematics education, Kluwer academic publishers.

ANNEXES

Sommaire

ANNEXES DU CHAPITRE II

Tâches et techniques

1. Tâche de Représentation de fonction

1.1 Cas des ensembles finis
a) Si le registre de départ et le registre d'arrivée sont un diagramme sagittal, un tableau de valeurs, un ensemble de couples ordonnés ou un graphique:
Remarquons que ces registres peuvent aussi bien s'adresser à des fonctions numériques qu'à des fonctions non numériques. Ces registres étant congruents, la technique est identique pour une conversion de registre ou une autre. Il faut, en première étape, distinguer dans le registre de départ, le domaine de définition et ses éléments, le but et ses éléments ainsi que tous les couples d'éléments en relation fonctionnelle, puis les convertir vers le registre d'arrivée. Par exemple, pour dresser le tableau de valeurs d'une fonction exprimée sous forme de diagramme sagittal, il faut diviser les deux lignes du tableau en autant de cases qu'il y a de flèches, puis considérer séparément chacune des flèches, enfin inscrire l'élément à l'origine de la flèche dans une case de la première ligne du tableau, et l'élément à l'extrémité de la flèche dans la case correspondante de la deuxième ligne. En second exemple, pour représenter sous forme graphique, une fonction donnée sous forme d'une liste de couples ordonnés, il faut considérer séparément chacun des couples, puis représenter chaque couple par une croix dont le premier terme du couple est l'abscisse de la croix et, le second terme, l'ordonnée, dans le repère choisi.

b) Si le registre de départ est algébrique et le registre d'arrivée est le diagramme sagittal, le tableau de valeurs, le graphique ou l'ensemble de couples ordonnés
La fonction est donnée par son expression algébrique et l'ensemble de départ est précisé sous forme symbolique, ensembliste ou verbale. Chaque valeur du domaine de définition doit être substituée à x dans l'expression algébrique de la fonction, afin de calculer son image. Il s'agit d'ailleurs de la technique relative à la tâche de "détermination d'une image" dans le registre algébrique (voir ci-dessus). Chaque couple, ainsi obtenu, composé d'un élément du domaine de définition et de son image, est ensuite représenté de façon appropriée dans le registre d'arrivée.

1.2 Cas des ensembles infinis - Représentation du graphique d'une fonction à partir de son tableau de variation

Il faut lire la ligne des valeurs de x et celle des variations de f du tableau de variation. La première ligne donne les valeurs significatives pour la fonction : les bornes de l'intervalle d'étude, les valeurs où la fonction n'est pas définie, celles où elle admet un extremum, celles correspondant aux asymptotes, celles correspondant à une concavité particulière. Ces valeurs donnent des points ou des droites particulières (asymptote horizontale ou verticale) qui sont ensuite reportées dans le graphe de la fonction ou qui vont permettre d'améliorer le tracé du graphique (concavité). En dernière étape un tracé possible de fonction est réalisé en respectant les intervalles de monotonie de la fonction, une courbe ascendante (resp. descendante) entre deux points consécutifs où la fonction est croissante (resp. décroissante).

2. Tâches concernant les propriétés ensemblistes de la fonction. Cas des ensembles finis

2.1 Discrimination relation/fonction
- Si la relation est représentée sous forme de diagramme sagittal
La technique est de vérifier qu'il n'y a pas d'élément du domaine de définition qui soit l'origine de deux flèches ou, si au contraire la relation n'est pas une fonction, il faut exhiber deux telles flèches.
- Si la relation est représentée sous forme de tableau de valeurs
La technique est de s'assurer qu'il n'y a pas, dans la première ligne du tableau, de valeur reproduite deux fois ou, au contraire de relever une telle valeur ainsi que ses images distinctes.
- Si la relation est représentée sous forme de graphique
La technique est de s'assurer qu'il n'y a pas deux croix distinctes de même abscisse ou, au contraire, de les relever.
- Si la relation est représentée sous forme d'un ensemble de couples ordonnés
La technique est de s'assurer qu'il n'y a pas deux couples de même premier terme et de seconds termes différents ou, au contraire, de relever deux tels couples.
- Si la relation est donnée sous forme algébrique

La technique numérique relative à ce registre consiste à obtenir par calcul l'image de chacun des éléments de l'ensemble de départ. La seconde partie consiste à vérifier qu'il n'existe pas d'élément ayant deux images distinctes. Bien sûr cette technique n'est valable que si la fonction est donnée sous la forme f(x,y) = 0, puisque la question ne se pose pas dans le cas où elle est exprimée sous la forme y = f(x).

2.2 Discrimination (application/application injective).

- Si la fonction est représentée sous forme de diagramme sagittal
La technique est de vérifier qu'il n'y a pas d'élément de l'ensemble d'arrivée qui soit l'extrémité de deux flèches ou, si au contraire l'application n'est pas injective, il faut exhiber un tel élément et ses antécédents distincts.
- Si la fonction est représentée sous forme de tableau de valeurs
La technique est de s'assurer qu'il n'y a pas, dans la deuxième ligne du tableau, de valeur reproduite deux fois ou, au contraire, de relever une telle valeur ainsi que ses antécédents distincts.
- Si la fonction est représentée sous forme de graphique
La technique est de s'assurer qu'il n'y a pas deux croix distinctes de même ordonnée ou, au contraire, de relever deux telles croix.
- Si la fonction est représentée sous forme d'un ensemble de couples ordonnés
La technique est de s'assurer qu'il n'y a pas deux couples de même second terme et de premiers termes différents ou, au contraire, de relever deux tels couples.
- Si la fonction est donnée sous forme algébrique:
Il faut comme pour la tâche de discrimination relation/fonction obtenir par calcul numérique, dans un premier temps, l'image de chacun des éléments de l'ensemble de départ. Puis vérifier qu'il n'existe pas (ou au contraire qu'il existe) deux éléments distincts ayant une même image.

3. Opérations algébriques sur les fonctions

3.1 cas des ensembles finis
- Si les fonctions sont représentées dans les registres de diagramme sagittal, ensemble de couples ordonnés, tableau de valeurs, graphique
La technique consiste à considérer chaque élément x appartenant à la fois au domaine de définition de f et au domaine de définition de g, à lire son image par f et son image par g, puis à calculer la somme des deux images. L'image de x par la fonction somme (f+g)(x) est ainsi obtenue, il faut ensuite représenter chaque élément du domaine de (f+g) et son image dans le registre correspondant, soit selon le cas, les placer dans deux diagrammes de Venn différents et les relier par une flèche, les représenter par un couple ordonné, les placer dans deux cases superposées, ou sur l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées d'un graphe et placer le point marquant la relation. Ces étapes doivent être répétées pour chacun des éléments du domaine de définition de la somme.
- Si le registre est algébrique
Cette technique numérique consiste, pour chaque élément "a" du domaine de définition de f et de g, à déterminer, dans un premier temps, son image "f(a)" par la fonction f et son image "g(a)" par la fonction g. Puis, dans un deuxième temps, à calculer "f(a) + g(a)", soit l'image de a par la fonction somme. Mais la fonction résultante se trouve exprimée dans un nouveau registre : la liste constituée de chaque élément et de son image par la fonction somme.
Une deuxième technique algébrique est évidemment possible, dans le cas de ce registre, qui consiste à établir l'expression algébrique de la fonction somme fg, puis à préciser le domaine de définition (l'intersection des domaines de f et de g).

3.2 Cas des ensembles infinis
- registre graphique - technique "point par point"
Deux techniques sont disponibles :
. *La première technique* est l'adaptation de la technique du registre graphique pou le cas des ensembles finis. Il faut lire pour chaque valeur de x choisie, son image par chacune des deux fonctions f et g, puis calculer la somme des images pour obtenir celle de x par la fonction h. Il reste à représenter le point (x, h(x)). Un maximum de points assure un meilleur tracé.
. *La seconde technique* est de déterminer, en première sous-tâche, à partir des graphiques les intervalles de monotonie de f et de g (voir tâche de détermination des variations d'une fonction donnée dans le registre graphique). La seconde sous-tâche est de déduire, quand cela est possible, les intervalles de monotonie de la fonction somme par application du théorème donnant les variations de la fonction résultant de la somme de deux fonctions dont on connaît les variations (voir également la tâche de détermination des variations d'une fonction donnée algébriquement par la deuxième technique). Pour un tracé plus précis il est également possible d'obtenir quelques points de la courbe de la fonction somme par la première technique. Cette deuxième technique a

l'avantage, par rapport à la technique "point par point" de mieux aider à l'appréhension de la fonction en tant qu'objet puisque les fonctions y sont manipulées globalement.
C'est plus compliqué pour le produit parce qu'il faut aussi tenir compte du signe : quand on multiplie une inégalité par un nombre négatif, cela change l'inégalité. Ainsi, si le produit de deux fonctions croissantes (décroissantes) et positives est croissante et positive, le reste est plus compliqué. Par exemple si elles sont toutes deux croissantes et négatives, le produit sera une fonction décroissante et positive mais il y a beaucoup de cas où l'on ne pourra rien dire.

- registre algébrique

La technique consiste à déterminer l'expression algébrique de la fonction somme (f+g) en additionnant les expressions algébriques de f(x) et g(x). Le traitement relève ensuite du calcul littéral qui se termine par la production de la fonction somme en une expression algébrique de préférence réduite et ordonnée. Notons que l'expression algébrique de la fonction somme peut être donnée sans se soucier au préalable de son domaine de définition. On terminera en précisant que celui-ci est l'intersection des domaines de f et g.

- registre verbal

Les fonctions concernées sont donc des situations fonctionnelles. Le contexte de l'économie est un des principaux cadres d'origine où une telle tâche peut-être demandée. Il s'agira, par exemple, de déterminer *la fonction coût de revient* les fonctions *prix de vente* et *coût de production* étant données au préalable. Ici, l'opération de fonction est une tâche implicite et la technique repose sur une conversion du registre verbal vers le registre algébrique.

La définition de la fonction somme: "La somme de deux fonctions, f et g, définies respectivement sur le même domaine de définition est la fonction somme f+g qui a tout x appartenant du domaine fait correspondre (f+g)(x) tel que (f+g)(x) = f(x) +g(x)" est la technologie justifiant toutes ces techniques. L'une des deux techniques du registre graphique pour les ensembles infinis se justifie également par le théorème donnant les variations d'une fonction résultant d'une somme de fonctions.

4. Technique relatives aux tâches de composition de fonctions et de détermination de la réciproque

4.1. Composition de deux fonctions

Cas des ensembles finis. Si g et f sont représentées dans les registres du tableau de valeurs, du graphique, de l'ensemble de couples ordonnés et du diagramme sagittal

La technique est, dans un premier temps, de prendre chaque élément x du domaine de définition de f, de lire son image f(x) par la fonction f, de s'assurer que f(x) est élément du domaine de définition de la fonction g et de lire alors son image g(f(x)) par la fonction f. Il faut, dans un deuxième temps, représenter x et son image g(f(x)) dans le registre de représentation de la fonction composée, soit selon le cas : par deux cases superposées du tableau de valeurs avec x dans la première ligne et g(f(x)) dans la deuxième, par une croix ayant x pour abscisse et g(f(x)) pour ordonnée dans un repère, par un couple de premier terme x et de second terme g(f(x)), par une flèche ayant x pour origine et g(f(x)) pour extrémité.

.Cas des ensembles infinis

- Registre graphique

a)Technique "point par point" : Elle consiste, en première étape, à choisir un point de la courbe de f à lire son abscisse x et son ordonnée f(x); à s'assurer en seconde étape, que f(x) est bien l'abscisse d'un point de la courbe g dont il faut lire l'ordonnée qui est g(f(x)). Le point (x, g(f(x))) appartient à la courbe de la fonction composée. Un maximum de points ainsi obtenus assure un tracé plus précis.

-registre verbal

Nous avons relevé l'unique tel exemple du manuel palestinien de la classe de 2nde : Soit la fonction qui "au poids d'un enfant à la naissance, fait correspondre le poids de son cerveau à la naissance" et soit la fonction "qui au poids du cerveau d'un enfant à la naissance fait correspondre le poids de son cerveau à l'âge de x ans". La composition de la seconde par la première est la fonction qui "au poids d'un enfant à sa naissance fait correspondre le poids de son cerveau à x ans".

4.2 Recherche de réciproque - Cas des ensembles finis

- Si la fonction est représentée dans les registres du tableau de valeurs, du graphique, de l'ensemble de couples ordonnés et du diagramme sagittal

Dans le cas où la fonction est bijective, il faut considérer chaque élément du domaine de définition et son image, puis inverser image et antécédent. Le domaine de définition (resp. le but) de la fonction de départ devient le but (resp. le domaine de définition) de sa réciproque. Ainsi, selon le registre de représentation, la première et la

deuxième ligne du tableau de valeurs, l'abscisse et l'ordonnée de chaque croix du repère, le premier et le second terme de chaque couple de l'ensemble de couples, l'origine et l'extrémité de chaque flèche du diagramme sagittal se trouvent inversés.
- Si la fonction est représentée dans le registre algébrique - technique spécifique du cas des ensembles finis
Cette technique numérique consiste à calculer, en première partie, l'image de chaque élément du domaine de définition de la fonction. La fonction est alors représentée sous la forme d'une liste "f(a) = b". Si l'on obtient une nction bijective, la deuxième partie est d'établir la réciproque en inversant chaque élément du domaine et son image. La fonction réciproque n'est pas représentée dans le registre algébrique.
- registre verbal : Si f est la fonction est *le prix à payer pour une certaine quantité d'oranges achetées*, la réciproque est *la quantité d'oranges achetées pour un certain prix.*

5. Techniques relatives aux tâches de variation et d'extremum

5.1 Variations de fonction/registre graphique ou du tableau de variation
Ces deux registres présentent une technique de lecture similaire aussi nous nous contentons de présenter la technique relative au registre graphique. Celle-ci consiste à décrire les variations de la fonction. La représentation graphique d'une fonction se lit de gauche à droite: Si la courbe est ascendante (resp. descendante) sur un intervalle, la fonction est croissante (resp. décroissante) sur cet intervalle. Une fois, les portions de courbe où la fonction est monotone, repérées, il suffit de lire sur le graphique les abscisses des points des extrémités de ces portions afin d'obtenir les intervalles de monotonie.
La technologie qui justifie cette technique est constituée des définitions de fonction croissante, décroissante, et monotone ainsi que de la définition d'image d'un élément.

5.2 Détermination des extremums d'une fonction - Registre graphique ou du tableau de variation
Pour la représentation graphique, il faut repérer les changements de variation sur le graphique, soit les points où la courbe est ascendante avant et descendante après pour un maximum ou, inversement pour un minimum.
L'abscisse de chacun de ces points est la valeur pour laquelle la fonction admet un extremum et l'ordonnée de chacun de ces points est l'extremum recherché.
Pour le tableau de variation, la technique est similaire cependant comme les extremums peuvent ne pas être précisés, il faut les déterminer numériquement, ce qui correspond à la tâche de détermination d'images dans le registre algébrique.
La technologie de cette technique est la définition d'extremum et le théorème selon lequel une fonction admet un extremum en une valeur si elle change de sens de variation en cette valeur.
Précisons pour terminer, que les différentes techniques justifiant la tâche de détermination d'un extremum relatif restent valables pour la tâche de détermination d'un extremum absolu si la fonction est définie sur un intervalle. Il faut alors déterminer tous les extremum relatifs ainsi que les images des valeurs de la fonctions aux bornes de l'intervalle, puis retenir comme extremum absolu, la valeur extrémale parmi toutes celles calculées.

6. Techniques relatives aux tâches du cadre géométrique

6.1 Techniques relatives aux tâches de parité et de périodicité
a) Techniques relatives aux tâches de parité-1 et périodicité-1
- Si le registre est graphique,
. Pour montrer qu'une fonction f est paire (resp. impaire) la technique est de vérifier que sa courbe Cf est symétrique par rapport à l'axe (Ox) (resp. à l'origine O du repère).
. Pour montrer qu'une fonction f est périodique la technique consiste à vérifier que la courbe Cf se reproduit identique à elle-même à intervalles réguliers de x, c'est-à-dire invariante par translation d'un vecteur colinéaire avec Ox, et à relever éventuellement cet intervalle qui correspond à la période.
- Si le registre est algébrique,
. Pour montrer qu'une fonction est paire (resp. impaire), la technique consiste premièrement à vérifier que si x appartient au domaine de définition, son opposé -x appartient également au domaine de définition et deuxièmement, à établir l'expression de f(-x) (en substituant -x à la variable x dans l'expression de f(x)), puis à traiter l'expression algébrique résultante de manière à obtenir f(x) (resp. -f(x)).
. Pour montrer qu'une fonction est périodique (de période T), la technique consiste à établir l'expression algébrique f(x + T), puis à traiter cette expression pour monter que "f(x + T) = f(x)" de façon à obtenir f(x).

b) Techniques relative aux tâches de parité-2 et périodicité-2
- Si le registre est graphique : la technique est de compléter le graphique de la fonction en traçant le symétrique de la courbe relativement à l'axe (Oy), ou au point "O" selon que la fonction est paire ou impaire. Si la fonction est périodique, il faut la reproduire identique à elle-même sur chaque intervalle de longueur égale à une période.

- Si le registre est le tableau de variation : Pour compléter le tableau de variation, il faut si la fonction est paire, représenter une flèche indiquant un sens de variation contraire à celui de l'intervalle connu correspondant, sur chaque intervalle où la fonction est monotone. Si elle est impaire la flèche indique, par contre, le même sens de variation. Si la fonction est périodique, la partie du tableau correspondant aux variations de f et aux valeurs de f(x) doit être reproduite de façon identique sur chaque intervalle de longueur égale à une période. Seules les valeurs de x changent par addition d'une période pour chaque valeur critique de x.
- Si la tâche est l'étude des variations de la fonction (ce qui nous ramène au registre algébrique), la technique est similaire à celle du tableau de variation : sens de variation contraire pour une fonction paire, même sens de variation pour une fonction impaire, même sens de variation sur chaque intervalle de longueur égale à une période.

6.2 Techniques relatives aux tâches de changement de repère
a) Technique de changement d'origine relative à la tâche de mise en évidence d'un axe ou d'un centre de symétrie dans le registre graphique
Elle se décompose en trois étapes principales. La première est la conjecture de l'axe ou du centre de symétrie. Comme la fonction est donnée dans le registre graphique, il s'agit de remarquer à partir du graphique l'existence éventuelle d'un axe de symétrie ((oY) parallèle à (oy)) ou d'un centre de symétrie (o') autre que l'origine (o) du repère. Cette conjecture faite dans le registre graphique reste à prouver dans le registre algébrique. Les éléments de symétrie établis à partir de la représentation graphique de la fonction marquent l'entrée dans le cadre géométrique.
La deuxième étape consiste à établir les formules de changement de repère permettant de passer de l'ancien au nouveau repère. Le nouveau repère est (o, x, Y) si le graphe de la fonction admet un axe de symétrie, et (o', X, Y) (avec (o'X) et (o'Y) respectivement parallèles à (ox) et (oy)) si le graphe de la fonction admet un centre de symétrie. Les formules de changements de repère sont les équations donnant X en fonction de x et Y en fonction de y. Cette deuxième étape est une conversion du registre graphique vers le registre algébrique, elle s'opère dans le cadre géométrique; la technique relative à cette sous-tâche est une technique de géométrie analytique.
La troisième étape de cette technique, se réalise entièrement dans le registre algébrique. Il faut d'abord, transformer l'équation de la fonction donnée par les variables x et y, en une équation donnée par les variables X et Y. Il s'agit ainsi de réaliser un changement de variables. L'équation de la fonction est alors établie relativement au nouveau repère et marque le retour dans le cadre fonctionnel. Il faut alors montrer que la fonction est paire (resp. impaire) relativement à ce nouveau repère pour prouver qu'elle admet un axe de symétrie (resp. un centre de symétrie), ce qui nous ramène à la tâche de parité.
Nous avons présenté, ici, une des techniques de changement d'origine. Il en existe au moins une autre dans l'enseignement secondaire mais celle-ci reste néanmoins la plus fréquemment utilisée.

b) Technique de changement d'origine relative à la tâche de réécriture de l'équation algébrique de la fonction
Elle consiste à réécrire l'équation de la fonction de façon à mettre en évidence les coordonnées de l'origine d'un nouveau repère dans lequel la fonction a pour équation celle d'une fonction de référence bien connue. Exemple: "Montrer que $x^2 + 7x + 12$ peut s'écrire sous la forme $(x + a)^2 + b$", met en évidence le point (-a; b) comme origine à choisir du nouveau repère dans lequel l'équation de la fonction devient "$y = x^2$". Dans la pratique cependant, cette technique ne peut s'appliquer qu'à un nombre limité de fonctions, nous le verrons dans l'analyse des tâches/techniques. Cette tâche de réécriture a bien sûr pour objectif principal de faciliter, par la suite, l'étude de la fonction, en particulier sa représentation graphique qui peut être réalisée *de mémoire* dans le nouveau repère.
Cette technique de changement d'origine se justifie par les définitions géométriques de symétrie par rapport à une droite et par rapport à un point, par le concept de variable dépendante et indépendante, ainsi que par la technologie qui justifie les tâches de parité, auxquelles il faut rajouter les propriétés géométriques (graphiques) partagées par certaines fonctions d'une même classe, par exemple la classe des fonctions du second degré ou des fonctions rationnelles.

7. Technique relative à la tâche d'existence de solution à une équation de type f(x) = c et éventuellement à la détermination d'une solution approchée
La première sous-tâche est justement l'étude des variations de la fonction sur l'intervalle donné (voir techniques/technologie relatives à la détermination des variations d'une fonction dans les registres algébrique, graphique et du tableau de variation). Aussi peut-on considérer qu'il y a trois techniques, une par registre, algébrique, graphique ou du tableau de variation.
La seconde sous-tâche tous registres confondus, est de diviser l'intervalle, en autant d'intervalles I où la fonction est monotone. Puisqu'elle réalise une bijection sur chacun d'eux, il faut déterminer leur image f(I). Puis s'assurer, pour chaque intervalle f(I), si oui ou non c appartient à f(I). Sur chaque f(I) contenant c, la fonction a une

solution unique, qu'il reste éventuellement à déterminer approximativement par une technique algébrique (y compris dans le cas d'un tableau de variation) ou une lecture graphique ; la calculatrice peut servir d'aide à la réalisation de cette dernière sous-tâche.
S'il s'agit seulement de déterminer le nombre de solutions et que l'on travaille dans le registre graphique, il suffit de compter le nombre de points d'intersection de la courbe avec la droite horizontale $y = c$. La technologie relative à ces techniques est donc outre la technologie relative à la lecture graphique et à la tâche de détermination des variations d'une fonction, la définition d'image et le théorème mettant en relation les variations et la propriété de bijection d'une fonction.

ANNEXES DU CHAPITRE III

1 - Tableaux des tâches et techniques du manuel de Seconde

a - chapitre 1 : "Vers la notion de fonction"

Place dans le manuel		Type de fonction	Type de tâche	Technique(s) Attendu(es)	Initiative laissée à l'élève	Remarques
Activités	1	Sit fonc (reg verbal/symbolique et graphique)	*Rep de fonc *Image (Ret sit fonc) *Antécédent (Ret sit fonct) *Equation *autre lecture graphique	Graph > Tval Graph Graph graph	Demandé Demandé Demandé demandé	Modélisation complètement réalisé par le texte
	2	Sit fonc (reg verbal et graphique)	*Image/Ant (Ret sit fonc) *Autre lecture graphique *Min/max (Ret sit fonct) *Variation (Ret sit fonct) *Rep Fonc	Graph Graph Graph Graph> Tvar	Demandé Demandé Demandé Demandé	modélisation à la charge de l'énoncé.
	3	Sit fonc (Reg verbal et tableau de valeur)	*Tâche graph *Rep de fonc *Image/Ant (Ret sit fonc) *Variation (Ret sit fonc)	Tval > Graph *(tech pt par pt)* Graph Graph	Demandé Demandé Demandé	=placer les points du Tval. modélisation à la charge de l'énoncé.
Exercices	1	Reg Graph	*Image *Antécédent *Extremum	Graph Graph Graph	Par contrat Par contrat Par contrat	
	2	Reg Graph	*Variation *Rep de fonc	Graph Graph > Tvar	demandé Par contrat	
T. P	1	Fonc affine et Fonc carrée	*Rep de fonc	Alg > Prog Prog > Tval	Demandé	
	2	Fonc affine, Fonc 2^{nd} degré Fonc 1/x	*Rep de fonc *Rep de fonc *Autre tâche de variation	Alg > Prog Prog > Tval Tval > Graph (tech pt par pt)	Demandé demandé	(seulement sur l'intervalle [1; 2] Tâche de réflexion sur les variations.
	3	Sit fonc (Reg verbal et graphique)	*Rep de fonc *Rep de fonc *Autres tâches graphique	Sit fonc> Graph Graph>Sit fonc	Demandé demandé	Association (dont Ret Sit fonc)

Place dans le manuel		Type de fonction	Type de tâche	Technique(s) Attendu(es)	Initiative laissée à l'élève	Remarques
T.P	4	Sit fonc (Reg verbal/symb)	*Rep de fonc *Rep de fonc *Extremum	Sit fonc >Graph Sit fonc>Tval Tval>graph Grap	Demandé Demandé Demandé	1ère estimation de l'allure de la courbe. 2ème estimation de l'allure de la courbe.
Exercices	1	Reg graph	*Rel/fonc	Graph		
	2	Reg graph	*Image *Ant *Ant part	Graph Graph Graph		
	3	Sit fonc (reg verbal/symb)	10 Image (Ret Sit Init) *Exp de fonc *Rep de fonc *Image, Ant *Rep de fonc	Tech num ou tech alg Sit fonc>Alg Alg > Tval Tech alg ou num Alg > Graph	Au choix demandé demandé au choix Possible:fonc affine	Tech alg = modélisation. =Modélisation
	4	Reg Graph	*Variation	Graph >verbal	demandé	
	5	Sit fonc 2 fonc f et g, reg verbal et graphique de f	*Rep de fonc *Variation	Sit fonc> Graph Graph	demandé par contrat	+interprétation (Ret Sit Init)
	6	Reg graph	*Rep de fonc	Graph > Tvar	Par contrat	+reflexion sur tableau de var (unicité de la fonction pour un Tvar)
	7	Reg tvar	*Rep de fonc	Tvar > Graph	demandé	Donner plusieurs possibilités
	8	Reg Tvar	*Image/Ant	Tvar	Par contrat	
	9	Tvar et graph	*Rep de fonc	Tvar > Graph	demandé	association
	10 et 11	Reg Tvar	*signe	Tvar	demandé	
	12	Reg graph	*Extremum	Graph	Par contrat	
	13 et 14	Reg graph	*Image, Ant *Rep de fonc *Extremum	Graph Graph>Tvar Graph ou Tvar	Par contrat Par contrat Au choi	
	15 et 16	Fonc degré 3, fonc degré 2	*Rep de fonc *Rep de fonc *Rep de fonc *Extremum	Alg > Prog Prog > Tval Tval > Graph (tech pt par pt) Graph > Tvar Graph	demandé demandé par contrat demandé	choix du tableau de val pour la 2ème fonction
	17	Sit fonc	*Exp de fonc (f1) *Exp de fonc (f2) *Equation	Sit fonc > Alg Alg > Graph Sit fonc > Alg Alg > Graph Graph/Alg /Géométriq.	Demandé Demandé Demandé (3 techniques)	=Modélisation =Modélisation Ret sit initiale

Place dans le manuel		Type de fonction	Type de tâche	Technique(s) Attendu(es)	Initiative laissée à l'élève	Remarques
	18	Sit fonc (cadre géom)	*Exp de fonc (f1 et f2) *Ret sit init. (comparaison des fonc) *Rep de fonc (f1 et f2) *Equation	Sit fonc > Alg Alg ou géom Alg > Graph Graph/Alg /Géométriq.	demandé Choix possible Contrat Demandé (3 techniques)	=Modélisation Possible, fonc affine. Ret sit initiale
	19	Reg verbal/ symb	*Autre tâche (variation)	Reg verbal/ symb (aide du reg graph)	Verbal/symb ou interraction avec graphique	Réflexion sur la déf de variation
	20 à 22	Reg Graph	*Variation *Extremum	Graph Graph	Demandé Demandé	
	23 à 28 et 30 à 32	Reg verbal/ symb	*Rep de fonc	Reg verbal/ Symb > Graph	Interraction verbal/symb et graphique.	Information données sur Dom de déf/ Ant/Image/ Extr/Var/signe / bornée (Tâche Inhabituelle/ non vue en cours)
	29	Reg verbal/ Symb	*Rep de fonc	Reg verbal/ Symb > graph	Interraction verbal/symb et graphique.	Réflexion sur variation
Exercices	34	Sit fonc (cadre géom) Alg présent	*Exp de fonc (f1) *Exp de fonc (f2) *Addition *Comparaions (cas d'égalité) *Rep de fonc *Addition *Comparaion	Sit fonc > Alg Sit fonc > Alg Reg Alg + interpret. Géométrique Alg (ou géom) Alg > Graph *(tech de fonc affine)* Reg Graph Reg Graph	Par contrat Par contrat demandé Alg (géom peu probable) Par contrat Demandé Demandé	=Modélisation Modélisation Ret sit initiale (ap. Reg alg) (ap.reg alg)
	35	Sit fonc Alg présent	*Exp de fonc *Rep de fonc *Equation	Sit fonc > Alg Alg > Graph Graph	Par contrat, s'agissant d'une fonction affine par int .	=Modélisation Fonc aff par morçeaux
	36	Sit fonc (3 fonc)	*Image *Modélisation *Rep de fonc *Comparaison	Sit fonc (tech num) Sit fonc> Graph Graph > Tvar Graph et géométrique	Par contrat Demandé Demandé 2 techiques demandées	Association courbes/sit fonc géom=Ret Sit initiale

Place dans le manuel		Type de fonction	Type de tâche	Technique(s) Attendu(es)	Initiative laissée à l'élève	Remarques
Problèmes	37	Sit fonc	*Variation *Maximum		Technique graphique, numérique, …	Problème ouvert
	38	Sit fonc	*Modélisation	Sit fonc >Graph		Association Problème ouvert

b - chapitre 4 : "Fonctions affines"

Place dans le chapitre		Type de fonctions	Tâches	Technique(s) attendue(s)	Initiative laissée à l'élève	Remarques
Activités	1	Situations fonctionnelles (x5)	*Expres fonc *classe de fonction	sit fonc > alg Alg	Par contrat Par contrat	=Modélisation reconnaître les fonc affine
	2	Situation fonctionnelle	*Rep de fonc *Image *Rep de fonc *Express fonc *Réciproque *Comparaison	sit fonc>Tval sit fonc Tval > Graph Graph > Alg Reg Alg Reg Alg	 Demandée Demandée Contrat Reg Graph possible au préalable.	Fonct affine sous-entendu. Fonction maintenant dite affine. =Modélisation Ret sit Initiale Ret sit Initiale
Ex. rédigé	5	Fonc affine par intervalles	*Rep de fonc	Alg > Graph	Par contrat	Sous-tâche de calcul des images de valeurs particulières précisée
T. P	2	A) fonction 1 (Sit fonc + graphique) B) fonction 2 (sit fonc) C) fonc 3 (sit fonc)	*Exp fonc *Antécédent *Rep de fonc *Comparaison *Exp fonc *Rep de fonc *Exp fonc *Comparaison de fonction (cas d'égalité)	Sit fonc +graphique> Alg (tech de fonc affine) Reg graph Sit fonc >Graph Reg Grah Graph > alg Sit fonc > Graph Graph > Alg Reg graph puis Reg Alg	Par contrat demandé demandé demandé demandé par contrat par contrat demandé	Modélisation (le graphique montre que la fonction est affine) Ret sit initiale Fonc. affine sous-entendue (2 points sont donnés) Fonc. affine sous-entendu. =Modélisation Ret Sit initiale

Place dans le chapitre		Type de fonctions	Tâches	Technique(s) attendue(s)	Initiative laissée à l'élève	Remarques
TP	3	Situation fonctionnelle 1ère Fonction (affine par intervalle)) 2ème fonction (affine par intervalles) 3ème fonction (affine par intervalle)	 *Rep de fonc1 *Image *Rep de fonc2 *Exp de fonc2 *Exp de fonc3 *Travaux alg	 Sit fonc>graph (tech num) Sit fonc Sit fonc>Tval > Graph Graph > Alg Sit fonc > Alg Réécr. alg	 Par contrat Tech num demandée Demandé demandé demandé	 Fonc. affine par interv sous-entendu. Ret sit initiale. Fonc. affine par interv sous-entendu. =Modélisation =Modélisation
	4	T.P	*Variation *travaux algébriques (inégalité)	Tech de déf Tech variation de fonction affine en tant qu'outil	Demandé demandé	Déms des var d'une fonction affine (avec aide)
	5	a) fonc données par un Tvar b) fonc affine (cas particulier) a) fonc affine (cas général)	*reconnaître fonc affine *signe de fonc *signe de fonc *Signe de fonc	Tvar Tvar -Rep de fonc (alg>Tvar) - Signe (Tvar) -Variation (tech relative à la classe des fonc affine) -Equation "f(x)=0" -Rep de fonc (alg>Tvar) -Signe (Tvar)	Demandé Par contrat demandée demandée	 (d'abord pour a > 0 puis pour a < 0)
Exercices	1 et 2	Diverses fonctions (affines et autres)	*Reconnaître fonc affine *Tâche graphique	Reg Alg	Par contrat	
	3 et 4	Diverses courbes	*Reconnaître fonc affine	Reg graph	Par contrat	
	5 et 6	Fonc affine	*Image *équation	Reg alg Reg alg	Par contrat Par contrat	
	7	Fonc affine	*comparaison de fonction (cas d'égalité)	Reg alg (tech d'éq)	demandée	
	8 à 13	Fonction affine	*Exp de fonc	Verbal/symb > Alg	Par contrat	

Place dans le chapitre		Type de fonctions	Tâches	Technique(s) attendue(s)	Initiative laissée à l'élève	Remarques
Exercices	14 et 15	Fonction affine	*Rep de fonc *Image/Ant	Tval > Alg >Tval Tval	Par contrat Par contrat	Remplir un Tval sachant que la fonction est affine
	19	Fonction affine	*Variation	Reg alg	Par contrat (Tech de déf: var de fonc affine)	
	20 à 22	Fonction affine Fonctions données ds le reg verbal/symb	*Variation	*Tech 1: -variation par techn de la déf des var de fonc affine ou Tech 2: -Rep de fonc (verbal/symb > Graph), -Variation (Reg Graph)	technique 1 attendue; recours au registre graphique non automatique.	
	24	Fonction affine	*Rep de fonc	Alg > Graph	Par contrat	
	40	Fonction affine (reg graph)	*Signe de la fonction	Reg graph	Par contrat	
	41 à 43	Fonction affine	*Eq "f(x) = 0" *Rep de fonc *Signe de la fonction	Reg alg Alg > Tvar (tech de la déf) Reg Tvar	Par contrat demandé demandé	Les deux première tâches sont des sous-tâches de la 3è.
	69	Fonc affine	*Image/anté	Sit fonc (tech numérique)	Contrat	Ret sit initiale
Exercices	70	Fonction affine - situation fonctionnelle	*Image/Ant *Exp fonc *Rep de fonc *Comparaison de fonctions	Sit fonc (*tech numérique*) Sit fonc>Alg Alg > Graph Reg graph	Contrat Demandé Contrat demandé	Ret sit initiale =Modélisation Ret sit initiale
	71	Fonction affine - situation fonctionnelle	*Dom de déf *Exp de fonc *Antécédent *Comparaison de fonctions (cas d'égalité)	Sit fonc Sit fonc > Alg Reg Alg Reg Alg	demandé Demandé demandé	Ret sit initiale =Modélisation Ret sit initiale Ret sit initiale
	73	Fonction affine - situation fonctionnelle	*Rec de fonc (*Exp de fonc) *Image	Reg alg (Verb/symb > Alg) Reg alg	Contrat	fonc avec paramètres.

Place dans le chapitre		Type de fonctions	Tâches	Technique(s) attendue(s)	Initiative laissée à l'élève	Remarques
Exercices	77	Fonct affine par intervalle	*Image *Rep de fonc	Reg alg Alg >Graph	Demandé Demandé	Images pour aider graph
	78	Fonct affine par intervalle	*Rep de fonc *Inéquations	Alg > graph Reg Graph	Demandé demandé	
	79	Fonct affine par intervalle	*Rep de fonc *Rep de fonc	Alg > Tval Tval +Alg > Graph	Demandé Par contrat	
	80	Fonc affine par intervalle	*Rep de fonc	Alg > Graph	demandé	
	81 et 82	Fonc affine par intervalle	*Exp de fonc	Graph > Alg	demandé	
	83	Sit fonc	*Dom de déf *Rep de fonc (*Exp fonc) *Antécédent	Sit fonc Sit fonc>graph (tech pt par pt) (Sit fonc>Alg) Sit fonc (tech num)	demandé Demandé mais l'élève peut passer par l'exp alg. Par contrat (tâche non demandée). Impossible dans reg graph À cause de la valeur de l'image (8/3)	 Résolution possible sans reg alg Nécessaire pour la tâche suivante. Ret sit initiale
	85	Sit fonc	*Exp fonc *Rep de fonc *comparaison de fonctions	Sit fonc >Alg Alg > Graph Reg Alg ou graph	Demandé Contrat Non précisé (prob les deux)	=Modélisation Ret sit initiale Ret sit initiale
Problèmes	86	Sit fonct. Fonct 1 Fonct 2	*Rep de fonc *Image *Image *Rep de fonc	Sit fonc > Graph Sit fonc ou graph Sit fonc Sit fonc > Graph	Par contrat Non demandé (les deux) Contrat	 Ret sit initiale Ret sit initiale
	87	Sit fonc	*Rep de fonc *Comparaison	Sit fonc+Tval >graph Reg Graph	 Reg graph suffisant.	À répéter pour plusieurs fonctions. Ret sit initiale
	88	Sit fonc	*Exp de fonc1 *Exp de fonc2 *Rep de fonc	Sit fonc>Alg Sit fonc>Alg Alg > Graph	Demandé Demandé Demandé	=Modélisation =Modélisation =Modélisation

c - chapitre 6 : "Fonctions classiques"

Place dans le chapitre		Type de fonctions	Tâches	Technique(s) attendue(s)	Initiative laissée à l'élève	Remarques
Activités	1	Fonction carré	*Rep de fonc *Rep de fonc *Parité-1 *Rep de Fonc *Extremum	Alg > Tval Tval > Graph Reg Graph Graph > Tvar Reg Graph	Demandé Demandé Demandé Demandé demandé	Touche de calculatrice prob
	2	Fonction inverse	*Rep de fonc *Rep de fonc *Dom de déf *Parité-1 *Rep de fonc	Alg > Tval Tval > Graph Reg Graph Reg Graph Graph > Tvar	Demandé Demandé Demandé Demandé demandé	Touche de calculatrice probable
Exercices Résolus	1	Fonction avec racine carré	*Rep de fonc *Variation *Rep de fonc *Extremum	Alg > Prog > Tval > Graph Reg Graph Graph > Tvar Reg Tvar	Demandé Demandé Demandé Demandé	 Tech de lecture Tvar après variation.
	2	Fonction 2^{nd} degré	*Parité-1 *Rep de fonc *Rep de fonc	Reg Alg Alg > Graph *(pt par pt)* Graph > Tvar	Par contrat Demandée demandée	
	4	Cadre algébrique - Résolution d'équations et d'inéquations	*Rep de fonc *Equation *Rep de fonc *Inéquation *Rep de fonc *Inéquation	Alg > Graph Reg Graph Alg > Graph Reg Graph Alg > Graph Reg Graph puis Reg Alg	demandé demandé demandé	Fonction racine carré. Fonction inverse Fonction inverse et affine
T.P	1	a)fonction carré et 2^{nd} degré b)fonctions avec rac carré	*Travaux alg *Rep de fonc *Transfo-1 *Rep de fonc	Rééc. Alg Alg > Graph *(pt par pt)* Reg Graph Alg > Graph *(tech de transformation*	 Tech pt par pt exigée Supposée car 1ère rencontre avec les trans-formations Par contrat (en application de la tâche précédente	Il s'agit de reconnaître la translation de courbes en tant que transformation. Association courbes et équations
	2	Démonstration des tech de changement de repère et d'origine				Ce T.P vise à enseigner les formules de changements d'origine et de repère.

Place dans le chapitre		Type de fonctions	Tâches	Technique(s) attendue(s)	Initiative laissée à l'élève	Remarques
T.P	3	Cadre algébrique	*Rep de fonc *Equation/Inéquations	Alg > Graph Reg Graph	Demandé tech de résol graphique entièrement détaillée.	
T.P	4	a)Fonc affine et carré b)fonction affine et avec rac carré	*Rep de fonc *Rep de fonc (carré) *Equation *Rep de fonc *Rep de fonc (rac carré) *Equation	Alg > Graph *(tech fonc aff)* Alg > Graph (*de mémoire*) Reg Graph puis Alg Alg > Graph *(tech fonc aff)* Alg > Graph *(de mémoire)* Reg Graph	Par contrat Par contrat Demandée Par contrat par contrat demandée	Utilisation explicite de l'outil fonctionnel. Tech graph détaillée
T.P	5	Fonction carré f. cube f. rac carré f. inverse	*Variation idem idem idem	Reg Alg *(t. innégalités)*	Avec aide	Démonstration du sens de variation des fonctions de référence
Exercices	1 à 3	Fonctions degré 2 et 3, rationnelles, avec rac carré	*Dom de déf	Reg Alg	Par contrat	
Exercices	4	Fonctions degré 2 et 3	*Parité-1	Reg Alg	Par contrat	
Exercices	5 et 6	Fonctions degré 2 et 3, rationnelles, avec val abs, avec rac carré	*Dom de déf *Parité-1	Reg Alg Reg Alg	Par contrat Par contrat	
Exercices	7 et 8	Donnée dans Tvar	*Parité-2	Reg Tvar	"compléter le Tvar"	Question posée: " f est faire, compléter le Tvar,
Exercices	20	Fonc inverse	*Variation	Alg > Verbal		Compréhension des variations de la fonc inverse
Exercices	21 à 23	F 2^{nd} degré	*Extremum	Reg Alg *(t. innégalités)*	Par contrat	
Exercices	26	Fonc rationnelle	*Exp de fonc	verbal./symb > Alg	interraction	Établir equation fonc, certaines prop. données
Exercices	27 et 28	Fonc rationnelle	*Variation *Rep de fonc *Rep de fonc	Reg Alg *(t. innégalités)* Alg > Tvar Tvar > Graph	Demandé Par contrat parcontrat	Avec aide
Exercices	29 et 30	Fonc rationnelle	*Dom de déf *Variation *Rep de fonc *Rep de fonc	Reg Alg Reg Alg *(t. innégalités)* Alg > Tvar Tvar > Graph	Par contrat demandé Par contrat Par contrat	Avec aide

Place dans le chapitre		Type de fonctions	Tâches	Technique(s) attendue(s)	Initiative laissée à l'élève	Remarques
Exercices	31	Fonc 2^{nd} degré	*Rep de fonc	Alg > Graph *(tech de chang d'échelle)*	Par contrat	Association exp alg et courbes
	32	Fonc degré 2, degré 2 et avec rac carré	*Reconnaissance de fonc *Rep de fonc	Alg > Graph *(tech classe de fonc)* Graph > Tvar	Par contrat	Association exp alg et courbes
	33	Fonc rationnelle	*Rep de fonc	Alg > Graph *(tech de chang de repère)*	Par contrat	Association exp alg et courbes
	34	Fonc carré et fonc 2^{nd} degré	*Rep de fonc *Transfo-1 *Transfo-2 *Rep de fonc	Alg > Graph *(de mémoire)* Reg Alg Reg Graph Graph > Tvar	Par contrat demandé demandé contrat	"étude de fonction" =rep graph de fonction par translation
	35	Fonc 2^{nd} degré	*Rep de fonc *Rep de fonc *Parité-1 *Variation *Rep de fonc *Parité-2	Alg > Prog Prog > Graph Graph > Tvar Reg alg *t. innégalités)* Reg Alg *(t. innégalités)* Alg > Tvar Reg Tvar	demandé par contrat demandé (avec aide) demandé par contrat demandé	comparer avec le 1er Tvar.
	36	Fonc 2nde degré	*Rep de fonc *Dom de déf *Variation	Alg > Prog Prog > Graph Reg Alg Reg Alg *(t. innégalités)*	demandé Conjecture ds reg graph laissée à l'initiative de l'élève. demandé	
	37	Fonctions 2^{nd} degré	*Rep de fonc *Equations *Inéquation	Alg > Graph *(de mémoire)* Reg graph puis Alg. Reg Graph	Par contrat Demandé demandé	
	38 et 39	Fonctions 2^{nd} degré - Fonctions rationnelles	*Equations, inéquations	Reg Graph	demandé	
Exercices	42	Fonction quelconque. registre symbolique	*Variation, (autre tâche)	Reg verbal/ symbolique	Tech alg / graph	Réflexion sur les variations
	47	Situation fonc (cadre mathématique)	*Rep de fonc *Extremum	Alg > Graph *(pt par pt)* Reg Graph puis Reg Alg *(t. innégalités)*	demandé demandé Demandé (Avec aide)	Modélisation donnée.

Place dans le chapitre		Type de fonctions	Tâches	Technique(s) attendue(s)	Initiative laissée à l'élève	Remarques
Exercices	48	Fonc 2^{nd} degré	*tâche alg *Variation *Extremum	Factorisation Reg Alg *(t. innégalités)* Reg Alg *(t. innégalités)*	 Demandé (avec aide) demandé	
	52	Fonction inverse et racine	*Rep de fonc *Equation (nbre de sol)	Alg > Graph *(de mémoir et fonc affine)* Reg Graph	Par contrat demandé	
	55	Fonction f(x) = 1/(x-3)	*Rep de fonc *Equation (nbre de sol)	Alg > Graph Reg Graph	Par contrat	
	56 et 57	Fonc 2^{nd} degré	*Rep de fonc *Equation/ Inéquation	Alg > Graph *(tech de chang d'origine)* Reg Alg Puis Reg Graph	Demandé demandé	
	58	Fonction avec racine carrée	*Rep de fonc *Equation	Alg > Graph *(tech de chang d'origine et affine)* Reg Graph	Par contrat Demandé	
	59	Fonc 2^{nd} degré	*Rep de fonc *tâche alg (réécriture) *Variation	Alg > Prog Prog > Graph Reg Alg *(t. innégalités)*	demandé demandé	Réécriture à utiliser dans var
	60	Fonc rationnelle	*Variation *Rep de fonc *Transfo-1 *Transfo-2	Reg Alg *(t. innégalités)* Alg > Tvar Reg Alg Reg Graph	Demandé (avec aide) Demandé Par contrat Par contrat	
	61	Fonc avec rac carré	*Rep de fonc *Variation	Alg > Prog Prog > Graph Reg Alg *(t. innégalités)*	demandé demandé (avec aide)	
	62	Fonc rationnelle	*Variation *Rep de fonc *Rep de fonc	Reg Alg *(t. innégalités)* Alg > Tvar Tvar > Graph	Demandé (avec aide) Demandé demandé	
	63 et 64	Fonc rationnelle	*tâche alg *Variation *Rep de fonc *Rep de fonc *Inéquation	Réécriture Reg Alg *(t. innégalités)* Alg > Tvar Tvar > Graph Reg Graph Puis Reg Alg	 Demandé Demandé Demandé	Inéquation : "avec aide dans 1er exerc. sans aide dans 2ème exerc."

Place dans le chapitre		Type de fonctions	Tâches	Technique(s) attendue(s)	Initiative laissée à l'élève	Remarques
	65 et 66	Fonc 2^{nd} degré	*Tâche alg *Rep de fonc *Equation *Inéquation	Réécriture Alg > Graph *(tech de chang d'origine)* Reg Graph Puis Reg Alg Reg Graph	Technique implicitement induite par "tâche alg". Demandé< par contrat	Réécriture à utiliser dans tracé.
	68	Fonc degré 3	*Exp fonc	Reg verbal/ symb(alg) > Alg	Image/ant utilisé selon statut outil	Déterminer l'éq fonctionnelle
Problèmes	70	Fonc 2^{nd} degré	*Tâche alg *Equation *Rep de fonc *Inéquation (*Dom de déf) (implicite)	Réécriture Reg Alg Alg > Graph *(tech de chang d'origine)* Reg Graph Reg Alg	 demandé par contrat demandé Par contrat	Reg Graph servant de conjecture éventuellement
	71	Fonction idd, carré, cube.	*Rep de fonc *Comparaison	Alg > Graph *(de mémoire)* Reg Alg Puis Reg Graph	Par contrat demandé	
	72	Fonction idd, fonc racine carré	*Rep de fonc *Travaux alg *Comparaison	Alg > Graph *(de mémoire)* Reg Alg	Par contrat demandé (avec aide)	
	73	Fonction 2^{nd} degré $f(x) = x^2/2$	*Rep de fonc *Rep de fonc *Tache géométrique	Alg > Graph *(tech de chang d'échelle)* Alg > Graph *(tech de fonc affine)* Reg Graph	par contrat par contrat	à partir de $f(x) = x^2$ Avec paramètre
	74	Sit fonc	*Exp de fonc *tâche alg Rep de fonc *Extremum	Sit fonc > Alg Réécriture Alg > Graph *(tech de chang d'échelle et d'origine)* Reg Alg *(t. innégalités)*	Demandé (avec aide) Technique implicitement induite par "tâche alg". Par contrat Ou Tech graph possible.	= Modélisation

Place dans le chapitre		Type de fonction	Tâche	Technique(s) attendue(s)	Initiative lais - sée à l'élève	Remarques
	75	Sit fonc	*Rep de fonc	Sit fonc > Graph	Tech non imposée (1ère modélisation Algébrique nécessaire)	=Modélisation
	76	Sit fonct	*Autre *Image *Exp de fonc *Rep de fonc	 Sit fonc *(tech num)* Sit fonc > Alg Alg > Graph	 par contrat demandé demandé	Question générale visant à mieux comprendre la situation fonc

d - chapitre 7 : "Fonctions trigonométriques"

Place dans le chapitre		Type de fonction	Tâche	Technique(s) attendue(s)	Initiative lais - sée à l'élève	Remarques
Activités	4	a)carré, sinus, inverse b)sinus c)cosinus	*Reconnais. de fonction *Rep de fonc *Rep de fonc *Parité-1 *Périodicité-1 *Extrémum (idem)	Alg > Graph Alg > Graph *(tech pt par pt)* Graph > Tvar Reg Graph Reg Graph Reg Graph	 Demandé (touche de la calculatrice) demandé demandé demandé demandé	Association (par classe de fonction). Il s'agit de mise en évidence "intuitive" des propriétés de la fonc.
Exercices rédigés	1 et 2	Résolution d'équation	*Equation	calculatrice Puis Tech du cercle trigonom.	demandé	Utilisation implicite de la réciproque de la fonction sinus (resp. cosinus)
T.P	4	Résolution d'inéquation		Tech du cercle trigonom.		À l'aide du cercle trigon. - pas de pt de vue fonction.
Exercices	23	Fonc cos, sin	*Rep de fonc	Alg > Tval	Calculatrice demandée	
	24	Fonc cos, $\cos^{-1}$	*Rep de fonc	Alg > Tval	Calculatrice demandée	
	25	Idem avec fonc sin, $\sin^{-1}$.				
	26 à 29	Résolution d'équation	*Equation	calculatrice et cercle trigonom.		
	33 à 35	Résolution d'équation	*Equation	en utilisant la période	Tech donnée	
	36	Fonc trigo Sin 2x	*Période-1	Reg Graph Puis Reg Alg	Les deux techniques demandées	Graphique pour conjecture

Place dans le chapitre		Type de fonction	Tâche	Technique(s) attendue(s)	Initiative laissée à l'élève	Remarques
Exercices	58	Fonc trigonom	*Parité-1	Reg Alg	contrat	
	59	Fonc trigonom Sin 2x	*Rep de Fonc *Extrémum	Graph > Tvar Reg Graph	demandé par contrat	
	60	Fonc trigonom cos 2x	*Rep de fonc *Rep de fonc	Alg > Graph *(tech pt par pt)* Graph > Tvar	Demandé	
	61 à 66	Résolution d'éq/inéquations	*Eq/inéquations	Par le cercle trigonom -		valeurs remarquables, claculatrice non nécessaire
	67	Fonc cosinus	*Rep de fonc *Inéquations	Alg > Graph *(tech pt par pt)* Reg Graph Puis Tech du cercle trigonom.	Demandé Demandé	
	68	Fonc trigonom	*Période-1	Reg Graph puis Reg Alg	Tech alg par contrat, reg graph pour conjecture proposé	calculatrice suggérée
	69	Fonc trigonom	*Période-1	Reg Alg	Demandé, avec aide	Période donnée
Problèmes	70	Fonc périodique	*Période-2 *Image	Reg graph Reg Graph *(avec utilisation de la période)*	Obligatoire, exp alg non connue	Compléter le graphique
	71	Fonc sinus, sin2x, cos 2x	*Rep de fonc *Période-1	Alg > Graph Reg Graph Puis Reg Alg	Demandé (graph pour conjecture)	Association (éq + courbe)
Problèmes	73	Sit fonctionel. Un) f_1 b)f_2	*Image *modélisation *Rep de fonc *Rep de fonc *Période-1 *Antécédent *Comparaison de fonction : cas d'égalité	Sit fonc Sit fonc> Graph Sit fonc > Tval *(tech num)* Sit fonc + Tval > Graph Sit fonc Reg Graph Reg Graph (puis interprétation géométrique)	Demandé demandé Tval et f_1 servant d'aide. Par contrat demandé (interprétation géom = validation)	Une partie de la rep graph donné Ret. sit initial. Ret. Sit initial.

2 - Tableaux des registres du manuel de Seconde

(Remarque : nous ne ne comptons pas le nombre de fois où apparaissent les registres mais le nombre d'exercices où ils apparaissent - Ce qui revient au même pour la majorité des tâches, à l'exception de certaines comme celle représentation de fonction.)

a - chapitre 1 : "Vers la notion de fonction"

Les non-situations fonctionnelles

Type de tâches	Registre de départ	Changement de registres	Remarques
Rep de fonction	Alg Tval Graph / Tvar Verbal/symb	Alg > Prog > Tval : 4 Tval < Graph : 3 Dans les deux sens : 2 Verbal/symb > graph : 10	 Fonctions décrites par certaines propriétés.
Variation	Graph ou Tvar : 4		
Extremum	Graph ou Tvar : 6		
Signe d'une fonction	Tavr : 2		
Image/Ant.	Graph : 2 Tvar : 1		
Relation / fonction	Graph : 1		

Les situations fonctionnelles

Type de tâches	Registre de départ	Changement de registres	Remarques
Modélisation	Sit fonc	Sit fonc (>Tval) > Graph : 6 Sit > Alg : 11	Phase num 4 fois sur 6 au plus
Rep de fonction	Alg Graph Tval Sit fonc	Alg > graph : 5 Graph > Tvar : 2 Tval > Graph : 2 Sit fonc > Tval : 3	
Image/Ant	Sit fonc : 3 Graph : 2		
Variation	Graph : 2 Tvar : 2		
Extremum	Graph : 3 Tvar : 1		
Equation/inéq.	Alg (etgraph): 4		
Comparaison/ addition	Alg/Graph/géo métrique : 2		

b - chapitre 4 : "Fonctions affines"

Les non-situations fonctionnelles

Type de tâches	Registre de départ	Changement de registres	Remarques
Rep de fonc	Tval Alg Alg	Tval (> Verbal/symb> Alg >) Tval : 2 Alg > Graph : 5 (affine par int) Alg > Tval : 1 (f affine)	Il s'agît de compléter un Tval le passage vers le reg verbal/symb est implicite
Exp de fonc	Verbal/symb Graph	Verbal/symb > Alg : 6 Graph > Alg : 2 (aff par int)	
Reconnaître une fonction affine	Tvar : 1 Alg : 2 Graph : 2		
Image/Antécé-dent	Alg : 3		
Variation	Alg : 2 Verbal/Symb	Verbal/symb > Alg: 3	
Signe de fonction	Tvar : 1 Alg Graph : 1	Alg > Tvar : 4	
Equation	Alg : 3		
Comparaion de fonction	Alg : 1		

Les situations fonctionnelles

Type de tâches	Registre de départ	Changement de registres	Remarques
Rep de fonction	Sit fonc Tval Alg	Sit fonc > Tval : 3 Sit fonc > Graph : 6 Tval > Graph : 1 Alg > Graph : 3	
Exp de fonction	Sit fonc	Sit fonc > Alg : 8	
Reconnaître une fonction affine	Alg : 2		
Image/Antécé-dent	Sit fonc : 3 Verbal/symb Graph : 1 Alg : 1	Verbal/symb > Alg : 1	
Comparaison de fonction	Graph : 4 Alg : 5		
Réciproque	Alg : 1		

c - chapitre 6 : "Fonctions classiques"

Situations fonctionnelles et situations non-situations fonctionnelles

Type de tâches	Registre de départ	Changement de registres	Remarques
Rep de fonction	Alg Tvar Graph Sit fonc	Alg > Graph : 23 Alg > (Prog > Tval >) Graph : 10 Alg > Tvar : 9 Tvar > Graph : 7 Graph > Tvar : 6 Sit fonc (>Alg) > Graph : 1	Tech de mémoire, affine, de chang d'échelle ou d'origine. Il s'agît des graphes obtenu par la tech pt par pt qu'il soit explicitement demandé ou non de programmer la fonction et/ou de remplir un Tval.
Exp de fonction	Verbal/symb Sit fonc	Verbal/symb > Alg : 2 Sit fonc > Alg : 4	
Transfo-1/Tansfo-2	Reg Alg: 3 Reg Graph : 2		
Domaine de définition	Reg Alg : 6 Reg Graph : 2		Dont 1 implicite (prob 70)
Image/Antécé-dent	Sit fonc : 1 Graph : 1		Apparaît uniquement dans des sit. fonction.
Sens de variation	Reg Alg : 14 Reg verbal/ symb : 2 Graph : 1		Réflexion sur variation
Extremum	Alg : 6 Graph : 2 Tvar : 1		(5 fois tech des inégalités). dont 1 fois reg graph et alg. exercice résolu.
Parité -1	Alg : 5 Graph : 2		
Parité-2	Tvar : 2		
Eq/Inéquation	Alg Alg	Alg > Graph : 4 (résolution graphique uniquement) Alg et Alg > Graph : 13 (résolution algébrique et graphique)	

d - chapitre 7 - "Fonctions trigonométriques"

Les situations fonctionnelles et les non-situations fonctionnelles

Types de tâches	Registre de départ	Changement de registres	Remarques
Rep de fonc	Alg Graph Sit fonc	Alg (>Prog >) Graph: 3 Graph > Tvar: 3 Sit fonc > Graph:1 Sit fonc > Tval: 1	 =modélisation
Parité-1	Graph : 1 Alg : 1		
Périodicité-1	Graph: 1 Alg: 2 Alg + Graph:2		
Périodicité-2	Graph:2		Tâche: "compléter le graphique".
Variation	Tvar :3		Tableau de variation demandé et non étude des variations.
Extremum	Graph: 1 Tvar: 1		
Image/antécé-dent	Graph: 2 Sit fonc: 1		
Eq/Inéquation	Alg : 16 Graph : 1	 (Suivi du cercle trigon pour vérif)	Cadre de départ algébrique Unique cadre fonctionnel
Reconnaître une fonction	Alg	Alg > Graph: 1	
Comp de fonc (cas d'égalité)	Graph : 1		Suivi d'une interprétation géom : sit fonc

3 - Tableaux des tâches et techniques du manuel de Première

a - chapitre 4 : "Fonctions numériques"

Place dans le chapitre		Type de fonctions	Tâches	Technique(s) attendue(s)	Initiative	Remarques
Activité	1	Fonctions avec racine carré. Reg Alg et graph	*Transfo-1 *Transfo-2	Reg Graph Reg Alg	Demandé Demandé	 avec aide.
Utilisation	1	Fonctions rationnelle et avec racine carré	*Variation	Reg Alg (*tech op/comp de fonc*)	Par contrat	
	2	Fonction rationnelle	*Maj / min	Tech alg 2 (*tech des inégalités*)	Par contrat	Car maj et min ne sont pas donnés au préalable.
	3	2 fonc, degré 2 et rationnelle reg graph et alg	*Comparaison de fonc	- Reg Alg (*tech signe de la différence*) puis -Reg Graph	demandé Interprétation graphique demandée.	
T.P	1	Fonc degré 3 Reg alg et graph	*Transfo-2	Reg Graph	Par contrat	Transfo dans reg alg - Fonctions dans reg graph
	2	Techniques pour tâches géométriques	*Axe/ centre de symétrie	par changemt d'origine.	demandé	tâches géom: méthode analytique pour prouver l'existence d'un axe/ centre de sym.
	3	Tracé de fonctions liées à la val abs. symétrie liée à la val abs	*Rep de fonc (de $\|f(x)\|$) *Rep de fonc (de $f(\|x\|)$) *Variation (de $\|f(x)\|$ et de $f(\|x\|)$)	Alg > Graph *(tech liée à la val abs*) Reg Alg (*tech op/comp de fonc*)	Demandé, avec aide. Demandé.	Présentation de technique pour obtenir $\|f(x)\|$ et $f(\|x\|)$ à partir de f(x). f est donnée dans les reg alg et graph
Exercices	1	Courbes diverses	*Relation/ fonction	Reg Graph	Par contrat	
	2 et 3	reg graph	*Image/ant *Eq/inéq *Nbre de sol	Reg Graph Reg graph Reg graph	Demandé Demandé demandé	Équation de la fonction non connue

Place dans le chapitre		Type de fonctions	Tâches	Technique(s) attendue(s)	Initiative	Remarques
	4 et 5	Fonctions Fonction degré 3 et affine, aff par intervalles	*Eq/Inéq *Exp de fonc *Eq/inéq	Reg graph Graph > Alg Reg Alg	Demandé Demandé demandé	Graphes des fonctions donnés Pour vérif avec reg graph
	6	reg alg et graph	*Exp de fonc *Comparaison *Inéquation	Graph > Alg Graph puis alg Reg Graph	 Demandée Demandée	Fonction aff.
Exercices	7	Une fonction reg graph	*transfo-2	Reg Graph (tranfo donnée ds reg alg)	Par contrat	
	8	Une fonction Reg Tvar	*Transfo-2	Reg Tvar (tranfo donnée ds reg alg)	Par contrat	
	9 et 10	Fonction degré 3	*Tranfo-2	Reg Alg (tranfo donnée ds reg verbal)	Par contrat	Transfo donnée également ds reg graph
	11	Fonction degré 3	*Rep de fonc	Graph > Alg *(tech liée à la val abs)*	Par contrat	
	12 et 13	Fonction degré 3	(*Transfo-1 implicite) *Transfo-2	Reg Alg Reg Graph	Par contrat demandé	
Exercices	14	Fonction degré 3	*Rep de fonc	Alg > Graph *(tech liée à la val abs)*	Par contrat	
	15 et 16	Fonctions degré 3 - rationnelle	*Tâche alg (réécriture) *Rep de fonc (de fonc f1) *Transfo-2 *Rep de fonc (de fonc f2)	 Alg > Tvar *(de mémoire)* Tvar Tvar > Graph	 demandée Demandée Par contrat	= Transfo-1 implicite. Transfo. = translation
	17	Reg Graph	*Parité-1	Reg Graph		
	18 et 19	Reg Graph	*Parité-2	Reg Graph		Graph à compléter
	20	Reg Tvar	*Parité-2	Reg Tvar		Tvar à compléter
	21	Fonctions diverses	*Dom de déf *parité-1	Reg Alg Reg Alg		

Place dans le chapitre		Type de fonctions	Tâches	Technique(s) attendue(s)	Initiative	Remarques
Exercices	22 à 25	Fonction affine - degré 2 - rationnelle	*Dom de déf *Parité-2 *Rep de fonc	Reg Alg Reg Alg Alg > Graph (*tech chang de rep/origine*)	 Tech attendue par contrat.	 Expression de fonc à compléter.
	26 et 27	Fonctions rationnelle	*tâche alg de réécr. *centre/axe de symétrie	 *Tech de chang d'origine*	Demandée Demandée	Aide à la tâche suivante
	28 et 29	Fonctions rationelles	*tâche alg de réécr. *centre/axe de symétrie	 Tech de chang d'origine	Demandée Demandée	Aide à la tâche suivante
	30 et 31	Fonctions rationnelle	*centre/axe de symétrie	Tech de chang d'origine	Par contrat	
	32	Reg Graph	*Périodicité-1	Reg Graph		
	33 à 35	F affine définie sur une partie de son domaine	*Périodicité-2 et Parité-2	Alg > Graph (*rep de fonc*)		Utiliser la périodicité et la parité pour rep la fonction sur tout son domaine
	36 et 37	Reg symbolique. Fonction indexée.	*Périodicité-1	Reg symb	Avec aide	
Exercices	38	Fonction E(x)=n; pour n x< n+1. Fonction x-E(x)	*Image/Ant *Rep de fonc *Tâche géom *Périodicité-1 *Rep de fonc	Reg Alg Alg > Graph (*pt par pt*) Alg > Graph Reg Alg Alg > Graph (*pt par pt*)	Demandé demandé Tâche inhabituelle. Pt par pt sur un intervalle puis utisation implicite de la Période.	 "Montrer que la courbe est invariante par translation".
	39	Reg graph	*Rep de fonc	Graph > Tvar	Par contrat	
	40	Reg Tvar	*Rep de fonc	Tvar > Graph	Par contrat	
	41	Reg Symb	*Variation (autre tâche)	Reg Symb		Réflexion sur la déf de variation
	43	Reg Graph	*Extremum *Maj / min	Reg Graph Reg Graph	Par contrat	
	44	Fonctions rationnelles	*Maj /min	Reg Graph puis Reg Alg	demandée	
	45	Fonctions diverses	*Variation	Reg Alg (*tech op/comp de fonc)*	demandée	Fonc écrite sous forme de somme de fonc.

Place dans le chapitre		Type de fonctions	Tâches	Technique(s) attendue(s)	Initiative	Remarques
Exercices	46	Fonctions 2^{nd} degré	*Op/Comp de fonctions *Variation *définir 2 fonctions dont la somme soit croissante	Reg Alg Reg Alg (*tech op/comp de fonc)*	 Demandée, avec aide. Autre tâche-inhabituelle.	
	47	2 fonctions, degré 2 et inverse	*Rep de fonc (les 2 fonc) *Variation *Rep de fonc (les 2 fonc) *Rep de fonc (la résultante) *Rep de fonc (la résultante)	Alg > Tvar (mémoire) Reg Alg (*tech op/comp de fonc)* Tvar > Graph Ou Alg > Graph (*mémoire*) Alg > Graph (*pt par pt*) Graph > Tvar	Par contrat. Demandée. tech non précisée. Demandée.	 Var de la fonc somme. Rep de la fonc somme.
	48	Fonctions carré et affine	*Variation (les 2 fonc) *Op/Comp de fonctions *Variation (la résultante) *Variation (produit de 2 fonctions)	Reg Alg (*mémoire*) Reg Alg Reg Alg (*tech op/comp de fonc)* Reg Alg (*tech op/comp de fonc)*	Par contrat Demandée (avec aide) Non connue	 Il s'agît d'adapter la technique de l'addition à celle du produit dans le cas de 2 fonctions positive croissante
	49	Fonctions diverses	*Variation	Reg Alg (*tech op/comp de fonc)*	demandée	
	50	Reg symb, Fonction quelconque	*Parité-1 (fonc somme et fonc produit)	Reg Alg	Tech non précisée, car démonstration	démonstration
	51	Reg symb	*Parité-1 *Parité	Reg Alg Reg Alg	Avec aide Tech non connue (investigation)	 Utilisation des notions de parité et d'addition de fonctions pour un résultat général
	52	Fonctions num diverses	*Op/Comp de fonctions	Reg Alg		
	53	Fonctions num diverses	*Op/Comp de fonctions	Reg Alg		

Place dans le chapitre		Type de fonctions	Tâches	Technique(s) attendue(s)	Initiative	Remarques
Exercices	54	Fonctions num diverses	*Variation	Reg Alg (*tech op/comp de fonc)*	demandée	L'intervalle d'étude est précisé
	55	Fonctions num diverses	*Variation	Reg Alg (*tech op/comp de fonc)*	demandée	Intervalle d'étude non précisé mais domaine donné
	56 et 57	Reg Symb - f et g, 2 fonc quelconques,	*Parité-1 (de fog, gof)	Reg Alg	Tech non connue (investigation)	Conservation de la parité par composition
	58	2 fonctions, affine et rationnelle	*Maj / min (les 2 fonc) *Maj /min	Reg Alg Reg Alg	Attendue par contrat. Attendue par contrat	De composée des fonctions.
	59	Fonctions diverses	*Egalité de fonc	Reg Alg		
	60	Fonc degré 2 et degré 3.	*Image *Egalité de fonc	Reg Alg -calcul des images (tâche précédente) ou -Reg Alg		Réflexion sur l'égalité de fonc: voir si l'élève se limite à l'égalité de 3 points pour conclure.
	61	2 Fonc, avec racine carré (rac (x+1)) et affine	*Comparaison *Rep de fonc	Reg Alg (*tech des inégalités)* Alg > Graph (*mémoire, chang d'or/repère)*	Par contrat par contrat	
	62	Rationnelle et affines	*Comparaison	Reg Alg (*tech des inégalités ou de factorisation)*	Reg donné, tech non précisée mais factorisation attendue.	
	63	Reg Graph	*Comparaison	Reg Graph		
	64 à 66	Fonc affine-rationnelle et rationnelle-carré. Reg Alg et Graph	*Comparaison *Comparaison	Reg Alg (*tech des inégalités ou algébr.)* Reg Graph	Reg donnée, tech non précisée mais factorisation attendue. demandée	Factorisation plus facile.
	68	Reg Symb	*Rep de fonc	Reg verbal/ symb > Graph	Interraction verbal/symb et graphique (non vue en cours)	*Information données sur Dom de déf/ Ant/Image/ Extr/Var/signe / bornée

Place dans le chapitre		Type de fonctions	Tâches	Technique(s) attendue(s)	Initiative	Remarques
Problèmes	69	2 fonc, racine carré et 2^{nd} degré	*Autre tâche	Reg Graph	Avec aide	
			*Rep de fonc	Alg > Tvar (*mémoire*)	Demandée sur une partie du domaine.	
			*Composition de fonction (fog)	Reg Alg		Dom de déf d'une fonction composée.
			*Dom de déf	Reg Alg		
			*Parité-1 (fog)	Reg Alg		
			*Variation (fog)	Reg Alg (*tech op/comp de fonc*).	Attendue par contrat sur partie du dom, puis parité-2 implicite pour tout le dom.	
			*Rep de fonc (fog)	Reg graph (*tech pt par pt*)		Méthode de construction de gof (pt par pt) détaillée
	70	Fonction degré 4	*Parité-2	Reg Alg	Tech Non précisée, parité-2 implicite.	"intervalled'étude de la fonction ?"
			*Rep de fonc (g)	Alg > Tvar (*mémoire*)	par contrat.	
			*tâche de rééc. algébrique	Reg Alg	Par contrat	=Transfo-1 implicite.
			*Variation (h)	Reg Alg (*tech de transformat°*)	Par contrat (demandée sur partie du dom)	Implicitement Induite par la Tâche de réécriture.
			*Variation (f = goh)	Reg alg (*tech op/comp de fonc*)	par contrat	Sur tout le dom: parité-2 implicite.
			*Rep de fonc (f)	Alg > Tvar (*après variation*)		
			*Image (f)	Reg Alg		
			*Rep de fonc (f)	Tvar > Graph	Sur tout le dom: parité-2 implicite.	
			*Rep de fonc ($\lvert f \rvert$)	Alg > Graph (*tech de symétrie liée à val abs*).		
			*Eq/inéq (nbre de solution)	Reg graph		Équation avec paramètres
	72	Fonc rationnelle	*tâche de réécriture alg.	Reg Alg	Par contrat	=Transfo-1 implicite.
			*Variation	Reg Alg (*tech de transformat°*).	Par contrat	Implicitement induite par tâche de rééc alg.
			*Rep de fonc	Alg > Graph (*après variat°*)	Par contrat	
			*Succession de tâches géom.			

Place dans le chapitre		Type de fonctions	Tâches	Technique(s) attendue(s)	Initiative	Remarques
Problèmes	73	2 fonc rationnelles - reg alg et grah donnés	*Parité-1 *Variation *Rep de fonc *Maj / min *Comparaison	Reg Alg Reg Alg (*tech op/comp de fonc*) Alg > Tvar (*après variat°*) Reg Alg Reg Alg	par contrat par contrat par contrat Demandé demandé	sur partie du dom, puis parité-2 implicite pour tout le .dom après conjec-ture graphi. après conjec-ture graphi.
	74	2 fonc rationnelles - reg alg et grah donnés	*Dom de déf *tâche géom (pts d'int des 2 courbes) *Maj/ Min *Centre/Axe de symétrie *Variation *Rep de fonc *Transfo-2	Reg Alg Reg Alg (*tech d'éq)* Reg Alg *Tech de chang d'origine* Reg Alg (*tech op/comp de fonc*) Alg > Tvar (*Après variat°*) Alg	 Demandé demandé Par contrat Attendue par contrat. Demandée	Les rep graph des 2 fonctions sont données au départ et vont donc servir, par contrat à établir des conjecture.
	75	Situation fonc Reg Graph	*Recon classe de fonc. *Exp de fonc *Rep de fonc	Reg Graph Graph > Alg -tech pt par pt ou -tech de symétrie	 Tech de symétrie attendue	Ret Sit init "Rep g sachant que f + g est la fonction nulle".
	76	Situation fonctionnelle-vie économique- 2 fonctions f et g Reg Graph	*Variation (de f) *Image/Ant (de f) Exp de fonc (de g) *Im/Ant (pour g) *Im (pour f-g) *Comparaison de fonctions (f et g)	Reg Graph Reg Graph Alg > Graph (*f affine*) Reg Alg ou Reg Graph Reg graph (*tech num*) Reg Graph	 Reg Alg attendu. Attendue par contrat car expression de f non connue.	 Ret sit initiale Ret sit initiale Ret sit initiale Ret sit initiale Ret sit initiale

b - chapitre 7 : "Applications de la dérivation"

Place dans le chapitre		Type de fonctions	Tâches	Technique(s) attendue(s)	Initiative	Remarques
Activités	1	1) f degré 2 quelconque (reg alg) 2) f degré 4 (reg graph et alg)	*Tvar de f *variation de f (dérivée f', signe de f ' et variation de f). *Extremum *Rep de fonc *variation de f (dérivée f', signe de f ' et variation de f). *Extremum	Tech de mémoire. *Tech de la dérivée* *Tech de la dérivée* Graph > Tvar *Tech de la dérivée* *Tech de la dérivée*	Par contrat Tech détaillée car 1ère rencontre. Tech détaillée Tech détaillée Tech détaillée	Il s'agît de juxtaposer les variations d'une fonction que l'on sait déterminer et de comparer avec le signe de f '.
	2	Solutions de l'équation f(x) = λ. Reg Graph	*Variation *Antécédent (de zèro) *existence d'une solution unique pour l'éq "f(x) = λ "	Reg Graph Reg Graph Reg Graph	demandé demandé demandé	Installation de la relation entre "existence de solution à une équation" et "variation"
	1	Polynôme degré 5 - reg Alg	*Variation	Reg Alg (*tech de la dérivée*)		Entièrement détaillée: -calcul de f ' -signe de f ' (par factorisation) -variation de f
	2	Existence des solutions de l'équation "f(x) = 0" sur I Reg alg	*Existence de solution (+ encadrement de la solution)	Reg Alg (*tech de la dérivée*)		**entièrement détaillée :** -étude des Variations de la fonc correspondante -f réalise une bijection de I vers f (I) -0 app à f (I)
	3	Situation fonctionnelle Recherche d'extremum	*Exp fonc *Extremum	Sit fonc > Alg Reg Alg (*tech de la dérivée*)		=Modélisation Entièrement détailée: -dom de déf -Variation de f, valeurs annulant f ' -Tvar -conclusion sur l'extremum

Place dans le chapitre		Type de fonctions	Tâches	Technique(s) attendue(s)	Initiative	Remarques
T.P	1	Zéros d'une fonction et trigo B = "Application à une fonc trigo-nométrique"	A/ *Variation *Nombre de solution (+en cadrement) *Rep de fonc B/ *Tâche alg *sol de l'éq "f(x)=0" *Tâche algébrique = factorisation du polynôme	Reg Alg (*tech de la dérivée*) Reg Alg (*tech de la dérivée*) Alg > Graph *(apr variation)* en application de la partie A après établissement de ses racines	Demandé Attendue car int de monotonie implicitement donné.	décomposé en plusieurs tâches. Réinvestissement du chap sur les polynômes.
	2	Situation fonctionnelle	*Variations *Rep de fonc *Extremum *Variation et comp de fonc	Reg Alg (*tech de la dérivée*) Alg > Graph (*apr variation*) Sit fonc > Alg (*tech de la dérivée*) Alg puis graph	Par contrat Par contrat Par contrat demandé	Modélisation Ret situation initiale Ret sit init:"f1 décrois ssi f2 inf à f3"
	3	Etude de la fonction tangente	*Parité-1 *Périodicité-1 *Int d'étude *limite *Rep de fonc *Rep de fonc *Eq/Inéquat.	Reg Alg Reg Alg Alg > Tvar *(tech de la dér)* Tvar > Graph Reg Graph	Parité/ période données. demandé damandé Demandé	En déduire l'intervalle d'étude +parité-2 implicite. +Périodicité-2 implicite.
	4	Maximum et géométrie Situation fonctionnelle	*dom de déf *Exp fonc (obtention de f_1) *Variation ($g = (2f_1)^2$) *Extremum ($g = (2f_1)^2$) *Exp fonc (obtention de f_2) *Variation (def_2) *Extremum (de f_2)	Reg Alg Sit fonc > Alg Reg Alg (*tech de la dérivée*) Reg Alg (*tech de la dérivée*) Sit fonc > Alg Reg Alg (*tech de la dérivée*) Reg Alg (*tech de la dérivée*)	demandé Avec aide demandée. Avec aide	 Modélisation de f_1. Déduire de l'étude de g, l'extremum de f_1 Modélisation de f_2.

Place dans le chapitre		Type de fonctions	Tâches	Technique(s) attendue(s)	Initiative	Remarques
Exercice	4 et 5	Fonctions polynômes	*Variation * Rep de fonc	Reg Alg (*tech de la dérivée*) Alg > Tvar (apr variation)	demandé	
	6	f degré 3 avec paramètres Reg verbal symb	*Exp fonc	Verbal/symb > Alg	Étude implicite des variations - tech de la dérivée	"Dét l'éq de f pour que f soit croissante sur R".
	7 à 11	Fonctions rationnelles et Irrationnelles	*Dom de déf *Variation *Rep de fonc	Reg Alg Reg Alg (*tech de la dérivée*) Alg > Tvar *(apr variation)*	Par contrat Par contrat	
	12	Reg graph (f trigo)	*(Transfo-1 implicite) *Transfo-2	Reg Graph Reg Alg	 Par contrat	 "Dét l'éq de la courbe".
	13 et 14	Fonc trigon. Reg graph +verbal /sym	*Exp fonc *Période-1	Verbal/symb > Alg Reg alg	 par contrat (graph pour conjecture)	"Dét l'éq de f, certaines propriétés étant données: image, tg en un pt, max, etc".
	15	F périodiques	*Période-1 *Variation *Période-1	Reg Alg Reg Alg (*tech de la dérivée*) Reg Alg	 Int d'étude donné.	= "étude de fonction de type cos(ax) ou sin(ax)". pour fonction de type cos(ax+b) ou sin(ax+b)".
	16	F périodiques	*Réécrit. alg *Période-1 *Variation *Rep de fonc	 Reg Alg Reg Alg (*tech de la dérivée*) Alg > Tvar (apr variation)	 Par contrat Par contrat (Int d'étude donné)	tilisation implicite de la rééc alg
	17	Reg graph	*Extremum	Reg Graph		Mise en place du théorème extremum et dérivée.
	18	f polynômes et rationnelles	*Extremum (sur intervalle)	Reg Alg		Ext Local ou absolu
	19	f polynômes et rationnelles	*Extremum local	Reg Alg	par contrat	Ext local

Place dans le chapitre		Type de fonctions	Tâches	Technique(s) attendue(s)	Initiative	Remarques
Exercice	20	f degre 3	*calcul de valeurs annulant la dérivée. *Extremum	Reg Alg Reg alg	Dét la dérivée au préalable. Utilisation implicite de la tâche précédente	 Réflexion sur théorème de l'extremum.
	21	f degré 3 avec paramètres	*Extremum	Reg Alg (*tech de la dérivée*)	Par contrat	Expression de fonction avec paramètres
	22	f polynômes et rationnelles	*Variation *Extremum	Reg Alg (*tech de la dérivée*) Reg Alg (*tech de la dérivée*)	 Extremum et non ext local sur R	
	23	Reg verbal/symb	*Exp fonc *Variation	Verbal/Symb > Alg		"Dét l'éq de f, certaines propriétés étant données: degré 3, image, max,, min, etc".
	24	Fonc degré 3 avec param.	*Extremum *tâche alg *existence de solution	Reg alg (*tech de la dérivée*) Reg alg	Par contrat Par contrat	Expresssion de fonc avec paramètres.
	25	Reg Graph	*Image d'intervalle	Reg Graph	Par contrat	
	26	Reg Graph	*Bijection	Reg Graph	Par contrat	Mise en évidence
	27 et 28	F polynôme, rationnelle, irrationnellle	*Image d'intervalle	Reg Alg	Par contrat	
	29 et 30	F polynôme, rationnelle, irrationnellle	*Bijection	Reg Alg	Par contrat	Mise en évidence
	31 et 32	F polynômes (degré a et 5), rationnelle, irrationnellle	*Existence de solution (+ encadrement)	Reg Alg	Par contrat	
	33 et 34	F polynôme quelconque- cas général Cadre algébrique - Reg verbal- fonction outil	*Existence de racines de polynôme	Verbal/symb > Alg	Tech non connue	Détaillée : -signe de f aux bornes du dom -calcul de f ', signe de f ' et variat de f -déduct° sur nbre de sol

Place dans le chapitre		Type de fonctions	Tâches	Technique(s) attendue(s)	Initiative	Remarques
Problèmes	35	Équation Cadre alg - Reg alg - fonction outil	*Existence de solution	Reg alg	Tech non connue	Détaillée : -considérer la fonc correspondante: -dérivée et variation de f, déduction du nbre de sol.
	41 à 45	Fonctions polynômes/ Rationnelles/ Irrationnelles Reg Alg	*Dom de déf *Parité-1 *limite *Variation *Rep de fonc *Rep de fonc	 Reg Alg (*tech de la dérivée*) Alg > Tvar (apr variation) Tvar > Graph (apr variation)	Reg alg Reg alg par contrat	
	46	F degré 3 Reg Alg	*Variation *Rep de fonc *Signe de fonc *tangente *Rep de fonc *Rep de fonc (val abs de f)	Reg Alg (*tech de la dérivée*) Alg > Tvar (*apr variation*) Reg alg Tvar > Graph (*apr variation*) Graph >Graph (*tech de la val abs*)	 Demandée (racines et factorisation) demandé	
	47	F degré 4	*Rep de fonc *Extremum *Rep de fonc	Alg > Tvar *(tech dérivée 2nde*) Reg Alg (*ap variation*) Tvar > Graph (*ap variation*)	Décomposée en plusieurs tâches: déduction implicite des variations à partir du signe de f'. Tech donnée implicitement.	(signe de f '', variation de f ', éq f '(x) = 0, signe de f,' puis Tableau de variation de f). compliqué, avec param.
	48	Fonc degré 2	*Réécrit. alg *Rep de fonc *Assymptote *Position rel de courbes *Axe/Centre de symétrie. *Rep de fonc	 Alg >Tvar *(tech de la dérivée)* Reg Alg Tech de changement de repère Tvar > Graph (apr variation)	 Par contrat Attendue par contrat. Demandé (centre donné) par contrat.	Aide implicite pour tâches suivantes. Sous-tâches précisées: lim, dér, variation.

Place dans le chapitre		Type de fonctions	Tâches	Technique(s) attendue(s)	Initiative	Remarques
Problèmes	49	Fonc rationnelle	*Etude de fonction *Assymptote * Axe/Centre de symétrie *Tangente *Position rel de courbes *Comparaison de fonction *Rep de fonc	Reg Alg Tech de changement de repère Reg Alg Reg Alg Alg > Graph (*apr variation*)	par contrat - sans précision des différentes sous-tâches. Demandé (centre donné) demandé	Domaine donné.
	50	F rationnelle	*Réécrit. alg. *Parité-1 (+ Parité-2 implicite) *Variation *Rep de fonc *Assymtote *Tangente * Position rel de courbes *Rep de fonc	Reg Alg Reg Alg (*tech de la dérivée*) Alg > Tvar (*apr variation)* Reg Alg Tvar > Graph (*apr variation*)	Par contrat Demandé Demandé. par contrat	Aide implicite pour certaines des tâches suivantes. calcul de f ' en tâche indépendante.
	51	F rationnelle	*Rééc alg *Assymptote *Etude de fonction *pts d'inters *tangente *Rep de fonc *Tangente (autre) *Nombre de solutions	Reg Alg Reg Alg Alg > Graph (apr variation) Reg Alg Reg Graph	par contrat (Sans préciser les différentes sous-tâches) Par contrat	Aide implicite pour certaines des tâches suivantes Domaine donné Equation avec paramètres
	52	F rationnelle	*Rééc alg *Variation *Rep de fonc *Limites *Assymptotes *Tangente *Pts d'int *Position rel de courbes *Rep de fonc	Reg Alg (*tech de la dérivée*) Alg > Tvar (*apr variation*) Reg Alg Tvar > Graph (*apr variation*)	par contrat	Aide implicite pour certaines des tâches suivante

Place dans le chapitre		Type de fonctions	Tâches	Technique(s) attendue(s)	Initiative	Remarques
Problèmes	53	F rationnelle	*Extremum *Rep Graph	Reg alg Reg Alg (*tech de la dérivée*)	Par contrat Par contrat	Discuter d'après valeurs des paramètres
	54	F rationnelle	*Rééc alg *Etude de fonction *Comparaison avec parabole donnée. *Position rel de courbes *Rep de fonc *Inéquation	 Reg Alg Tech de limite Reg Alg Alg > Graph (*ap variation)* Reg Graph	 Par contrat (Sous-tâches précisées: lim, dér, variation) Demandé Par contrat demandée	Aide implicite pour certaines des tâches suivantes. Domaine donné.
	55	F rationnelle	*Etude de fonction *Rééc alg *Assymptote *Pts d'inters *tangente. *Axe/Centre de symétrie *Rep de fonc *Autre tâche géométrique	Reg Alg Tech de chang de repère. Alg > Grah (*ap variation*)	Par contrat- (Sous-tâches précisées: lim, dér, variation) demandé	Domaine donné Avec aide: centre donné. Utiliser tâches précédentes.
	56	F rationnelle	*Exp fonc *Etude de fonction *Tangente *Rep de fonc *Nombre de solutions	Verb/symb > Alg Reg Alg Alg > Graph (*apr variation)* Reg Graph	 Par contrat (sous-tâches comprises non précisée) demandée	Dét éq de fonc vérifiant qq conditions. Dom non précisé. Equation avec paramètres
	57	F trigonom	*Rééc alg *Etude de fonction Rep de fonc	 Reg Alg Alg > Graph (*apr variation*)	 Par contrat (sous-tâches comprises non précisées). Par contrat	Aide implicite à l'étude de fonction. Dom donné.

Place dans le chapitre		Type de fonctions	Tâches	Technique(s) attendue(s)	Initiative	Remarques
Problèmes	58 59	F trigonom	*Parité-1 *Périodicité-1 *Parité-2 *Périodicité-2 *Axe/Centre de symétrie *Int d'étude *Rep de fonc *Rep de fonc *Axe/centre de symétrie	Reg Alg Reg Alg Cadre géom Cadre géom Tech de chang de repère (À déduire de Parité-2 et Périodicité-2 et Centre de symétrie) Alg > Tvar (*tech de la derivé)* Tvar > Graph (après tableau) Technique de changement de repère	Demandé demandé Implicite implicite demandé par contrat demandé Avec aide (détail de la tech donnée	 Avec aide. =Conséquence s pour tracer la courbe. Avec aide: centre donné. Il s'agit de représenter une 2ème fonction.
	60	F trigonom	*Variation *tâche géométrique	Reg alg (tech de la dérivée) Autre tâche - cadre géométrique.	Atendue par contrat	
	61	F trigonom f(x) = 2x + cosx	*Variation *limite *Position relative de courbes. *Pts d'intersection *Tangeante * Axe/Centre de symétrie *Périodicité-1 (implicite) + Périodicité-2 *Rep graph	Reg Alg (*tech de la dérivée*) Reg alg Nouvelle tech alg. Reg Alg Alg > Graph (*apr variation*)	Demandée demandé Demandé. par contrat	 Avec aide : centre donné nouvelle tech donnée. avec utilisation implicite de la tâche du cadre géométrique précédente.
	62	Situation fonctionnelle	*Exp fonc *Variation *Extremum	Sit fonc > Reg Alg Reg Alg (*tech de la dérivée*) Reg Alg (*tech de la dérivée*)	 Attendue par contrat. Attendue par contrat.	=modélisation

Place dans le chapitre		Type de fonctions	Tâches	Technique(s) attendue(s)	Initiative	Remarques
Problème	63	Situation fonctionnelle	*Dom de déf (implicite)	Sit fonc > reg Alg		
			*Exp fonc	Sit fonc > Reg Alg		=modélisation
			*Variation	Reg Alg (tech de la déerivée)	Attendue.	
			*Existence de solution (et encadrement)	Reg alg ou tableau de var	Par contrat (étude de variations déjà faite)	Utilisation de la calculatrice pour l'encadrement
	64	Situation fonctionnelle	*Exp fonc	Sit fonc > reg Alg	Avec aide (exp donnée) attendue	=modélisation
			*Extremum	Reg Alg (*tech de la dérivée*)		
	65	Situation fonctionnelle. A = étude de fonction	A/ *Rep de fonc	Alg > Tvar (*tech de la dérivée*)	demandé	
			*Signe de fonc	Reg Tvar	contrat	
			*Tangeante * Position rel de courbes	Tech : *sens de varitions*	demandé	
			*Rep de fonc	Tvar > Graph (apr tableau)	par contrat	
		B = situation fonctionnelle (application de A)	B/ *Exp fonc	Sit fonc > Alg	Par contrat	=Modélisation
			*Comparaison de fonc -cas d'égalité.	Reg Alg	Par contrat	Ret sit. initiale
			*Exp fonc	Sit fonc > Alg	Par contrat	=Modélisation
			*Comparaison et Extremum	Reg Alg (*tech de la dérivée pour extrem.*)	Dérivée demandée	Ret situation init
	66	Situation fonct (étude de fonction sans retour à la sit initiale)	*tâche num (calcul de pourcentage)			Sert d'aide à la tâche "Exp fonc". = modélisation (avec passage guidée par le cadre num.).
			*Exp fonc	Sit fonc > Alg	avec aide.	
			*Variation	Reg Alg (*tech de la dérivée)*	par contrat	
			*Rep de fonc	Alg > Tvar (*ap variation*)		
			*Tangeante *Rep de fonc	Tvar > Graph (*apr variation)*	Par contrat	
			*Existence de solution (et encadrement)	Reg graph	Demandée	

Place dans le chapitre		Type de fonctions	Tâches	Technique(s) attendue(s)	Initiative	Remarques
Problèmes	67	Situation fonctionnelle. A = étude de fonction B = situation fonctionnelle (application de A)	A/ *Limite *Rep de fonc *Assymptote *Image/antécédent *Rep de fonc *Extremum B/ *Exp fonc *Extremum	 Alg > Tvar (*apr variation)* Cadre num ou Reg Prog. Tvar > Graph *(apr tableau)* Reg Alg (*tech de la dérivée*) Sit fonc > Alg Reg Alg (*tech de la dérivée*)	 demandée par contrat Par contrat Par contrat Par contrat	 Résultats à donner dans un tableau. =Ret sit. initial (reg graph pour conject.) Modélisation =Ret sit. initial
	68	Situation fonctionnelle	*Dom de déf (implicite) *Exp fonc (f1) *Variations *Extremum *Exp fonc (f2) *Variations *Extremum	verb/symb Sit fonc > Alg Reg Alg (*tech de la dérivée*) Reg Alg (*tech de la dérivée*) Sit fonc > Alg Reg Alg (*tech de la dérivée*) Reg Alg (*tech de la dérivée*)	 demandé par contrat Par contrat Par contrat Par contrat	=Ret sit. initial (avec aide) (avec aide) =Ret sit. initial =Ret sit. initial
	69	Situation fonctionnelle	*Exp fonc *Rééc Alg *Variations *Rep de fonc *Limite *Assyptote *Eq de droite *pt d'intersect° *Rep de fonc *Extremum	Sit fonc > Alg Reg Alg (*tech de la dérivée*) Alg >Tvar (*apr variation*) Tvar > Graph (*apr variation)* Reg Alg (*tech de la dérivée*)	 Par contrat Par contrat	 =aide pour tâches suivantes =Ret sit. initial
	70	Situation fonctionnelle	*Extremum	Reg Alg (*tech de la dérivée*)	par contrat	=Ret sit.initial

Place dans le chapitre		Type de fonctions	Tâches	Technique(s) attendue(s)	Initiative	Remarques
Problèmes	71	Situation fonctionnelle	*Rep de fonc (f1) *Variations (f2) *Rep de fonc (f2) *Comparaison	Alg > Graph Reg Alg (*tech de la dérivée*) Alg >Graph (*apr variation*) Reg Alg *(tech étude des variations de la fonction différence*)	Tech du second degré. Par contrat Demandé demandé	Exp fonc donnée (décomposée en plusieurs sous-tâches)
	72	Situation fonctionnelle	*Exp fonc *Variation *Extremum *Autre tâche	Sit fonc > Alg Reg Alg (*tech de la dérivée*). Reg Alg (*tech de la dérivée*) Situation fonc	Avec aide : Décomposé en plusieurs tâches Aide sur le signe de f'. demandé	=Modélisation . =Ret sit. initial
	73	Reg Graph (f1 tracer)	*Exp fonc *limite *Rep de fonc (f1) *Rep de fonc (f1) *Rep de fonc (f2) *Extremum *Autre Tâche	Sit fonc > Alg Alg > Tvar (*tech de la dérivée*) Tvar > Graph Alg > Tvar (*tech de la dérivée*) Reg Tvar	 demandée Par contrat Par contrat demandé	=modélisation f2 = rac (f1) =Ret sit. initial du cadre géom

4 - Tableaux des registres du manuel de Première

a - chapitre 4 : "Fonctions numériques "

Type de tâche	Registre de départ	Changement de registres	Remarques
Rep de fonction	Alg Graph Tvar Verbal/symb	Alg > Graph: 3 (tech valeur abs) Alg > Graph: 5 (chang d'or/ ou mémoire) : 1 (après var) : 4 (pt par pt) Alg > Tvar: 5 (mémoire) 3 (après var) Graph > Tvar: 2 Tvar > Graph: 4 Verbal/symb > Graph: 1	
Exp de fonction	Graph Alg & Graph	Graph > Alg : 1 (affine) Alg et Graph > Alg : 1	Ex 75: "(compléter équation de fonction)".
Rel/fonction	Graph : 1		
Reconnaître une fonction	Graph : 1		
Image/Antécédent	Alg: 4 Graph: 3		
Transfo-1	Alg: 2 Graph: 3	Implicite Dont 2 implicite	Transfo-1 implicite précède toujours transfo-2
Transfo-2	Alg: 3 Graph: 4 Tvar: 3	Dont 2 implicite	
Parité-1 8	Alg : 3 Graph :1 Symb : 4		
Parité-2 10	Alg : 5 Graph : 2 Tvar : 1 Alg	Définir la fonc sur le reste du dom + int d'étude (ex: 70). Alg > Graph : 2	"int d'étude" = "Parité-2 implicite" (avec périodicité-2)
Périodicité-1 4	Alg: 1 Graph : 1 Sumb : 2		
Périodicité-2 3	Alg	Alg > Graph : 3 (dont 2 avec parité-2)	Il s'agît de rep la fonction sur tout son dom, après déf sur un intervalle.
Dom de déf	Alg: 6		
Opération/ Composition	Alg: 5		
Variation	Alg: 14 Symb: 1 Graph: 1		
Extremum	Graph: 1		
Maj/min	Alg: 5 Graph: 1		Dont 3 avec conj graphique

Type de tâche	Registre de départ	Changement de registres	Remarques
Comparaison	Alg: 6 Graph: 6	8 exo en tout porte sur la comparaison. 2 sont uniquement dans reg graph	
Egalité	Alg: 1 Alg ou num: 1		
Eq/inéq	Alg: 3 Graph: 7		
Centre/axe de symétrie	Alg: 7		

b - chapitre 7 : "Application à la dérivation"

Type de tâche	Registre de départ	Changement de registres	Remarques
Rep de fonction	Alg Tvar Graph	Alg > Graph : 11; Alg > Tvar : 25 + 1 Tvar > Graph: 18 Graph > Graph : 1 Graph > Tvar : 1	
Exp Fonc	Verbal/symb Sit fonc	Verbal/Symb > Alg : 5 Sit fonc > Alg : 13	
Variation	Graph /Tvar: 1 Alg : 33		Au choix
Etude de fonction	Alg: 6		
Extremum	Graph Sit fonc Alg : 8	Sit fonc > Alg 11	
Dom de déf	Alg:11 Sit fonc:2	Dom de déf implicite	
Interv d'étude : 3			Traduction des propriétés de parité et de périodicité.
Im d'intervalle	Graph : 2 Alg : 2		
Bijection	Graph : 1 Alg : 2	(variation attendue mais non demandée)	
Existence/nombre de solution	Graph : 2 Verbal/symb:9		
Comparaison	Sit fonc: 2 Alg: 1 Alg: 1	Sit fonc > Alg Alg (tech des variation de la différence)	(+Sit fonc > Graph pour TP)
Signe	Alg : 1 Tvar : 1		
Axe/centre de sym	Verbal/symb	Verbal/symb > Alg : 6	Pas d'utilisation du registre graphique
Transfo-1 et 2			12:transfo-1 implicite + transfo-2

Type de tâche	Registre de départ	Changement de registres	Remarques
Im/antécédent	Sit fonc Alg	Sit fonc > Alg (ret sit init) Cadre numérique ou de prog Résultat sous forme de tableau	
Parité-1	Alg : 6	Suivi de parité-2 dans 4 cas	
Périodicité-1	Graph : 2 Alg : 6		Suivi de périodicité-2 dans a cas
Assymptote/ Limite/tangente/ Pt d'inters./ Posit. rel. de courbes/éq de droite	Tâches cadre géom.:19	Reg algébrique	

ANNEXE DU CHAPITRE IV

1 -Tableau des tâches et techniques du manuel de 10ème

a - chapitre 1 : "Relations et fonctions"

Section 3 : "Fonctions"

Place dans le chapitre		Type de fonction	Tâche	Technique(s) attendue(s)	Initiative laissée à l'élève	Remarques
Exercices en classe	1	Couples ordonnés	*Rel/fonction	Reg des couples ordonnés	Par contrat	
	2	Fonc 2^{nd} degré	*Image	Reg alg (par substitution)	Par contrat	
	3	Registre graphique	*Rel/fonction	Test de la droite verticale	demandé	
Exercices et questions	4	Fonc affine	*Image *Autre tâche algébrique	Substitution de valeurs	Par contrat	
	5	Fonc par intervalle	*Image	Substitution de valeurs	Par contrat	
	6	Sit fonctionnelle	*Exp fonc	Sit fonc > Alg	Par contrat	
Activité supplém.	7	Loi ensembliste (fonction affine)	*Image *Rel/fonction	Tech num (Substitution de valeurs) *Reg verbal/symb	Par contrat Par contrat	La première tâche est une aide implicite pour la seconde
Activité d'approfondissement	8	Loi ensembliste ($x^2 + y^2 = 13$)	*Intersect de courbes *Rel/fonc	*Cadre géom> Cadre alg Reg alg	 Par contrat	La première tâche est une aide implicite pour la seconde
	9	Fonction par intervalle (affine et 2^{nd} degré)	*Image	Substitution de valeurs	Par contrat	

Section 4 : "Fonctions particulières"

Place dans le chapitre		Type de fonction	Tâche	Technique(s) attendue(s)	Initiative laissée à l'élève	Remarques
Exercices en classe	1	Reg graphique	*Rel/fonction *Fon/injection	Test droite verticale Test droite horizontale	Par contrat Par contrat	Par contrat car registre graphique donné.
	2	Fonction constante et affine	* Rep graph *Fon/injection	Tech de la fonc affine Test droite horizontale	Par contrat demandé	
Exercices et questions	3	affine	*Rep graph *Fon/injection	Tech de la fonc affine Test droite horizontale	Par contrat Par contrat	
	4	Fonction second degré	*Rep graph *Fon/injection	Tech de la fonc affine Test droite horizontale	Par contrat Par contrat	
Activité supplémentaires	5	Reg verbal (axe ox)	*Rel/fonction	(*verbal >Alg) puis justification algébrique	Par contrat mais solution graphique possible	
	6	Idem avec l'axe oy				
	7	$f(x) = -x$	*Reconnaissance de fonction	Reg alg	Par contrat	("s'agit-il de la fonction identité ?")
Activité d'approfondissement	8	Fonc 2^{nd} degré	*antécédent implicite *fon/injection	Reg alg Reg alg	Par contrat demandé	(déterm x pour que $f(x) = 5$). La tech alg est attendue et la première tâche en est une aide

Section 5 : "Fonction valeur absolue"

Place dans le chapitre		Type de fonction	Tâche	Technique(s) attendue(s)	Initiative laissée à l'élève	Remarques
Exercices en classe	1	Fonc avec val absolue	*rééc alg *Image	 Substitution de valeurs	 Par contrat	
	2	Fonc avec val absolue	*rééc alg *Rep graph	 Alg > graph	 Par contrat (tech du cours)	
	3	Equation	Cadre algbérique			
Exercices et questions	4	Fonc avec val absolue	*rééc alg *Image *Rep graph *Fon/injection	 Substitution de valeurs Alg > graph Reg Graph	 Par contrat Par contrat (tech du cours) Par contrat	
	5	Fonc avec val absolue	*rééc alg *Rep graph	 Alg > Graph	 Par contrat (tech du cours)	
	6	inéquation	Cadre algébrique			
	7	Graphique et algébrique	*Exp fonc	Reg graph+alg > Reg graph		
Activité supplémentaires	8	Fonc val absolue	*Fon/injection	Tech graph ou numérique	Tech non précisé (il n'est pas demandée de rep praph la fonction)	
Activité d'approfondissement	9	Fonc avec val absolue f(x)= x-2 +1	*rééc alg *Transfo-1 et -2 (implicite)	Demandé demandé		"déduire la courbe de f(x)= x-2 +1 de celle de f(x)= x-2 "
	10	Fonction du second degré f_1 Puis $f_2 = f_1$	*Rep graph (f_1) *Rep graph (f_2)	Tech du second degré Tech de la valeur absolue	Contrat demandé	$f_2(x) = f_1(x)$ "déduire f_2 de f_1"

Section 6 : "La Fonction partie entière"

Place dans le chapitre		Type de fonction	Tâche	Technique(s) attendue(s)	Initiative laissée à l'élève	Remarques
Exercices en classe	1	Fonction de type partie entière	*Rééc alg *Rep graph	Alg > Graph	demandé	
	2	Equation	(cadre alégbrique)			
Exercices et questions	3	Fonction de type partie entière	*Rééc alg *Rep graph	Alg > Graph	demandé	
	4 à 6	Equations ou inéquation	(cadre algébrique)			
	7	Fonction de type partie entière	*Rééc alg *Rep graph	Alg > Graph	demandé	
Activité supplém.	8	f1(x) = [x] et f2(x) = f_1	*Rep graph de f1 *Rep graph de f2	Tech de mémoire Tech de la valeur absolue	Par contrat Par contrat	
Activités d'approfondissement	9	F(x) = [x] -x	*Rééc alg *Rep graph	Alg Graph	Par contrat	
	10	Activité numérique	Déterminer [5]; [8/3]; [3 63]			

Section 7 : "Opérations sur les fonctions"

Place dans le chapitre		Type de fonction	Tâche	Technique(s) attendue(s)	Initiative laissée à l'élève	Remarques
Exercices en classe	1	Cadre numérique	*Opérations (+,-, x, /)	Tech num		f(1) = …et h(1)=… Calculer (f+h)(1)
	2	Fonctions cube et 2^{nd} degré	*Opérations (+,-, x, /) *Dom de déf	Reg alg Reg alg	Par contrat Par contrat	

Place dans le chapitre		Type de fonction	Tâche	Technique(s) attendue(s)	Initiative laissée à l'élève	Remarques
Exercices et questions	3	Fonctions affine et racine carré	*Opérations (+,-, x, /) *Dom de déf	Reg alg Reg alg	Par contrat Par contrat	
	4	Degré 2 et rationnelle	*Opérations (divisions) *Dom de déf	Reg alg Reg alg		
	5	Reg symbolique/algé (équation de fonction donnée avec param)	*Exp fonc	Verbal/symb > Alg	Par contrat	Traduire des données fonc (multiplication et image) en données équationelles
	6	Fonction 2^{nd} degré avec param.	*dom de déf	Reg Alg	Par contrat	Se ramène à des résolutions d'équations
Activité supplém.	7	Fonctions affine et du second degré	*opérations "déterminer ((fxg) / h)(x)" *Dom de déf	Reg alg Reg alg	Par contrat Par contrat	
Activité d'approfondissement	8	Fonctions de degré 3 données avec des paramètres à établir	*Exp fonc	Verbal/symb > Alg	Par contrat	Traduire des données fonc (information sur le domaine) en données équationnelles
	9	F(x) = $(x^2-1)/[x]$	*Dom de déf	Reg alg	Par contrat	Se ramène à des résolutions d'équations

Section 8 : "Composition de fonctions"

Place dans le chapitre		Type de fonction	Tâche	Technique(s) attendue(s)	Initiative laissée à l'élève	Remarques
Exercices en classe	1	Cadre numérique	*Calculs d'images par fonctions composée	Substitution de valeurs	Par contrat mais tech alg possible	
	2	Fonctions affines	*Composition *Rep graph (de la fonction composée)	Reg alg Alg > Graph	Par contrat Par contrat	
	3	Cadre numérique (Racine cubique et affine)	*Calculs d'images par fonctions composée	Substitution de valeurs	Par contrat mais tech alg possible.	
Exercices et questions	4	Fonctions affines	*Composition *Rep graph (de la fonction composée)	Reg alg Alg > Graph	Par contrat Par contrat	
	5	Fonctions affines	*Composition	Reg alg	Par contrat	
	6	Fonction cube et racine cubique	(Composition) *Antécédent implicite	Reg alg Reg alg	Par contrat Par contrat	Déterminer un antécédent par une fonction composée se ramène à une résolution d'équation
	7	Affine et second degré	*Composition	Reg alg	Par contrat	La variable est x^2 (équivalent à une composition de 3 fonctions)
	8	Affines (registres verbal et alg)	*image par fonctions composées	Substitution de valeurs Ou Tech Alg (après dét de la f composée)	2 tech possibles	
Activités supplém.	9	Une fonction affine	*image par fonction composée	Substitution de valeurs Ou Tech Alg (après dét de la f composée)	2 tech possibles	La difficulté viendrait de "f of"

Place dans le chapitre		Type de fonction	Tâche	Technique(s) attendue(s)	Initiative laissée à l'élève	Remarques
Activités d'approfondissement	10	Fonction identité et fonction de degré 2	*Composition *Conclusion concernant l'élément neutre de la fonction	Reg alg	Par contrat	
	11	$F(x^2)=x^4+5x^2-1$	*Express fonc	Tech alg		"déterminer f(x) à partir de f (x^2)"

Section 9 : "Fonction réciproque"

Place dans le chapitre		Type de fonction	Tâche	Technique(s) attendue(s)	Initiative laissée à l'élève	Remarques
Exercices en classe	1	Ens de couples ordonnées	*fon/injection *Réciproque	Reg couples ordonnés. Reg couples ordonnés.	Par contrat Par contrat	
	2	Cadre numérique	*Calculs d'images	Tech num en application directe du théorème		"dét fof^{-1} (5)"
	3	Fonctions affines	*Réciproque	Reg alg	Par contrat	
Exercices et questions	4	Fonctions affines	*Réciproque *Rep graph de la réciproque	Reg alg Alg > Grah	Par contrat Par contrat	 Car la tech géométrique n'est pas connue
	5	$f(x)=x^3 + 1$ et $g(x)=rac^3(x-1)$	*Réciproque	Reg Alg	demandé	"montrer que 2 fonctions sont réciproques"
	6	Langage naturel	*Réciproque	Verbal > Alg	Par contrat	

Place dans le chapitre		Type de fonction	Tâche	Technique(s) attendue(s)	Initiative laissée à l'élève	Remarques
Activités supplém.	7	Fonctions affines	*Image par réciproque	*technique du cours. + *technique d'inversion	Demandé Par contrat	Après déterm. de la réciproque (inversion de l'image et l'antécédent)
Activités d'approfondissement	8	Une fonction affine et sa réciproque	*Rep graph *Constater la symétrie % à (y = x)	Alg > graph	Par contrat	
	9	f(x) = 1/x	*Réciproque	Reg graph	Par contrat	Le difficulté vient de ce que $f = f^{-1}$

Section 10 : "Applications"

Place dans le chapitre		Type de fonction	Tâche	Technique(s) attendue(s)	Initiative laissée à l'élève	Remarques
Exercices en classe	1 à 3	*Rep de fonc	Sit fonc >Tval	Tech numérique		technique algébrique de détermination de la loi fonctionnelle peu probable.
Exercices et questions	4	*Rep de fonc *Dom de déf (implicite) *Dom de déf (explicite)	Sit fonc >Tval Sit fonc + tval Reg alg	Tech numérique Tech num Tech alg	Par contrat Par contrat Par contrat	
	5	*Rep de fonc *antécédent (implicite)	Sit fonc >Tval Sit fonc +Tval	Tech numérique Tech num	Par contrat Par contrat	
	6 et 8	*Exp fonc *Image	Sit fonc > Alg Reg Alg	Tech alg Tech num de substitution	Par contrat (mais tech num possible)	Il n'est pas exclu que les élèves démarrent sur une tech num.
	7	*Exp fonc *Réciproque	Sit fonc > Alg Reg Alg	Tech alg Tech alg	Par contrat (mais tech num possible) Par contrat	Il n'est pas exclu que les élèves démarrent sur une tech num.

Place dans le chapitre		Type de fonction	Tâche	Technique(s) attendue(s)	Initiative laissée à l'élève	Remarques
Activité d'approf.	9	*Exp fonc	Sit fonc > Alg	Tech alg	Par contrat (mais tech num possible)	Il n'est pas exclu que les élèves démarrent sur une tech num.

b - chapitre 7 : "Fonctions trigonométriques"

Section 7 : "Représentations graphiques de fonctions"

Place dans le chapitre		Type de fonction	Tâche	Technique(s) attendue(s)	Initiative laissée à l'élève	Remarques
Exercices en classe	1	F(x)= cos x	*Rep graph sur un intervalle	Tech de fonc cosinus		
	2	F(x)= - cos x	* Rep.Graph sur un intervalle	Tech de fonc cosinus + tableau de valeurs		
	3	F(x)=a sinus(bx+c)	*Rep.Graph sur R *amplitude *période	Tech de fonc trigon Reg graph Reg graph	 Contrat (+ formule)	 Formule pour contrôle d'erreur
Exercices et questions	4	F(x)=a sin(bx+c)	*Rep.Graph sur R *amplitude *période	Tech des fonc trigo Reg graph Reg graph		
	5	F(x)= - 2cos x	Rep.Graph sur un intervalle	Tech de fonc cos /tableau de valeurs		
	6	F(x)=a sin(bx+c)	*Rep.Graph sur R *amplitude *période	Tech de fonc cos /tableau de valeurs Reg graph Reg graph		
	7	F(x)=a cos (bx+c)	*Rep.Graph sur R *amplitude *période	Tech de fonc cos /tableau de valeurs Reg Graph Reg graph		
	8	F(x)=a cos (bx+c) + d	*amplitude *période *Rep graph sur R	Calcul Calcul Tech de la période/amplitude + tableau de valeurs		

Place dans le chapitre		Type de fonction	Tâche	Technique(s) attendue(s)	Initiative laissée à l'élève	Remarques
Activité supplémentaires	9	F(x) = cos x	*Rep graph sur un intervalle	Tech de la fonc cosinus		
	10	F(x) = a sin x	*Rep graph sur un intervalle	Tech de la fonction sinus + tableau de valeurs		
Activité pour aller plus loin	11	F(x)= sinx	*(rep graph de sin x) *rep graph	Tech de la fonction sinus (implicite) tech graph de val abs	 contrat	
	12	F(x)=a cos (bx+c) + d	*amplitude *période *Rep graph sur R	Calcul Calcul Tech de la période/amplitude + tableau de valeurs		

2 -Traduction de quelques sections des manuels de 10ème

a -Traduction de la section 3 du manuel de l'élève : "La fonction"

Dans ce chapitre, nous verrons le concept de fonction. La fonction est un cas particulier de relation comme on peut le voir à travers les exemples suivants :
Exemple 1 : La figure ci-contre représente la relation f (un graphique constitué de 5 points est représenté). Ecris f sous la forme d'un ensemble de couples ordonnés, puis donne son domaine de définition et son but.
solution: f = {(-2, 0), (0, 1), (1, 3), (2, -1), (3, 1)}.
domaine de f = {-2, 0, 1, 2, 3}.
but de f = {0, 1, 3, -1, 1}.

exemple 2: représente graphiquement la relation g, et donne son domaine et son but,
g = {(-3, 1); (-2,-2);(0,0);(1,0);(2,-1)}.
solution: la représentation graphique est faite.
domaine de g = {-3, -2, 0, 1, 2}
but de g = {1, -2, 0, -1}

Remarque que dans les deux exemples ci-dessus il n'existe pas deux couples ayant le même premier terme et qui diffèrent sur les seconds termes, donc chaque élément du domaine est lié à un élément unique du but. Les relations f et g sont appelées des fonctions.

définition : la fonction est une relation qui relie chaque élément de son domaine de définition à un élément unique de son but.

Et si le couple (x, y) appartient à la fonction f alors y est appelé l'image de x par la fonction f, et on le symbolise par y = f(x). Dans ce cas, y est appelé une fonction de x et est symbolisé parfois par f(x).
Dans la fonction f = {(2, 6), (3, 5), (1, 3), (5, 7)}, on a f(2) = 6, f(3) = 5, f(1) = 3 , f(5) = 7.
exemple 3: laquelle des relations suivantes est une fonction ? justifie ta réponse.
f = {(-1, 2), (1, 3), (2, 3), (0, 4)}.
g = {(-2, 1), (-1, 0), (1, 3), (1, 4)}.
solution: la relation f est une fonction car chaque élément du domaine
{-1, 0, 1, 2, }est lié à un élément unique du but {2, 3, 4}.
La relation g, par contre, n'est pas une fonction parce que le réel 1 du domaine est lié à deux éléments différents du but, qui sont 3 et 4.
exemple 4: montre si la relation g = {(x, y) / y = x + 3, x ∈ R} est ou n'est pas une fonction.
solution: on remarque à partir de la loi de la relation, y = x + 3 , que l'image de chaque élément a trois unités de plus que lui. Par exemple: le réel 2 du domaine est lié au réel 5 du but, le réel -1 du domaine est lié au réel 2 du but, ainsi de suite...
De façon générale, on constate que tout élément x du domaine est lié à un élément unique y du but car y = x + 3, donc f est une fonction.

exemple 5: montre laquelle des relations f, g et h suivantes est une relation.
(3 graphiques sont tracés, le premier est constitué de 5 points, le deuxième est une droite, et le troisième est une courbe qui ne représente pas une fonction).
Solution: en regardant chacune des représentations graphiques, nous remarquons que la relation f = {(-2, 1), (-1, 2), (0, -1), (1, 3), (3, 0)}et que chaque élément du domaine {-2, -1, 0, 1, 3} est lié à un élément unique du but {-1, 1, 2, 3}. Donc f est une fonction. En ce qui concerne les fonctions g et h, tu ne peux pas les écrire sous forme de deux ensembles finis de couples ordonnés car le domaine de chacune d'elle est infini. Aussi, nous allons nous en remettre au **test de la droite verticale,** qui dit que **: la relation est une fonction si toute droite verticale (parallèle à l'axe des y), ne coupe la courbe de la relation qu'en un point unique.**

Ainsi, sur la figure (1-6) précédente, nous remarquons que toute droite verticale qui coupe la courbe de la relation g, la coupe en un point unique, g est donc une fonction. En ce qui concerne, la relation h, on remarque qu'il existe des droites verticales coupant chacune d'elles la courbe en deux points, en conséquence h n'est pas une fonction, parce que le passage de la droite verticale par les deux points (1, 1) et (1, -1) signifie que l'élément 1 du domaine a deux images différentes dans le but, 1 et -1, ce qui contredit la définition de la fonction.

A partir de maintenant, nous étudierons les fonctions dont les domaine et but sont l'ensemble des nombres réels R, ou un de ses sous-ensembles. Nous exprimerons la fonction par sa loi, ou par le graphique qui la représente.

exemple 6: $f(x) = 2x - 1$, détermine $f(0)$, $f(1)$, $f(-3)$ puis représente $f(x)$ graphiquement.
solution: $f(0) = 2*0 - 1 = -1$.
$f(1) = 2*1 - 1 = 1$.
$f(-3) = 2*(-3) - 1 = -7$.
Tu as déjà appris que la fonction $f(x) = ax + b$ est appelée fonction affine et que sa représentation graphique est une droite. Pour la représenter il faut placer au moins deux points dans le repère cartésien, puis on trace la droite qui passe par ces points comme dans la figure (1-7).

X	0	1	-1
Y	-1	1	-3

Exercices en classe :
1) laquelle des deux relations suivantes est une fonction et laquelle n'en est pas une ?
$f = \{(-1, 5), (0, 2), (3, 1), (4, 1)\}$
$g = \{(1, 1), (1, 2), (3, -2), (5, 4)\}$
2) $f(x) = x^2 + 3$, détermine $f(-2)$, $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$.
3) montre si les relations f, g, h suivantes sont ou non des fonctions en utilisant le test de la droite verticale. (f est donné par 5 points formant une fonction, g est donnée par courbe de fonction et h est un cercle)

Exercices et questions :
4) $f(x) = 1 - 2x$, détermine $f(4)$, $f(\sqrt{2})$, $f(-1)$. Et si $a \neq b$, montre que $(f(b) - f(a)) / (b-a) = -2$.
5) $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \geq 1 \\ 3x - 2, & \text{si } x < 1, \end{cases}$ détermine $f(2)$, $f(1)$, $f(-1)$.
6) Une usine de réfrigérateurs produit x réfrigérateurs par jour. Le coût de production d'un réfrigérateur est de 250 dinars. L'usine paie en plus une somme de 500 dinars en frais divers par jour. Détermine la fonction qui relie le coût de production avec le nombre de réfrigérateurs produits par jour.

b -Traduction de la section 3 du manuel du professeur : "La fonction"

nombre de périodes : 2
Les objectifs: 1) que l'élève sâche ce qui fait d'une relation une fonction.
2) qu'il utilise le test de la droite verticale pour différencier une fonction des autres relations.

Méthodes et activités:
Préparation: -Ecris les relations suivantes au tableau, et demande aux élèves de préciser les éléments du domaine qui sont liés à un élément unique du but, et précise-leur que dans cette section, on insistera sur ce type de relation.

$R_1 = \{(1, 1), (2, 5), (3, 2)\}$
$R_2 = \{(1, 1), (1, 2), (3, 2), (2, 5)\}$
$R_3 = \{(1, 1), (2, 1), (3, 2)\}$

Le cours:
- Discute avec les élèves des exemples (1), (2) au tableau. Demande-leur de donner les éléments du domaine qui sont liés à un seul élément du but. Appelle ces relations des fonctions.
- Aide-les à énoncer la définition de la fonction à leur façon, puis discute de la définition donnée dans leur manuel, en insistant sur la notation $y = f(x)$.
- discute avec eux des exemples (3) et (4) à la lumière de la définition puis demande-leur de résoudre dans leur cahier les exercices en classe numéro 1 et 2, et vérifie leur réponses.
- Explique-leur les raisons de l'utilisation du test de la droite verticale, et cela du fait de la difficulté de connaître tous les éléments du domaine et leurs images quand le domaine est infini.
- discute avec eux de l'exemple (5), en éclaircissant l'intérêt de l'utilisation du test de la droite verticale qui permet de différencier une fonction d'un autre type de relation.
- discute avec eux de l'exemple (6), demande-leur d'utiliser le test de la droite verticale une fois le graphe tracé, puis demande-leur de résoudre, dans leur cahier l'exercice en classe numéro 3, et vérifie leur réponse.

Activités de révision:
- représente graphiquement la relation $R = \{(-1, 1), (0; -1), (1, 2), (1, 3), (3, 4)\}$. Peux-tu tracer une droite parallèle à l'axe des y, et qui passe par plus d'un des points représentant cette relation, Si cela est, qu'est-ce que cela signifie ?

Activités supplémentaires:
-Si $R = \{(x, y) / x = y + 1\}$, donne les valeurs de y quand $x = 3$, R est-elle une fonction et pourquoi ?

Evaluation:
- interroge les élèves pendant le cours et tiens compte de leurs réponses.
- remarque la qualité de la résolution des exercices en classe et discutes-en avec eux.
- Demande leur de faire à la maison les exercices de 4 à 6, et vérifie leur travail.

Classification des exercices:

de base	moyen	au-dessus du niveau
1 - 3	4 et 5	6

Activités d'approfondissement
- Donne les coordonnées des points d'intersection de la droite verticale d'équation $x = 3$ avec la courbe de la relation $R = \{(x, y) / x^2 + y^2 = 13\}$. Cette relation représente-t-elle une fonction ?

$$- f(x) = \begin{cases} x^2 - x + 1, \text{ si } x \leq 0 \\ 5x + 1, \text{ si } x > 0; \end{cases}$$ détermine f(-2), f(0), f(3)

(les réponses sont données ici).

Suit un encadré intitulé : **" Réponses et solutions"**, qui donne les solutions de tous les exercices du manuel de l'élève.

c -Traduction de la section 9 du manuel de l'élève : "Réciproque de fonction"

La figure-1 ci-contre représente un diagramme sagittal de la fonction f.
(Représentation de la figure 1).

Et si tu inverse le sens des flèches dans le diagramme sagittal précédent, tu obtiens le diagramme sagittal suivant (le nouveau diagramme est également représenté).
En regardant bien ce diagramme sagittal, tu remarques qu'il représente une nouvelle fonction g. Tu peux représenter chacune de ces deux fonctions sous la forme d'un ensemble de couples ordonnés, tu obtiens alors:
f = {(1; 5); (2; 7); (3; 6); (4; 8)}.
g = {(5; 1); (7; 2); (6; 3); (8; 4)}.
En comparant ces deux ensembles, tu remarques que chaque couple ordonné dans g a été obtenu par l'inversion des premier et second termes du couple correspondant dans f. La fonction g est appelée fonction réciproque de f et est représenté par le symbole
f^{-1}.

La figure ci-contre représente le diagramme sagittal de la fonction h (Représentation de la figure 2). En inversant le sens des flèches de ce diagramme tu obtiens un nouveau diagramme sagittal (diagramme également représenté).
En observant ce diagramme tu peux remarquer facilement qu'il ne représente pas une fonction car le nombre 6 a deux images 2 et 3, ce qui contredit la définition de fonction.

Ce qui précède nous montre que la fonction f représenté par le diagramme 1 est une fonction bijective, et que l'opération d'inversion des flèches a permis d'obtenir la fonction g. Alors que la fonction g n'étant pas une fonction, l'opération d'inversion des flèches ne permet pas d'obtenir une fonction mais une relation.

De façon générale, pour qu'une fonction f(x) ait une réciproque, il faut que f(x) soit bijective. Cette fonction réciproque est représenté par le symbole f^{-1}.

Exemple 1: Soit f = {(1; 1); (2; 4); (3; 9); (4; 16)}une fonction bijective. Détermine f^{-1} sous la forme d'un ensemble de couples ordonnés puis détermine f(2), f(3), $f^{-1}(4)$,
$f^{-1}(9)$, $(f o f^{-1})(4)$, $(f^{-1} o f)(3)$.
Solution:
....

Tu a dû remarquer dans cet exemple que :
$(f o f^{-1})(4) = 4$
$(f^{-1} o f)(3) = 3$
Soit que l'image de l'élément est l'élément lui-même.

De façon générale:
Si f(x) est une fonction bijective, et $f^{-1}(x)$ est sa réciproque alors:
$(f o f^{-1})(x) = x$ et $(f^{-1} o f)(x) = x$.
La fonction résultant de la composition d'une fonction et de sa réciproque est la fonction identité f(x) = x.

Exemple 2: Représente graphiquement f(x) = 2x + 1 et montre que f(x) est bijective. Détermines $f^{-1}(x)$.
Solution
....

$(f o f^{-1})(x) = x$ donc $f(f^{-1}(x)) = x$
On pose f(m) = x avec 2m + 1 = x soit que $m = f^{-1}(x)$
2m = x - 1
m = (x-1) / 2 donc $f^{-1}(x) = (x-1) / 2$.

Exemple 3:

Montre lesquelles de ces fonctions f, g et h sont des fonctions bijectives en utilisant le test de la droite horizontale puis détermine les fonctions réciproques (les fonctions sont données graphiquement et algébriquement: $f(x) = x+1$; $g(x) = x^3$; $h(x) = x^2$.

……

$(fof^{-1})(x) = x$, donc $f(f^{-1}(x)) = x$;
on pose $f^{-1}(x) = m$ alors $f(m) = x$

$$m+1 = x$$
$$m = x\text{-}1 \text{donc } f^{-1}(x) = x\text{-}1.$$

$(hoh^{-1})(x) = x$, donc $h(h^{-1}(x)) = x$;
on pose $h^{-1}(x) = l$; alors $f(l) = x$

$$l^3 = x$$
$$l = {}^3\ x \text{ donc } f^{-1}(x) = {}^3\ x.$$

Exercices en classe: (…)

Entraînement et questions: (…)

d -Traduction de la section 9 du manuel du professeur : "Réciproque de fonction"

Nombre de périodes d'enseignement: 2
Les objectifs: 1) Que l'élève comprennent le concept de fonction réciproque.
2) Qu'il détermine la loi de la réciproque d'une fonction et qu'il l'utilise pour déterminer des images d'éléments.

Questions et activités:
Préparation du cours: - Représente plusieurs diagrammes sagittaux de fonctions définies sur des ensembles finis dont certaines sont des fonctions bijectives et d'autres pas, demande aux élèves d'inverser le sens des flèches et de constater lesquels d'entre-eux représentent encore des fonctions.
- Discute avec les élèves des deux premiers exemples résolus du manuel de l'élève.

Le cours : aide-les à déduire la condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction en soit toujours une après inversion du sens des flèches, puis éclaircis cette condition; utilise les symbole f^{-1}, g^{-1},… , selon le cas, d'après les symboles de la fonction d'origine.

- Discute avec eux de l'exemple résolu 1, en insistant sur l'égalité $(fof^{-1})(x) = x$ et $(f^{-1} of)(x) = x$.

- Discute avec eux des deux exemples résolus 2 et 3, en insistant sur la détermination de la loi de la fonction $(f^{-1})(x)$ en utilisant la règle $(fof^{-1})(x) = x$.

- Demande leur de résoudre les exercices en classe de leur manuel dans la salle de classe, vérifie leurs réponses et discute avec eux de leurs solutions.

Activité de révision
$f(x) = 3x-1$; $g(x) = (1+x)/3$; détermine (fog) (2) et (gof) (3).
$f(x) = 2x+4$; $g(x) = (x-4)/2$; détermine (fog) (x) et (gof) (x).
$f(x)= {}^3\ x$ et $g(x) = x^3$; détermine (fog) (5) et (gof) (-2).

Activités supplémentaires

…….

Evaluation
Pose-leur des questions et assure-toi de leur bonne participation.

Les exercices
Elémentaires: 1, 2, 3
Moyens: 4
Au dessus du niveaux: 5; 6

Activités d'approfondissement:

1) Représente la courbe de la fonction 2x+1 ainsi que celle de la fonction (x-1)/2 dans le même repère et montre qu'elles sont symétriques par rapport à la droite y =x.
2) f(x) = 1/x, pour x différent de 0. Détermine $(f^{-1})(x)$.

Suit un encadré intitulé : " **Réponses et solutions",** qui donne les solutions de tous les exercices du manuel de l'élève.

e -Traduction de la section 10 : "Révision " du manuel de l'élève

1- soit f ...(f est donné par l'ensemble de ses couples) Représente-la graphiquement et détermine, par le test de la droite verticale, s'il s'agit d'une fonction.

2- colorie la partie du repère cartésien qui représente la relation $\Re = \{ (x,y)$ t.q $x,y \in \Re$ et $-1\leq x \leq 2,\ 0 \leq y \leq 3\}$.

3- écris la loi qui décrit la relation $\Re = \{ (0,6); (1,5); (2,3); (3,3); (4,2); (5,1); (6,0) \}$.

4- $\Re = \{ (x,4); (2,3); (5,6)\}$donne une valeur de x qui fait que $\Re$ n'est pas une fonction.

5- exprime f par sa loi et représente-la graphiquement, $f = \{ (x,3)$ t.q $x \in R \}$.

6- donne une valeur de a qui fait que f n'est pas une injection, $f = \{ (-2,1); (1,0); (0,a); (1,2)\}$.

7- soit $f(x) = x^2 - 2x - 3$, donne l'ensemble des solutions de chacune des équations suivantes : f(x) = 0 et f(x) = 5.

8- donne le domaine de définition et le but de $f = \{ (x,y)$ t.q $y = 4 - 3x$ avec $x \in N$ et $x \leq 6\}$; si f est une injection donne la loi de f^{-1}.

9- soit $f(x) = \begin{cases} [x]; & \text{si } x > 6 \\ x^2 - x - 1; & \text{si } x \leq 6 \end{cases}$

détermine f(-5,3); f(0); f(2) et f(5).

10- soit f(x) = 2 détermine f(0); f(2); f(2x); $f(x^2)$.

11- donne l'ensemble des solutions de chacune des équations suivantes : $|2x + 1| = 3$ et $|x^2 -1| = 1$

12- donne l'ensemble des solutions de chacune des inéquations suivantes $|x| \geq 4$; $|2x - 1| < 3$.

13- soit $f(x) = |1/2x - 1|$, écrit f sans le symbole valeur absolue puis représente la.

14- donne l'ensemble des solutions de chacune des équations suivantes $[2x] = -1$ et $5 + [1/2x] = 3$.

15- soit $f(x) = 1/x$ et $g(x) = 1-x^2$, donne la loi et le domaine de définition de chacune des fonctions suivantes : $(f+g)(x)$; $(f*g)(x)$; $(f/g)(x)$.

16- si $f(x) = 2/3x + 1/2$, détermine $f^{-1}(x)$, puis $f^{-1}(0)$ et f^{-1} $(1/2)$.

17- soit $f(x) = 2x + 3$ et $g(x) = x^2$, calcule $(fog)(2)$, $(fof)(0)$, $(gof)(1)$, $(gog)(-1)$, $(fof^{-1}(3)$, $(go\ g^{-1})(1)$.

18- soit $f(x) = x / 1+x$, $g(x)$, $= x^2$ et $h(x) = 1 - 2x$ détermine $((fog)oh)(2)$, $((goh)of)(0)$, $((fog)oh)(x)$, $(ho\ g^{-1})(x)$.

3 - Tableau des tâches et techniques du chapitre "Exponentielle et logarithme" du manuel de 11ème

Section 1 : "Fonctions exponentielles"

Place dans le chapitre		Type de fonction	Tâche	Technique(s) attendue(s)	Initiative laissée à l'élève	Remarques
Exercices en classe	1; 2	Travaux numériques de calculs de puissances				
	3	Fonctions exponentielles f1=3^x et f2=$^{3-x}$	*Rep Grah *Rep Graph *tâche géom	Alg > Graph (*Tech num*) Alg > Graph (*Tech num)* Lecture graphique	Par contrat Par contrat	"Vérifie que les 2 fonctions sont symétriques % (Oy)"
Exercices et questions	4	Fonctions exponentielles f1=$(1/2)^{x-1}$ et f2= 2^{x+1}	*Rep Graph *Rep Graph *tâche géom	Alg > Graph (*Tech num)* Alg > Graph *(Tech num*)	Par contrat Par contrat	
	5	Fonctions par intervalles (f(x)=4^x sur [-2; 0] et 4^{-x} sur [0; 2])	*Rep Graph	Alg > Graph (*Tech num)*		L'expression de la fonction sur chaque intervalle est exponentielle
	6	Situation fonctionnelle	*Rep graph *Image	Alg > Graph (*Tech num)* Tech num (*substitution de valeurs*)	Par contrat Par contrat	La détermination graphique d'image ne fait pas partie du contrat
	7	Fonctions exponentielles	*Rep graph *Rep graph	Alg > Graph *(tech num)* Alg > Graph *(tech num)*	Par contrat Par contrat	Les deux fonctions ont la même expression alg mais diffèrent sur l'intervalle de définition
Activités supplémentaires	8	Fonction racine (f1) et fonction exponentielle (f2)	*Dom de déf (f1= $(x)^{1/2}$) *But (f1) *Rep graph (f1) *idem pour (f2= $(1/2)^x$)	Reg alg Reg Alg Alg > Graph *(tech num)*	Par contrat Par contrat Par contrat	Comparaison de fonctions
	9	Fonctions exponentielles	*Rep graph	Alg > Graph *(tech num)*	Par contrat	

b - Section 3 : "Fonctions logarithmes"

Place dans le chapitre		Type de fonction	Tâche	Technique(s) attendue(s)	Initiative laissée à l'élève	Remarques
Exercices en classe	1 à 3	Travaux numériques de calculs de logarithmes et d'exponentiels				
	4	Fonctions logarithmes	*Dom de déf	Reg Alg	Par contrat	
Exercices et questions	5	Fonctions logarithmes	*Rep Grah	Alg > Graph (*Tech num)*	Par contrat	
	6	Fonction logarithme définit sur un intervalle	*Rep Graph	Alg > Graph (*Tech num)*	Par contrat	
	7 et 8	Travaux algébriques				
	9	Situation fonctionnelle	*Rep graph *Antécédent	Alg > Graph *(tech num)* Reg Graph	Par contrat demandé	Expression fonctionnelle donnée
	10	Situation fonctionnelle	*Antécédent	Sit fonc > Reg alg	Par contrat	Expression fonctionnelle donnée
Activités supplémentaires	11 et 12	Travaux algébriques				
	13	Situation fonctionnelle	*Antécédent	Sit fonc > Reg Alg	Par contrat	Expression fonctionnelle donnée

4 - Tableau des tâches et techniques du chapitre "Applications de la dérivation" du manuel de 12ème

Section 3 : "Croissance, décroissance"

Place dans le chapitre		Type de fonction	Tâche	Technique(s) attendue(s)	Initiative laissée à l'élève	Remarques
Exercices et questions	1	Fonctions affines, de degré 2 et 3	*Variations	Reg alg (tech dér 1ère)	demandée	
	2	Fonctions avec racine et trigonométriques	*Variations	Reg alg (tech dér 1ère)	demandée	
	3	Fonctions avec valeur absolue et par intervalles	*Variations	Reg alg (tech dér 1ère)	Demandée	
	4	Fonction rationnelles et exponentielles	*Variations	Reg alg (tech dér 1ère)	demandée	
Activités	6	Une seule fonction du 2nd degré	*Variations	Tech des inégalités	demandée	
	7	Fonctions du 2nd degré, rationnelle, par intervalles	*Variations	Reg alg (tech dér 1ère)	demandée	

Section 4 : "Maximum et minimum"

Place dans le chapitre		Type de fonction	Tâche	Technique(s) attendue(s)	Initiative laissée à l'élève	Remarques
Exercices et questions	1	Fonctions de degré 2 et 3, par intervalles	*Extremum	Reg alg (tech dér 1ère)	demandée	
	2	Fonctions avec racine et trigonométriques	*Extremum	Reg alg (tech dér 1ère)	demandée	
	3	Fonction rationnelles et exponentielles	*Extremum	Reg alg (tech dérivée 1ère)	Demandée	
	4	équation de la fonction donnée avec paramètres	*Exp fonc	Verbal/symb > Alg (tech de la dérivée 1ère	Par contrat	Conditions sur les extremums
Activités	6	Fonctions rationnelle et avec racine cubique	*Extremum	Reg alg (tech de la dérivée 1ère)	demandée	
	7	équation de la fonction donnée avec paramètres	*Exp fonc	Verbal/symb > Alg (tech de la dérivée 1ère)	Par contrat	Conditions sur les extremums

Section 5 : "Concavité/convexité"

Place dans le chapitre		Type de fonction	Tâche	Technique(s) attendue(s)	Initiative laissée à l'élève	Remarques
Exercices et questions	1	Fonctions de degré 2 et 3, exponentielles	*Concavité/ convexité	Reg alg (tech dér 2nde)	demandée	
	2	Fonctions avec racine et trigonométriques	*Concavité/ convexité	Reg alg (tech dér 2nde)	demandée	
	3	Fonction degré 2 et 4	*Extremum	Reg alg (tech dér 2nde	demandée	
	4	Fonction avec valeur absolue et trigonométrique	*Extremum	Reg alg (tech dér 2nde)	demandée	Conditions sur les extremums
	5	Fonction degré 4	*Point d'inflexion	Reg alg (tech dér 2nde)	demandée	Exercice exclu: porte sur la dérivée
	6 et 7	équation de la fonction donnée avec paramètres	*Exp fonc	Verbal/symb > Alg (tech de la dérivée 2nde)	Par contrat	Conditions sur le point d'inflexion
Activités	9	équation de la fonction donnée avec paramètres	*Exp fonc	Verbal/symb > Alg	demandée	Conditions sur les extremums

Section 6 : "Représentation graphique"

Place dans le chapitre		Type de fonction	Tâche	Technique(s) attendue(s)	Initiative laissée à l'élève	Remarques
Exercices et questions	1	Fonctions de degré 2 et 3, par intervalles	*Rep graph	Alg > Graph	Par contrat	
	2	Fonctions avec racine et trigonométriques	*Rep graph	Alg > Graph	Par contrat	

Place dans le chapitre		Type de fonction	Tâche	Technique(s) attendue(s)	Initiative laissée à l'élève	Remarques
Exercices et questions	3		*Rep graph	Alg > Graph	Par contrat	
	4	Registre graphique	*variations *Extremum *Concavité/Convexité *Pts d'inflexion	Reg Graph Reg Graph Reg Graph Reg Graph	Par contrat	Il s'agit uniquement de réaliser des lectures graphiques
Activités	6	Fonction degré 3	*Rep graph	Alg > Graph	Par contrat	

Section 7 : "Applications des maximum/minimum"

Place dans le chapitre		Type de fonction	Tâche	Technique(s) attendue(s)	Initiative laissée à l'élève	Remarques
Exercices et questions	1à 4 et 6 à 13	Problème d'optimisation (situation fonctionnelle)	Extremum	Technique de la dérivée 2nde	Par contrat (d'après la méthode de résolution exposée dans le cours)	les sous-tâches dont la tâche de modélisation ne sont pas explicitement demandées.
	5	Problème d'optimisation (situation fonctionnelle)	Extremum	Technique de la dérivée 1ère	Par contrat, (car $f'(x_1)=0$, pour $f(x_1)$ extremum de la fonction, d'après les indications du cours)	les sous-tâches dont la tâche de modélisation ne sont pas explicitement demandées.
Activités	14 et 15	Problème d'optimisation (situation fonctionnelle)	Extremum	Technique de la dérivée 2nde	Par contrat (d'après la méthode de résolution exposée dans le cours)	les sous-tâches dont la tâche de modélisation ne sont pas explicitement demandées.

5. Sommaire des chapitres relatifs à l'enseignement des fonctions du manuel de A. Coxford et J. Payne (1991) : HBJ Algebra with trigonometry, 2nd edition, Harcourt Brace Javonovich Publishers

ANNEXES DU CHAPITRE 5

1. Texte du questionnaire

Prénom: Nom:

Classe: Lycée:

Questionnaire – 1ère Partie

Dans chacune des situations proposées, peut-on parler de fonction ?
- Si oui, expliquez de quelle fonction il s'agit, pourquoi c'est une fonction, et donnez-en si possible une autre expression.
- Si non, expliquez pourquoi on ne peut pas parler de fonction.

S1 : Associer à chaque élève de votre classe chacun de ses frères.

S2 : Vendre dans un magasin des articles à l'unité ou par paquet de 2, 3, 5, 10, 20. Voici le tableau des prix :

Nombre d'article	1	2	3	5	10	20
Prix en F	3	5,5	8	13,5	27	55

S3 : Associer tout nombre réel x appartenant à l'intervalle] –1; 1 [, le nombre 1/x.

S4 : L'ensemble des couples de nombres réels (x, y) tels que $x = y^2$

S5 : L'ensemble des couples (1; 3); (5; 3); (15; 3)

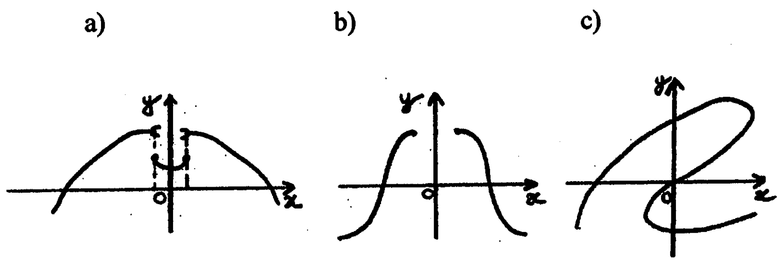
S6 : x et y sont des entiers naturels.
Si x est un nombre pair alors y = x/2 ;
Si x est un nombre impair alors y = -x + 1.

S7 : Soit l'inéquation $x^2 - y > 0$. A tout couple (x, y) de nombres entiers on fait correspondre « Vrai » si l'inéquation est vérifiée ou « Faux » si l'inéquation n'est pas vérifiée.

S8 : Associer à chaque élément de N un entier choisi arbitrairement par un lancer de dé.

S9 :

Les graphiques ci-dessous représentent-ils des fonctions ? Justifier votre réponse.



Nom :   Prénom:

Lycée: Classe :

Questionnaire – 2ème Partie

Q1: Dans chacune des 2 questions suivantes f, g et h sont des fonctions définies sur R telles que h = fog.

1) Avec les informations données dans le tableau suivant est-il possible de connaître h(0) ? Si oui, déterminer cette valeur et si non expliquer pourquoi.

x	f(x)	g(x)
-1	2	-3
0	-3	-1
4	1	2

Réponse :

2) Même question pour f(2)

x	h(x)	g(x)
-1	1	-3
4	π	1
π	0	2

Réponse:

Q2: Soient f et g, deux fonctions définies sur R telle que $f(x) = x^2$ et $g(x) = 3x + 2$. Déterminer :

1) fog(1) =

2) gof(x) =

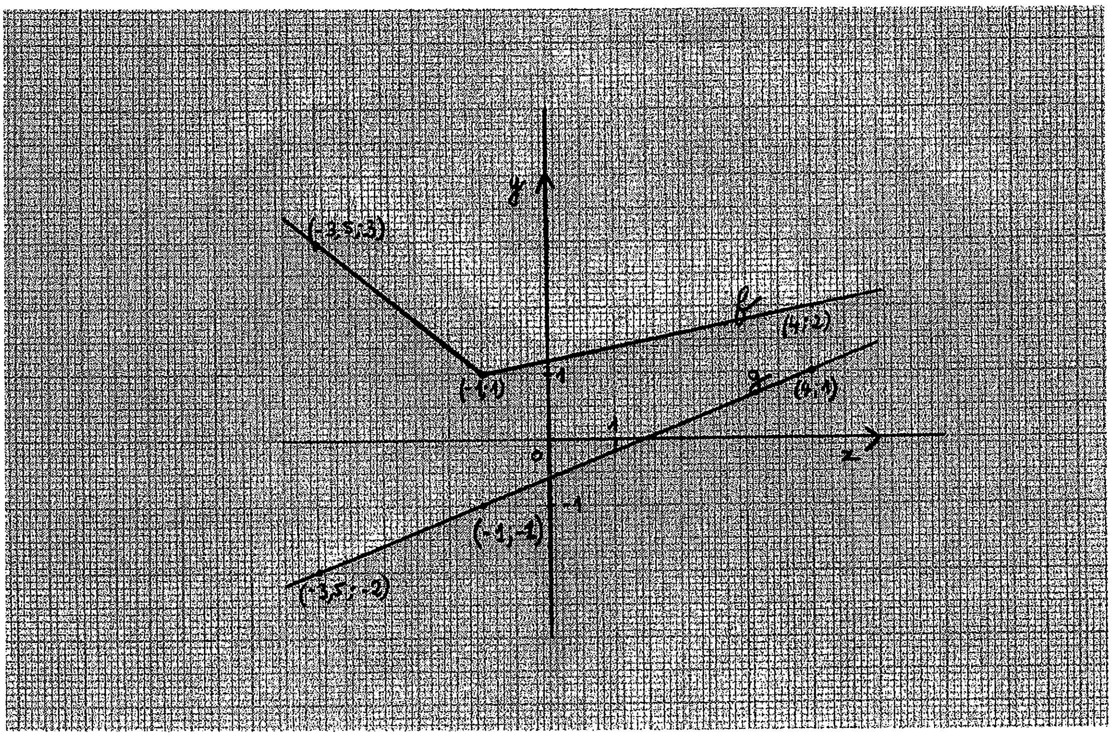
Q3: Soient 2 fonctions f et g définies sur R telles que :

$$f(x) = \begin{cases} -4 \,;\ \text{si } x < 0 \\ 2x \,;\ \text{si } x > 0 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 1 \\ 3x - 2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

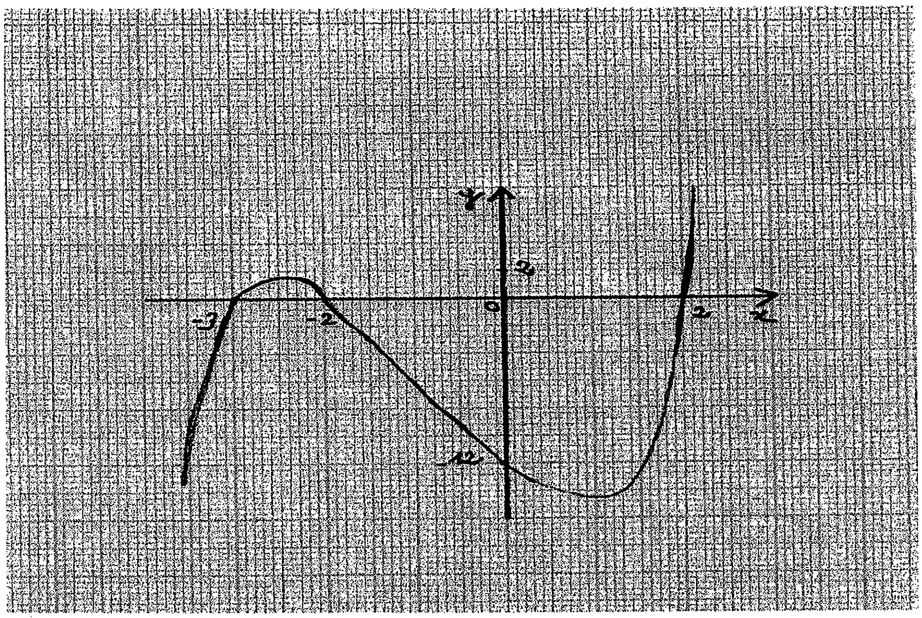
Déterminer la fonction f g (x) (il s'agit d'une multiplication).

504

Q4: Les fonctions f et g sont représentées dans le graphe ci-dessous,
Représentez dans le même repère la fonction f + g.



Q5: La représentation graphique ci-dessous est celle de la fonction f telle que
$f(x) = x^3 + 3x^2 - 4x - 12$.

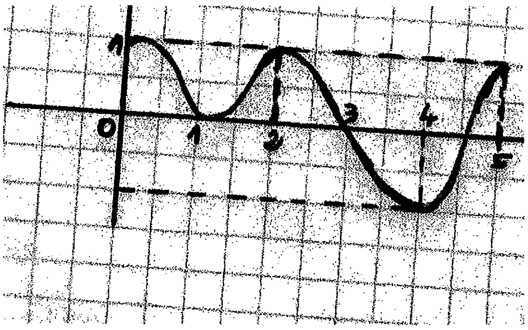


D'après ce graphique est-il possible de dire au sujet de l'équation
$x^3 + 3x^2 - 4x - 12 = 0$, que :

a) on ne connaît pas ses solutions ; il faut trouver une méthode algébrique pour résoudre l'équation.
b) - 12 est solution, car quand x = 0, y = -12.
c) - 3, -2, 2 sont solutions.

Entourer la bonne réponse et justifier :

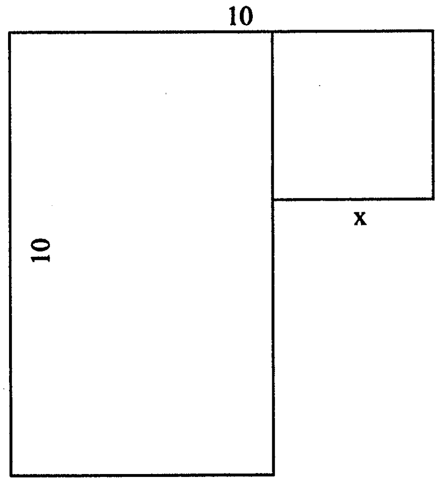
Q6: Compléter la représentation graphique de la fonction f suivante définie sur R, sachant que f admet pour période 5.



Que vaut $f(7)$?		$f(-3)$?		$f(1\,789)$?

Q7 : Un propriétaire possède une parcelle de terrain rectangulaire. Il achète une parcelle carrée contiguë à la première parcelle et obtient un terrain dont la forme nous est montrée par la figure ci-dessous. On ne connaît ni la largeur de la parcelle du premier terrain, ni les dimensions de la parcelle carrée, mais on sait que chacune des deux plus grandes longueurs du terrain total mesure 10m.

1) Quelle peut-être l'aire maximum du terrain total?



2) Soit x la longueur du côté de la parcelle carrée.
Etudier l'aire A du terrain en fonction de x :
a- Quel est l'ensemble de définition de la fonction A ?

b- Tracer son graphe.

c- Quelle est l'aire minimum du terrain total ?

3) Pour quelle(s) valeur(s) de x l'aire du terrain est-elle égale à 79m² ?
Peut-on le savoir à l'aide du graphe de la fonction ?

2 - Grille de codage des réponses de la première partie du questionnaire

	N°	Réu 0/1/2	Déf 0/1/2/3	Rep 0/1	Ens 0/1	Loi 0/1	d/d 0/1	f/I 0/1	D/b 0/1	x/y 0/1	ft 0/1	Alg 0/1	Remarques
S1													
S2													
S3													
S4													
S5													
S6													
S7													
S8													
S9													

3 - Grille de codage des réponses de la deuxième partie du questionnaire

N°	Q1.1	Q1.2	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6.1	Q6.2	Q7.1	Q7. 2a	Q7. 2b(eq)	Q7.2 b(gr)	Q7 .2c	Q7.3	Remarques

4 - Question de Funrighetti et Somaglia portant sur la notion de composition de fonctions

La fonction f, définie sur N*, est telle que f : n → n-1 ; g est définie sur N et g : n → 3n.
Laquelle des écritures suivantes correspond au calcul de gof (5) ? (Justifiez) :

a) $5 \xrightarrow{g} \xrightarrow{f} 14$
b) $5 \xrightarrow{f} \xrightarrow{g} 18$
c) $5 \xrightarrow{f} \xrightarrow{g} 12$
d) $5 \xrightarrow{f} \xrightarrow{g} 64$

Pour tout renseignement sur les publications diffusées par notre IREM,

Vous pouvez soit :

Consulter notre site WEB

http://www.ccr.jussieu.fr/iremParis7/welcome.html

Demander notre catalogue en écrivant à

IREM Université Paris 7
Case 7018
2 place Jussieu
75251 Paris cedex 05

RESUME

Cette recherche de type curriculaire porte sur la transposition didactique du concept de fonction dans l'enseignement secondaire en France (classes de 2nde et 1ère) et en Palestine (classes de 10ème, 11ème et 12ème).
La première partie présente la problématique, les cadres théoriques et la méthodologie. La deuxième partie est consacrée à la détermination du rapport institutionnel aux fonctions dans les deux institutions à travers l'analyse des programmes et manuels. La troisième partie concerne l'étude du rapport personnel des élèves à l'objet fonction, elle correspond à la partie expérimentale de notre recherche et est effectuée à l'aide d'un questionnaire.
Cette étude comparative met en évidence le poids de l'organisation institutionnelle sur les connaissances acquises par les élèves. Concernant plus particulièrement le projet curriculaire, elle projette également quelques lumières sur les organisations mathématiques relatives au thème mathématique des fonctions.

MOTS CLES

fonction - anthropologie didactique - transposition didactique - questionnement écologique - registre de représentation - cadre – dialectique outil/objet - rapport institutionnel - rapport personnel

Editeur : IREM Université PARIS 7 Denis Diderot
Directeur responsable de la publication : M. ARTIGUE
2 Place Jussieu. Case 7018
75251 PARIS Cedex 05
iremp7@ufrp7.math.jussieu.fr
www.irem-paris7.fr.st
Dépôt légal : 2004
ISBN : 2-86612-246-1